Séries de Fourier

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire telle que $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

Correction ▼ [005781]

Exercice 2

Développer en série de Fourier les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :
1) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique paire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
2) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.
3) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.
4) (***) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \mathrm{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.
5) (**) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \sin x)$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.
Correction ▼ [005782]

Exercice 3 ***

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

1. (a) Développer en série trigonométrique la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b, de l'équation $z^2 - az + 1 = 0$).
   (b) La série obtenue est-elle la série de Fourier de f ?

2. Déduire de 1) la valeur des intégrales $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{a - \cos t}\, dt$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼ [005783]

Exercice 4 *** I

(un développement en série de fonctions de $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et $\mathrm{cotan}(\pi z)$).
Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique telle que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Développer la fonction f en série de Fourier.

2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2} \text{ et } \pi \operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2-n^2}.$$

Correction ▼ [005784]

Exercice 5 **

Développer en série de FOURIER la fonction $f : x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005785]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Puisque f est impaire, $f(0) = 0$. Puisque f est impaire et 2π-périodique, $-f(\pi) = f(-\pi) = f(\pi)$ et donc $f(\pi) = 0$. Puisque f est 2π-périodique, pour $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) = f(0) = 0$ et $f((2k+1)\pi) = f(\pi) = 0$. Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}, f(k\pi) = 0$.

   Soit $x \in]-\pi, 0[$. Puisque f est impaire, $f(x) = -f(-x) = -\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ et donc $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi < \pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x) = f(x-2k\pi) = \sin\left(\frac{x-2k\pi}{2}\right) = (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2}\right)$. De plus, $-\pi < x - 2k\pi < \pi \Rightarrow k < \frac{x+\pi}{2\pi} < k+1$ et $k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k \sin\left(\frac{x}{2}\right) \text{ où } k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right) \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

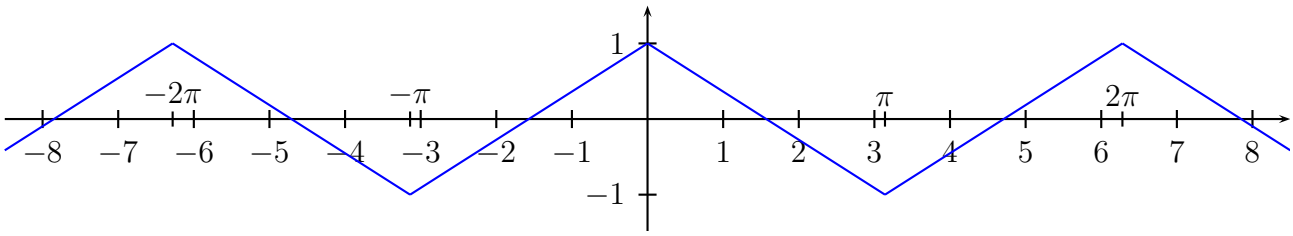
2. Soit $x \in [-\pi, 0]$. Puisque f est paire, $f(x) = f(-x) = \sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$ et donc $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin\left(\left|\frac{x}{2}\right|\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi \leqslant \pi$ et puisque f est 2π-périodique, $f(x) = f(x-2k\pi) = \sin\left(\left|\frac{x-2k\pi}{2}\right|\right)$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sin\left(\left|\frac{x}{2} - k\pi\right|\right) \text{ où } k = E\left(\frac{x+\pi}{2\pi}\right).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.



   Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)\,dx$.

   Par suite, $a_0(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n\pi^2}\left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

   La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ensuite, si $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on a

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

et donc $S = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de Parseval fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\,dx = \left[-\frac{1}{3}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

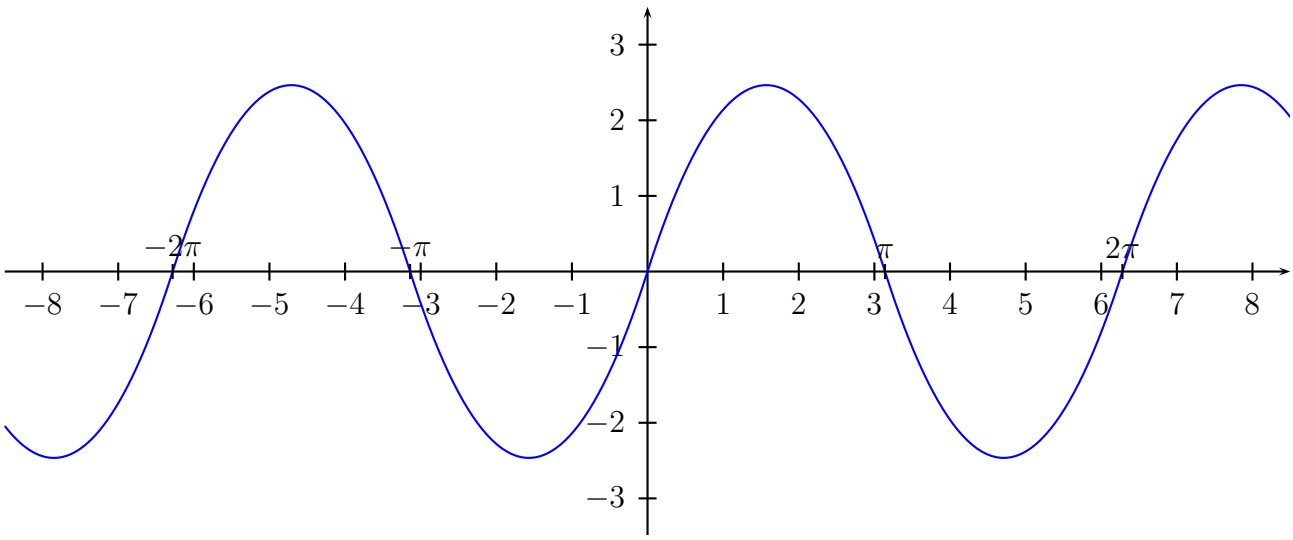
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}\times\frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^4}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16},$$

et donc $S = \frac{16}{15}\times\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

2. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.



Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi-x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\left[x(\pi-x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos(nx)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{n\pi}\left(\left[(\pi-2x)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) = \frac{4}{n^2\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. Par suite, pour tout réel x,

$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(nx) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Ensuite, puisque f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la formule de Parseval fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2(\pi-x)^2\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{\pi} = 2\pi^4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15}$$

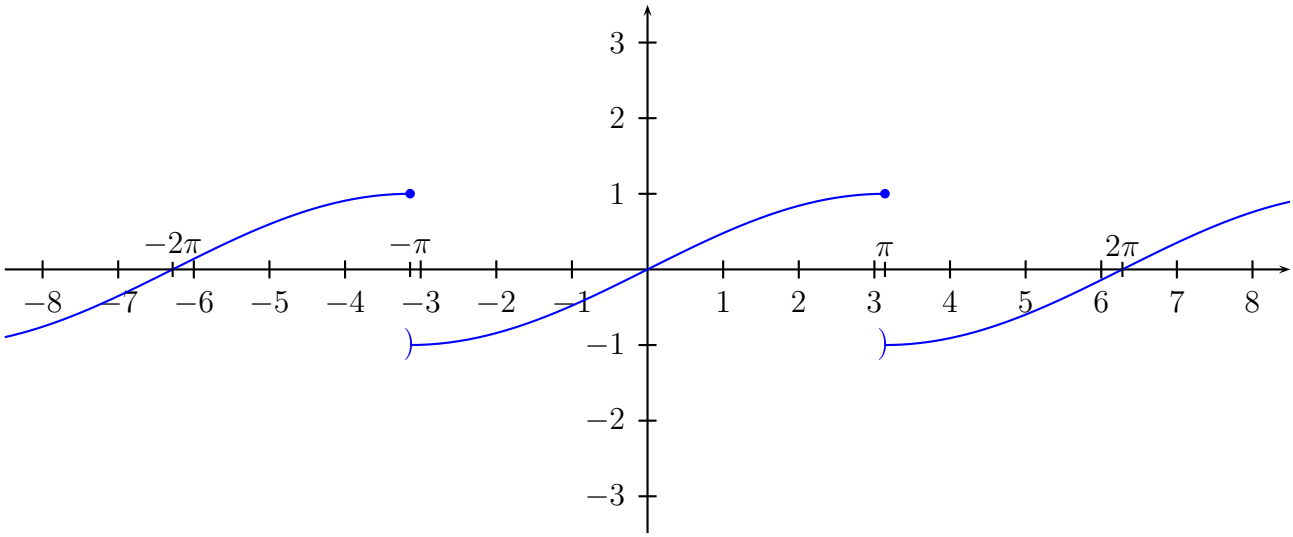
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64}\times\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^6}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{S}{64},$$

et donc $S = \frac{64}{63}\times\frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.}$$

3. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.



La fonction f a mêmes coefficients de Fourier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique telle que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ g(x) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\right)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right)}{n-\frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2n}{n^2-\frac{1}{4}} = -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{8n}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

La fonction f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge en tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+)+f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in]-\pi,\pi[,\ \sin\left(\tfrac{x}{2}\right) = -\tfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \tfrac{n}{4n^2-1}\sin(nx).}$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ fournit

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} = -\tfrac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \tfrac{n}{4n^2-1}\sin\left(n\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\tfrac{2p+1}{4(2p+1)^2-1}\sin\left((2p+1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\tfrac{2p+1}{16p^2+16p+3},$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\tfrac{2n+1}{16n^2+16n+3} = \tfrac{\pi}{8\sqrt{2}}.}$$

4. f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et paire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx$.

1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\lambda x)e^{inx}\,dx\right) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\lambda+in)x}\,dx + \int_{-\pi}^{\pi}e^{(-\lambda+in)x}\,dx\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi}-e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi}-e^{-(-\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in}\right) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in} + \frac{-2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in}\right)\\
&= \frac{(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda-in}{\lambda^2+n^2} + \frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2}\right) = \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2ème solution. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\mathrm{sh}(\lambda x)}{\lambda}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{sh}(\lambda x)\sin(nx)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\left[\frac{\mathrm{ch}(\lambda x)}{\lambda}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{ch}(\lambda x)\cos(nx)\,dx\right)\right)\\
&= \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2}a_n(f),
\end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2(-1)^n\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\times\frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2} = \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\times\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \tfrac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \tfrac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}\cos(nx).}$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $1 = \frac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \tfrac{\pi}{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}\left(1-\tfrac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \tfrac{\pi\lambda-\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}$$

et l'égalité $f(\pi) = \mathrm{ch}(\lambda\pi)$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n^2+\lambda^2} = \tfrac{\pi}{2\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}\left(\mathrm{ch}(\lambda\pi)-\tfrac{\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi}\right) = \tfrac{\lambda\pi\,\mathrm{ch}(\lambda\pi)-\mathrm{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2\,\mathrm{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi\lambda - \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\lambda\pi \operatorname{ch}(\lambda\pi) - \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}.}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. L'égalité de Parseval s'écrit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx$ avec

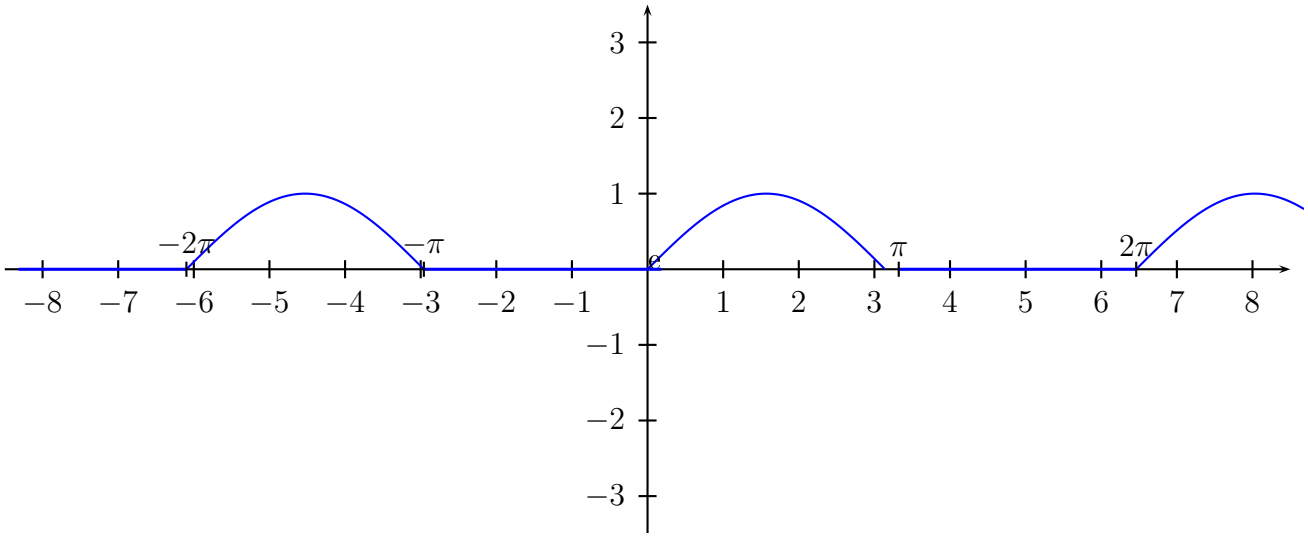
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ch}^2(\lambda x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{ch}(2\lambda x)+1}{2}\,dx = 1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\lambda\pi},$$

et donc $1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\lambda\pi} = \frac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \frac{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}\left(1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\lambda\pi} - \frac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2}\right) = \frac{2\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda\operatorname{sh}(2\lambda\pi) - 4\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\boxed{\forall \lambda > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda\operatorname{ch}(\lambda\pi)\operatorname{sh}(\lambda\pi) - 2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^4\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.}$$

5. La fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.



Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sup(\sin x, 0)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin((n+1)x) - \sin((n-1)x)\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(2x)\,dx \text{ si } n = 1 \\ \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1}\right]_0^{\pi} \text{ si } n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} \text{ si } n = 1 \\ \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right) \text{ si } n \neq 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } n = 1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{\pi}\frac{1}{n^2-1} \text{ si } n \neq 1 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x))\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{ si } n = 1 \\ 0 \text{ si } n \neq 1 \end{cases}$$

La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$. On en déduit que pour tout réel x

$$\sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1}\cos(nx) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1}\cos(2px).$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx).}$$

L'égalité $f(0) = 0$ fournit $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

Remarque. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2N+1}\right) = \frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. (a) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Pour tout réel t, $a - \cos t \neq 0$ et

$$\frac{1}{a-\cos t} = \frac{2}{2a-e^{it}-e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2-2ae^{it}+1}.$$

L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ admet deux solutions non nulles inverses l'une de l'autre. On note b la solution de plus petit module de sorte que $|b| \leqslant 1$.
On ne peut avoir $|b| = 1$ car alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. On en déduit que $2a = b + \frac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2, 2]$ puis que $a \in [-1, 1]$ ce qui n'est pas. Donc $|b| \neq 1$. Plus précisément, puisque $|b| \leqslant \left|\frac{1}{b}\right|$, on a $|b| < 1$ et $\left|\frac{1}{b}\right|$. En particulier, $b \neq \frac{1}{b}$.
Ensuite, pour $|t| < |b|$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-\cos t} &= \frac{-2e^{it}}{(e^{it}-b)\left(e^{it}-\frac{1}{b}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{b}-b}\left(\frac{b}{e^{it}-b} - \frac{1/b}{e^{it}-\frac{1}{b}}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(\frac{be^{-it}}{1-be^{-it}} + \frac{1}{1-be^{it}}\right)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(be^{-it}\sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int}\right) \ (\text{car } |be^{it}| = |be^{-it}| = |b| < 1)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1}e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int}\right) = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{-int}\right)\\
&= \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n\cos(nt)\right).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{1}{a-\cos t} = \frac{2b}{1-b^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} b^n\cos(nt)\right).}$$

(b) Pour tout réel $t \in [-\pi, \pi]$ et tout entier naturel non nul n, on a $|b^n\cos(nt)| \leqslant |b|^n$. Comme la série numérique de terme général $|b|^n$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto b^n\cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$.
On sait alors que la série obtenue est la série de Fourier de f.

2. Puisque la fonction f est paire, pour tout entier naturel n, $a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt$. Donc, pour tout entier naturel n (y compris pour $n = 0$),

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a-\cos t}\,dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1-b^2}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. La fonction f est 2π-périodique, continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. Donc la série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème de Dirichlet.

   Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(\alpha x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((n+\alpha)x)+\cos((n-\alpha)x))\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((\alpha+n)x)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)x)}{\alpha-n}\right]_0^\pi \quad (\text{car } \alpha\notin\mathbb{Z}) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((\alpha+n)\pi)}{\alpha+n}+\frac{\sin((\alpha-n)\pi)}{\alpha-n}\right) = (-1)^n\frac{2\alpha\sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2-n^2)} \end{aligned}$$

   Finalement,

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z},\ \forall x\in[-\pi,\pi],\ \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi}+\frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2\alpha}{\alpha^2-n^2}\cos(nx).}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$.

   On prend $\alpha = z$ et $x = 0$ dans la formule précédente et on obtient $1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}+\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$ $(*)$. Maintenant,

$$\sin(\pi z)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})=0 \Leftrightarrow e^{i\pi z}=e^{-i\pi z} \Leftrightarrow e^{2i\pi z}=1 \Leftrightarrow 2i\pi z\in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}.$$

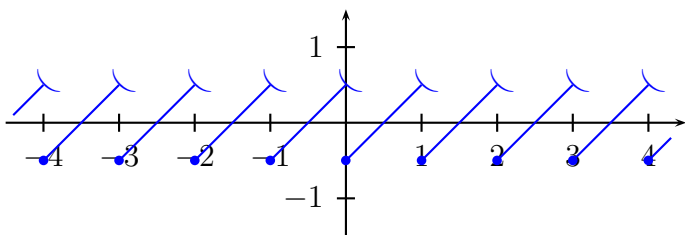
   Puisque $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, $\sin(\pi z)\neq 0$ et l'égalité $(*)$ peut s'écrire $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2}$.

   De même, en prenant $\alpha = z$ et $x = \pi$, on obtient $\cos(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}+\frac{\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$ et donc $\pi\operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$.

$$\boxed{\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2z}{z^2-n^2} \text{ et } \pi\operatorname{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

La fonction f est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On peut donc calculer ses coefficients de Fourier.



La fonction f a mêmes coefficients de Fourier que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x\notin\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x\in\mathbb{Z} \end{cases}$ qui est impaire. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)\sin\left(\frac{2n\pi t}{1}\right)\,dt = \int_0^1 (2t-1)\sin(2n\pi t)\,dt \\ &= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est de plus de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et d'après le théorème de Dirichlet, en tout réel x, la série de Fourier de f converge et a pour pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ f(x) = x - E(x) - \tfrac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}.}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f_p) &= 2\int_0^1 f(pt)\sin(2n\pi t)\,dt = 2\int_0^p f(u)\sin\left(2n\pi\frac{u}{p}\right)\frac{du}{p} \\ &= \left[-\frac{(2t-1)\cos(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^1 + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos(2n\pi t)\,dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi}\right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Remarque. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]\setminus\left\{\frac{k}{p},\ k \in [\![0,p]\!]\right\}$. Alors $px \notin \mathbb{Z}$ et donc

$$f_p(x) = f(px) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2np\pi x)}{n\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,p}\sin(2k\pi x)$$

où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k,p} = \begin{cases} 0 \text{ si } k \notin p\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{\frac{k}{p}\pi} \text{ si } k \in p\mathbb{Z} \end{cases}$ mais malheureusement, on ne peut pas récupérer ces coefficients car la série obtenue ne converge pas normalement.

$$\boxed{\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ \int_0^1 f_q(x)f_q(x)\,dx = \frac{(\mathrm{PGCD}(p,q))^2}{12pq}.}$$