# Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

### Exercice 1 ** I

Étudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$
4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Correction ▼ [005887]

### Exercice 2 *** I

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005888]

### Exercice 3 *** I

Soit $f(x,y)=\begin{cases}y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\\ 0 \text{ si } y=0\end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f$ est de classe $C^1$. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Correction ▼ [005889]

### Exercice 4 **

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y, x+y)\end{array}$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction ▼ [005890]

**Exercice 5** ***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1} + y - x = 0$ définit implicitement une fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2),\ [y^{2n+1} + y - x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$.
Montrer que $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\ dt$.

Correction ▼ [005891]

**Exercice 6** ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y} + y - 1 = 0$.

Correction ▼ [005892]

**Exercice 7** *

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^1$. On dit que $f$ est positivement homogène de degré $r$ ($r$ réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in ]0,+\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'Euler :

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Correction ▼ [005893]

**Exercice 8** ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2. $f(x,y) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4$.

Correction ▼ [005894]

**Exercice 9** *** I

Soit $f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$. Montrer que $f$ est différentiable en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa différentielle.

Correction ▼ [005895]

**Exercice 10** *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [005896]

**Exercice 11** **

Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega = (2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega = \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x\}$
3. $\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2+y^2} - ydy$
4. $\omega = \frac{1}{x^2y}dx - \frac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de $x^2 + y^2$).

Correction ▼ [005897]

**Exercice 12** *** I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $u = x + y$ et $v = x + 2y$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

Correction ▼ [005898]

**Exercice 13** **

Déterminer la différentielle en tout point de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$.

Correction ▼ [005899]

**Exercice 14** **

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B = \{x \in E \mid \|x\| < 1\}$. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$ est un homéomorphisme.

Correction ▼ [005900]

**Exercice 15** **

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et préciser $df$. Montrer que $f$ n'est pas différentiable en 0.

Correction ▼ [005901]

**Exercice 16** ***

Maximum du produit des distances d'un point $M$ intérieur à un triangle $ABC$ aux côtés de ce triangle.

Correction ▼ [005902]

**Exercice 17** *

Minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $a$ réel donné.

Correction ▼ [005903]

**Exercice 18** ***

Trouver une application non constante $f : ]-1, 1[ \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que l'application $g$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de $g$ est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Correction ▼ [005904]

**Exercice 19** *** I

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que $f$ est une rotation affine.

Correction ▼ [005905]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand $x$ tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si $f$ a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Quand $x$ tend vers 0, le couple $(x,x)$ tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc $f$ n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple $(x,y)$ tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de $f$. $f(x,y)$ tend vers 0 quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.

3. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Quand $y$ tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc $f$ n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand $x$ tend vers 0, le couple $(x,x)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc $f$ n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc $f$ n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.

   $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ et donc $f$ tend vers 0 quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.

7. $f$ est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

   $f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc $f$ n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8. $f(2+h,-2+k,l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand $h$ tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \frac{1}{4}$ quand $l$ tend vers 0. Donc, $f$ n'a pas de limite réelle quand $(x,y,z)$ tend vers $(2,-2,0)$.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

$f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
$f$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
**Continuité en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple $(x,y)$ tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$.

On en déduit que $f$ est continue en $(0,0)$ et finalement $f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

**Dérivées partielles d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.** $f$ est de classe $C^1$ au moins sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y) \neq (0,0)$ $f(x,y) = -f(y,x)$. Donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

**Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0,$$

et donc $\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Ainsi, $f$ admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ et}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

**Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right| = \frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2} \leqslant |y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$f$ est au moins de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

On pose $D = \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$ puis $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$.
$f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$.
$f$ est de classe $C^1$ sur $\Omega$ en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y) \in \Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Etudions la continuité de $f$ en $(0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \begin{cases} y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant \begin{cases} y^2 \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant y^2.$$

Comme $y^2$ tend vers 0 quand $(x,y)$ tend vers 0, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ (x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ et donc $f$ est continue en $(0,0)$ puis

$f$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, $x_0$ réel donné. Pour $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0} = \frac{0-0}{x-x_0} = 0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $x_0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, $x_0$ réel donné. Pour $y \neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0} = \frac{y^2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right| \leqslant |y|$ puis que $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand $y$ tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases}.$$

Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, $x_0$ réel donné. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right| = \begin{cases} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant |y|.$$

Quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand $(x,y)$ tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

$$\text{la fonction } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, $x_0$ réel donné. Supposons tout d'abord $x_0 = 0$. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right| = \begin{cases} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right) - x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y \neq 0 \\ 0 \text{ si } y = 0 \end{cases} \leqslant 2|y| + |x|.$$

Quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$, $|x| + 2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand $(x,y)$ tend vers $(0,0)$.
Supposons maintenant $x_0 \neq 0$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) = 2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand $y$ tend vers 0, $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0 \neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand $y$ tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0 \neq 0$. On a montré que

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega \cup \{(0,0)\}.$$

Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \frac{0-0}{x} = 0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand $x$ tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)=0$.
Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y}=1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand $y$ tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)=1$.
On a montré que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de Schwarz, $f$ n'est pas de classe $C^2$ sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$.

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y)=(z,t)&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x-e^y=z\\x+y=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\e^x-e^{t-x}=z\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\(e^x)^2-ze^x-e^t=0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y=t-x\\e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t}\text{ ou }e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t}\\y=t-x\end{array}\right.\quad(\text{car } z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0)\\
&\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\\y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t})\end{array}\right.\quad(\text{car } z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par $\varphi$ et donc $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
La fonction $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\left|\begin{array}{cc}e^x&-e^y\\1&1\end{array}\right|=e^x+e^y$. Le jacobien de $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, $\varphi$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de $\varphi$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$\varphi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x:y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f_x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty}f_x(y),\lim_{y\to+\infty}f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.
La fonction $f:(x,y)\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2n+1)y^{2n}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction $\varphi$ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel $x$ et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi(x)-x=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n}+\varphi'(x)-1=0$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- C'est vrai pour $p=1$.
- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que la fonction $\varphi$ soit $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi'=\frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit
que la fonction $\varphi$ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a montré par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction $\varphi$ est $p$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

la fonction $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Calculons maintenant $I = \int_0^2 \varphi(t)\ dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1} + 0 - 0 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$ et puisque $1^{2n+1} + 1 - 2 = 0$, on a $\varphi(2) = 1$.
Maintenant, pour tout réel $x$ de $[0, 2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi'(x)\varphi(x) - x\varphi'(x) = 0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0, 2]$, on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\ dx - \int_0^2 x\varphi'(x)\ dx = 0\ (*).$$

Or, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx = \left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2 = \frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\ dx = \left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\ dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\ dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \varphi(x)$ sont de classe $C^1$ sur le segment $[0, 2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\ dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x)\ dx = -2 + I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$ et on obtient $I = \frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\int_0^2 \varphi(x)\ dx = \frac{3n+2}{2n+2}.$$

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction $f_x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y), \lim_{y\to+\infty} f_x(y)[ = \mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y) = 0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.
La fonction $f : (x, y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction $\varphi$ implicitement définie par l'égalité $f(x, y) = 0$ est dérivable en tout réel $x$ et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1 + \varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$ ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que $\varphi$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.
**1ère solution.** Puisque $e^{0+0} + 0 - 1 = 0$, on a $\varphi(0) = 0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x) \underset{x\to0}{=} -\frac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned} e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)} \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + ax^2\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x\to0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \left(a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$ fournit alors $a + \frac{1}{8} + a = 0$ et $b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48} + b = 0$ ou encore $a = -\frac{1}{16}$ et $b = \frac{1}{192}$.
**2ème solution.** On a déjà $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = 0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1) - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2\times2^2} = -\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x) = -\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2} + (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1/2}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{192}$. La formule de Taylor-Young refournit alors

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).}$$

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

On dérive par rapport à $\lambda$ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r\lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

1. $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si $f$ admet un extremum local en un point $(x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2+6xy-15=0 \\ 3x^2-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-\frac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Réciproquement, $r = 6x+6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt - s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt-s^2)\left(2, \frac{1}{4}\right) = (rt-s^2)\left(-2, -\frac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et $f$ n'admet pas d'extremum local en $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2, -\frac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$$

2. La fonction $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si $f$ admet un extremum local en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0)$ est un point critique de $f$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4(x-y)+4x^3 = 0 \\ 4(x-y)+4y^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3+y^3 = 0 \\ -4(x-y)+4x^3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x \\ x^3-2x=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Réciproquement, $f$ est plus précisément de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et

$$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4+12x^2)(-4+12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

$(rt-s^2)\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 48(12-2-2) > 0$. Donc $f$ admet un extremum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\times 12 - 4 = 20 > 0$, $f$ admet un minimum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) - f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8$$
$$\geqslant x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2+y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2-2)^2 + (y^2 -$$
$$\geqslant 0.$$

et $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x,-y) = f(x,y)$ et donc $f$ admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

$f(0,0) = 0$. Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et donc $f$ prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x \in \left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[ \setminus \{0\}$, $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2-2) < 0$ et $f$ prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, $f$ n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

$f$ admet un minimum global égal à 8, atteint en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ et $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel $H$

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} = (A+H)^{-1}(I_n - (A+H)A^{-1}) = -(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = -(A+H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A+H)^{-1}(-HA^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1})$$
$$= (A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.$$

Par suite, $\left\|f(A+H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\right\| = \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| \leqslant \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\|^2$. Maintenant, la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}{}^t(\mathrm{com}(M))$, valable pour tout $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand $H$ tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0} \left\|(A+H)^{-1}\right\| \left\|A^{-1}\right\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0} \frac{1}{\|H\|} \left\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\right\| = 0.$$

Comme l'application $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de $f$ en $A$.

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

Pour tout complexe $z$ tel que $|z| \leqslant 1$,

$$|\sin(z)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}(|z|) \leqslant \mathrm{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z = i$ car $|\sin(i)| = \left|\frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i}\right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \mathrm{sh}(1)$.

$$\text{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}=\text{sh}(1).$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y)=2x+2y+e^{x+y}=Q(x,y)$. Les fonctions $P$ et $Q$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de Schwarz, $\omega$ est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y}=2+e^{x+y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle $\omega$ est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit $f$ une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2y+e^{x+y}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2x+2y+e^{x+y}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=x^2+2xy+e^{x+y}+g(y)\\ 2x+e^{x+y}+g'(y)=2x+2y+e^{x+y}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=x^2+2xy+e^{x+y}+g(y)\\ g(y)=y^2+\lambda\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2/\ f(x,y)=(x+y)^2+e^{x+y}+\lambda.
\end{aligned}$$

   Les primitives de $\omega$ sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

   **Remarque.** On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x,y)=(x+y)^2+e^{x+y}$ alors $df=\omega$.

2. La forme différentielle $\omega$ est de classe $C^1$ sur $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\ y>x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de Schwarz, $\omega$ est exacte sur $\Omega$ si et seulement si $\omega$ est fermée sur $\Omega$.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y}+y\frac{1}{(x-y)^2}\right)=-\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2y}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}=\frac{x+y}{(y-x)^3}$.

   $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x}-x\frac{1}{(y-x)^2}\right)=\frac{1}{(y-x)^2}+\frac{2x}{(y-x)^3}=\frac{x+y}{(y-x)^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$.

   Donc $\omega$ est exacte sur l'ouvert $\Omega$. Soit $f$ une fonction $f$ de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df=\omega &\Leftrightarrow \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{y}{(x-y)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists g\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ \left\{\begin{array}{l}f(x,y)=\frac{y}{x-y}+g(y)\\ \frac{x}{(x-y)^2}+g'(y)=\frac{x}{(x-y)^2}\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \exists \lambda\in\mathbb{R}/\ \forall (x,y)\in\Omega,\ f(x,y)=\frac{y}{x-y}+\lambda.
\end{aligned}$$

   Les primitives de $\omega$ sur $\Omega$ sont les fonctions de la forme $(x,y)\mapsto\frac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

3. $\omega$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0),\ x\in]-\infty,0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur $\Omega$, $\omega$ est exacte si et seulement si $\omega$ est fermée d'après le théorème de Schwarz.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc $\omega$ est exacte sur $\Omega$. Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\Omega$.

$$df = \omega \Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall (x,y) \in \Omega, \ f(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda.$$

Les primitives de $\omega$ sur $\Omega$ sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de $\omega$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et donc $\omega$ est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. $\omega$ est de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc $\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si $\omega$ est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de Schwarz.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et $\omega$ n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.

On cherche un facteur intégrant de la forme $h : (x,y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où $g$ est une fonction non nulle de classe $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$h\omega \text{ est exacte sur } ]0,+\infty[^2 \Leftrightarrow \forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+$$

$$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0, \ -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall t > 0, \ g(t) = \lambda t.$$

La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = (x^2+y^2)\omega.$$

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

1. Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x+2y$. L'application $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y) = (u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un $C^1$-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \ g(u,v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = h(x+2y)$.

Les solutions sont les $(x,y) \mapsto h(x+2y)$ où $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

2. Soit $f$ une application de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est un $C^1$-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (r,\theta) \in ]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r)\\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

Les solutions sont les $(x,y) \mapsto h(x^2+y^2)$ où $h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

3. Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & ]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\ (u,v) & \mapsto & (u,uv) = (x,y)\end{array}$. Donc si on pose $f(x,y) = g(u,v)$, on a $g = f\circ\varphi$.

Soit $(x,y,u,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x\\ uv = y\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = x\\ v = \frac{y}{x}\end{array}\right. .$$

Ainsi, $\varphi$ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to & ]0,+\infty[\times\mathbb{R}\\ (x,y) & \mapsto & \left(x,\frac{y}{x}\right) = (u,v)\end{array}.$$

De plus, $\varphi$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0\\ v & u\end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que $\varphi$ est un $C^2$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

Puisque $g = f\circ\varphi$ et que $\varphi$ est un $C^2$-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, $f$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si $g$ est de classe $C^2$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

Ensuite,

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$$
$$= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.$$

Ainsi,

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall (u,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) = 0$$
$$\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (u,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = h(v)$$
$$\exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2 / \ \forall (u,v) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v) = uh(v) + k(v)$$
$$\exists (h,k) \in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2 / \ \forall (x,y) \in ]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y) = xh(xy) + k(xy).$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$ où $h$ et $k$ sont deux fonctions de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \|(x,y)\| = \text{Max}\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$.
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h)) = (a+h).(b+k) = a.b + a.h + b.k + h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) = (a.h + b.k) + h.k$. Maintenant l'application $L : (h,k) \mapsto a.h + b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k) \neq (0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = |h.k| \leqslant \|h\|_2\|k\|_2 \leqslant \|(h,k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| \leqslant \|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h)) - f((a,b)) - L((h,k))| = 0.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto a.h + b.k$ est linéaire, on en déduit que $f$ est différentiable en $(a,b)$ et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ df_{(a,b)}(h,k) = a.h + b.k$.
La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k) - a\wedge b - a\wedge h - b\wedge k\|_2 = \frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|} \leqslant \|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k) \mapsto a\wedge h + b\wedge k$ est linéaire, on en déduit que $g$ est différentiable en $(a,b)$ et que $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ dg_{(a,b)}(h,k) = a\wedge h + b\wedge k$.

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

Pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$. Donc $f$ est bien une application de $E$ dans $B$.
Si $y = 0$, pour $x \in E$, $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Soit alors $y \in B \setminus \{0\}$. Pour $x \in E$,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1 + \|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / \ x = \lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de $y$ est nécessairement de la forme $\lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|} y$ et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1 + |\lambda|\|y\|} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + |\lambda|\|y\| \\ &\Leftrightarrow (\lambda \geqslant 0 \text{ et } (1 - \|y\|)\lambda = 1) \text{ ou } (\lambda < 0 \text{ et } (1 + \|y\|)\lambda = 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \|y\|} \text{ (car } \|y\| < 1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $y$ admet un antécédent par $f$ et un seul à savoir $x = \frac{1}{1-\|y\|} y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in B,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|} x.$$

On sait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur $B$ pour les mêmes raisons. Donc les applications $f$ et $f^{-1}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et $B$ respectivement et on a montré que

$$\text{l'application } \begin{array}{rccc} f : & E & \to & B \\ & x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array} \text{ est un homéomorphisme.}$$

---

**Correction de l'exercice 15 ▲**

**1ère solution.** Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que $f$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \frac{1}{\|x\|_2} \sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

**2 ème solution.** Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x + h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x + h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x + h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand $h$ tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)| \leqslant \|x\|_2 \|h\|_2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz), on a $x|h \underset{h \to 0}{=} O(\|h\|_2)$ puis $(\|x + h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|_2)$.

Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h\to 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que $f$ est différentiable en tout $x$ de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}$.
Soit $L$ une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand $h$ tend vers 0. Pour $u$ vecteur non nul donné et $t$ réel non nul, l'expression $1 - L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand $t$ tend vers 0. Mais si $t$ tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u) = \|u\|_2$ et si $t$ tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u) = -\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u \neq 0$. Donc $f$ n'est pas différentiable en 0.

---

**Correction de l'exercice 16 ▲**

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ et on note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle $ABC$. Soit $M$ un point intérieur au triangle $ABC$. On note $I$, $J$ et $K$ les projetés orthogonaux de $M$ sur les droites $(BC)$, $(CA)$ et $(AB)$ respectivement. On pose $u$ = aire de $MBC$, $v$ = aire de $MCA$ et $w$ = aire de $MAB$. On a

$$d(M,(BC)) \times d(M,(CA)) \times d(M,(AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc}uv(\mathcal{A}-u-v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f : (u,v) \mapsto uv(\mathcal{A}-u-v)$ sur le domaine

$$T = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geqslant 0, \ v \geqslant 0 \text{ et } u+v \leqslant \mathcal{A}\right\}.$$

$T$ est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :
- $\forall (u,v) \in T^2$, $\|(u,v)\|_1 = u+v \leqslant \mathcal{A}$ et donc $T$ est bornée.
- Les applications $\varphi_1 : (u,v) \mapsto u$, $\varphi_2 : (u,v) \mapsto v$ et $\varphi_3 : (u,v) \mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes
linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u \geqslant 0\} = \varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ v \geqslant 0\} = \varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u+v \leqslant 0\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$
en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ est un
fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.
Puisque $T$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, $T$ est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de Borel-Lebesgue.
$f$ est continue sur le compact $T$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc $f$ admet un maximum sur $T$.
Pour tout $(u,v)$ appartenant à la frontière de $T$, on a $f(u,v) = 0$. Comme $f$ est strictement positive sur $\overset{\circ}{T} = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / \ u > 0, \ v > 0 \text{ et } u+v < 0\}$, $f$ admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque $f$ est de classe $C^1$ sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $f$ admet un maximum en $(u_0,v_0) \in \overset{\circ}{T}$, $(u_0,v_0)$ est nécessairement un point critique de $f$. Soit $(u,v) \in \overset{\circ}{T}$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(\mathcal{A}-2u-v) = 0 \\ u(\mathcal{A}-u-2v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+v = \mathcal{A} \\ u+2v = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Puisque $f$ admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0) = \left(\frac{\mathcal{A}}{3}, \frac{\mathcal{A}}{3}\right)$, $f$ admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0) = \frac{\mathcal{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point $M$ intérieur au triangle $ABC$ aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$.
**Remarque.** On peut démontrer que pour tout point $M$ intérieur au triangle $ABC$, on a $M$ = bar $((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de}$
Si maintenant $M$ est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en $G$ l'isobarycentre du triangle $ABC$.

**Correction de l'exercice 17 ▲**

Soient $A$ et $B$ les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathcal{R}$ orthonormé. Soit $M$ un point du plan de coordonnées $(x,y)$ dans $\mathcal{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2=MA+MB\geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M\in[AB].$$

Donc $f$ admet un minimum global égal à $AB=a\sqrt{2}$ atteint en tout couple $(x,y)$ de la forme $(\lambda a,(1-\lambda)a)$, $\lambda\in[0,1]$.

**Correction de l'exercice 18 ▲**

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, $g$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=-2\frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{1-\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=-2\frac{\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)&=-2\cos(2x)\frac{2\operatorname{ch}^3(2y)-4\operatorname{sh}^2(2y)\operatorname{ch}(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\&=-4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)}(-\operatorname{ch}^2(2y)+2)f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+4\frac{\cos^2(2x)(\operatorname{ch}^2(2y)-1)}{\operatorname{ch}^4(2y)}f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\operatorname{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y)=-2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)+\left(1-\frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right)f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $-1\leqslant\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)}=\cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand $x$ décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)},\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}=[-1,1]$. Par suite,

$$\forall(x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y)=0\Leftrightarrow\forall t\in[-1,1],\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0.$$

On cherche une application $f$ de classe $C^2$ sur $]-1,1[$. Or $\left|\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right|=1\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\operatorname{ch}(2y)\Leftrightarrow|\cos(2x)|=\operatorname{ch}(2y)=1\Leftrightarrow y=0$ et $x\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall(x,y)\ \mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(\frac{k\pi}{2},0\right),\ k\in\mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y)=0&\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t)-2tf'(t)=0\\&\Leftrightarrow\forall t\in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t)=0\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}/\ \forall t\in]-1,1[,\ f'(t)=\frac{\lambda}{1-t^2}\\&\Leftrightarrow\exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2/\ \forall t\in]-1,1[,\ f(t)=\lambda\operatorname{argth}t+\mu.\end{aligned}$$

De plus, $f$ n'est pas constante si et seulement si $\mu=0$.

L'application $t \mapsto \text{argth}\, t$ convient.

---

**Correction de l'exercice 19 ▲**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de $f$ en $(x, y)$ s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$ où $c$ et $s$ sont deux fonctions de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2 + s^2 = 1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions $c$ et $s$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Schwarz, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à $x$ ou à $y$, on obtient les égalités $c\frac{\partial c}{\partial x} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c\frac{\partial c}{\partial y} + s\frac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires. Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre. Finalement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications $c$ et $s$ sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe $\theta$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de $f$ en $(x, y)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Soit $g$ la rotation d'angle $\theta$ prenant la même valeur que $f$ en $(0, 0)$. $f$ et $g$ ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f = g$ et $f$ est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe $C^2$ dont la différentielle en tout point est une rotation.
Alors $f$ est une rotation affine.

---