Espaces préhilbertiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 *** I Polynômes de Legendre

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |\ )$.
   (b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer l'orthonormalisée de Schmidt de la base canonique de E.

Correction ▼ [005772]

Exercice 2 *** I

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n. Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E.
   (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E,φ).

Correction ▼ [005773]

Exercice 3 ** I Polynômes de Tchebychev

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P,Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n-ème polynôme de Tchebychev de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

Correction ▼ [005774]

Exercice 4 ** I

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-à-dire les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Pour $(u,v) \in E^2$, on pose $\varphi(u,v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Correction ▼ [005775]

Exercice 5 * I

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\mathrm{Tr}({}^tA \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est-ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼ [005776]

Exercice 6 ****

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\|\ \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼ [005777]

Exercice 7 **

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, ..., e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E, on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$. Montrer que la famille $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée de E.

Correction ▼ [005778]

Exercice 8 ***

Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P,Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t)\,dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n, $\deg(P_n) = n$.

3. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n, $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Correction ▼ [005779]

Exercice 9 *** I Matrices et déterminants de Gram

Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, ..., x_n)$ dans E^n, on pose $G(x_1, ..., x_n) = \left(x_i|x_j\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice de Gram) puis $\gamma(x_1, ..., x_n) = \det(G(x_1, ..., x_n))$ (déterminant de Gram).

1. Montrer que $\mathrm{rg}(G(x_1, ..., x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, ..., x_n)$.

2. Montrer que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) = 0$ et que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\gamma(x_1, ..., x_n) > 0$.

3. On suppose que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est libre dans E. On pose $F = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x,F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$). Montrer que $d(x,F) = \sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}}$.

Correction ▼ [005780]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2-1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^{1} L_n(x)P(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n)}(x)P(x)\,dx = \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n-k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k}$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. Donc

$$(L_n|P) = -\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x)\,dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$ alors

$$\begin{aligned}(L_n|P) &= (-1)^k \left(\left[(\ell_n^{n-k-1}(x)P^{(k)}(x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx\right)\\ &= (-1)^{k+1}\int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^{1} (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x)\,dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^{1} \ell_n(x)P^{(n)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n P^{(n)}(x)\,dx/\text{quad}(*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n=0$ et on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}[X], (L_n|P) = \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n P^{(n)}(x)\,dx.}$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{La famille } (L_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X],\ |\ ).}$$

(b) On applique maintenant la formule $(*)$ dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)^n L_n^{(n)}(x)\,dx = 2\times(2n)!\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = 2\times(2n)!\int_{\pi/2}^{0}(1-\cos^2 t)^n(-\sin t)\,dt\\ &= 2\times(2n)!\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}t\,dt = 2\times(2n)!W_{2n+1}\ \text{(intégrales de Wallis)}.\end{aligned}$$

On sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}W_{2n-1} = \frac{(2n)\times(2n-2)\times\ldots\times 2}{(2n+1)\times(2n-1)\times\ldots\times 3}W_1 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n}n!^2}{(2n+1)!}\times 2\times(2n)! = \frac{2^{2n+1}n!^2}{2n+1},$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}\frac{2^n n!}{2n+1}.}$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}L_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X],\ |\ )$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.

2. La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n, $n\in\mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{Vect}(P_0,...,P_n)=\text{Vect}(1,X,...,X^n)$ et de plus, pour $n\in\mathbb{N}$

$$P_n|X^n=\frac{1}{\text{dom}}\left((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n\right)=\frac{1}{\text{dom}(P_n)}\left(P_n|P_n\right)$$

car $P_n\in(P_0,\dots,P_{n-1})^\perp=(1,X,\dots,X^{n-1})^\perp=(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n|X^n>0$.

L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille des polynômes de Legendre $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}\left((X^2-1)^n\right)^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t\mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\varphi(P,Q)$ existe dans $\mathbb{R}$.

   La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P,P)=0&\Rightarrow\int_0^{+\infty}P^2(t)e^{-t}\,dt=0\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P^2(t)e^{-t}=0\ \text{(fonction continue positive d'intégrale nulle)}\\&\Rightarrow\forall t\in[0,+\infty[,\ P(t)=0\Rightarrow P=0\ \text{(polynôme ayant une infinité de racines)}.\end{aligned}$$

   Ainsi, la forme φ est définie et finalement

   l'application φ est un produit scalaire sur E.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. La formule de Leibniz permet d'écrire

$$(X^ne^{-X})^{(n)}e^X=\left(\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(X^n)^{(n-k)}(e^{-X})^{(k)}\right)e^X=\sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n!}{k!}X^k.$$

   En particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(h_n)=n$ (et $\text{dom}(h_n)=(-1)^n$) et on sait que

   la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Soient $P\in E$ et $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $A>0$. Les deux fonctions $t\mapsto(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0,A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t}\,dt=\int_0^A P(t)(t^ne^{-t})^{(n)}\,dt=\left[P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\right]_0^A-\int_0^A P'(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}\,dt$$

   Maintenant, $(t^ne^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de Leibniz montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t\mapsto P(t)(t^ne^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\ dt = -\int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}\ dt.$$

De manière générale, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\ dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}\ dt.$$

En particulier, pour $k = n$ on obtient $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\ dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\ dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t}\ dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t}\ dt.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P, h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi(hn, h_k) = 0$ et on a montré que

la famille $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n) = n$ et $\mathrm{dom}(h_n) = (-1)^n$, on a $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t}\ dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\ dt = n!\Gamma(n+1) = n!^2,$$

et donc $\|h_n\| = n!$. Par suite,

la famille $\left(\frac{1}{n!}h_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1, 1[$ et $\varphi(P, Q)$ existe.

La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = 0\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[,\ \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)}\\ &\Rightarrow \forall t \in]-1, 1[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).}\end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

l'application φ est un produit scalaire sur E.

2. (a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. En posant $t = \cos\theta$, on obtient

$$\varphi(T_n,T_p)=\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\int_{\pi}^{0}\frac{T_n(\cos\theta)T_p(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\,(-\sin\theta d\theta)=\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(p\theta)\,d\theta.$$

Si de plus, $n\neq p$,

$$\varphi(T_n,T_p)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\cos((n+p)\theta)+\cos((n-p)\theta))\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}+\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p}\right]_0^{\pi}=0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\deg(T_n)=n$ et on a donc montré que

la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E,φ).

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. Quand $p=n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos(2n\theta))\,d\theta=\begin{cases}\pi \text{ si } n=0\\ \frac{\pi}{2}\text{ si } n\geqslant 1\end{cases},$$

et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \|T_n\|=\begin{cases}\sqrt{\pi}\text{ si } n=0\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}\text{ si } n\geqslant 1\end{cases}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$. La suite nulle est élément de E. Soient $(u,v)\in E^2$ et $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

$$0\leqslant(\lambda u+\mu v)^2=\lambda^2u^2+2\lambda\mu uv+\mu^2v^2\leqslant\lambda^2u^2+\lambda\mu(u^2+v^2)+\mu^2v^2=(\lambda^2+\lambda\mu)u^2+(\lambda\mu+\mu^2)v^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2+\lambda\mu)u_n^2+(\lambda\mu+\mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u+\mu v$ est de carré sommable. On a montré que

E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,.)$.

2. Soient u et v deux éléments de E. Pour tout entier naturel n,

$$|u_nv_n\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général u_nv_n est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u,v)$ existe dans $\mathbb{R}$.

La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u\in E$,

$$\varphi(u,u)=0\Rightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^2=0\Rightarrow\forall n\in\mathbb{N},\ u_n^2=0\Rightarrow u=0.$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

l'application φ est un produit scalaire sur E.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(A,B)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tA \times B) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire. L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A = iE_{1,1} \neq 0$ alors ${}^tAA = -E_{1,1}$ puis $\mathrm{Tr}({}^tAA) = -1 < 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall (x,y) \in E^2\ (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.
Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B. Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall (x,y) \in E^2,\ B(x,y) = \tfrac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Réciproquement,
Pour tout $x \in E$, $B(x,x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))2$ et donc $\forall x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$ puis $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$.
$\forall (x,y) \in E^2$, $B(y,x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x,y)$.
Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.
1) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x+y,z) + B(x-y,z) = 2B(x,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x+y,z) + B(x-y,z) &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2) \\
&= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2) - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2) \\
&= \frac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2) - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2) \text{ (par hypothèse sur } N) \\
&= \frac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x,z).
\end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall (x,z) \in E^2$, $B(2x,z) = 2B(x,z)$. Tout d'abord, $B(0,z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$ puis d'après 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Montrons que $\forall (x,y,z) \in E^3$, $B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$.

$$\begin{aligned}
B(x,z) + B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\
&= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1))} \\
&= B(x+y,z) \text{ (d'après 2))}.
\end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$.
C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.
Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$ et $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$. Alors

$$B((n+2)x,y) + B(nx,y) = B((n+2)x + nx, y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$.
5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B(nx,y) = nB(x,y)$. Le résultat est acquis pour $n \geqslant 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx,y) + B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ et donc } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x,y) \in E^2$, $B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x,y)$.

$$B(x,y) = B\left(\frac{1}{n}nx, y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x, y\right) \text{ et donc } B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x,y).$$

7) Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall (x,y) \in E^2, B(rx,y) = rB(x,y)$. Soient $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puis $r = \frac{p}{q}$.

$$B(rx,y) = B\left(\frac{p}{q}x, y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}B(x,y) = rB(x,y).$$

8) Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in E^2, B(\lambda x, y) = \lambda B(x,y)$. Soit λ un réel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une
suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite λ.
Maintenant, l'application $N : \begin{array}{ccc} (E,N) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E. Donc

$$B(\lambda x, y) = B(\lim_{n\to+\infty} r_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} B(r_n x, y) = \lim_{n\to+\infty} r_n B(x,y) = \lambda B(x,y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{B(x,x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j\geqslant 1}(e_i|e_j)^2 = 1 + \sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2$$

et donc $\sum_{j\neq i}(e_i|e_j)^2 = 0$.On en déduit que $\forall j \neq i, (e_i|e_j) = 0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i,j) tel que $i \neq j$, on a $e_i|e_j = 0$. Par suite

la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_n)$ alors $F = E$.
Soit x un vecteur de E. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F. On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\Phi(P,P) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t)\,dt = 0$$
$$\Rightarrow \forall t \in [0,1],\ f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle).}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0,1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0,1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

L'application Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

3. Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0, ..., P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n. Soient a_1,..., a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geqslant 1$. Si $p \geqslant 1$, on pose $Q = (X - a_1)...(X - a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

   Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le de gré de P_n. D'autre part , au vu de la définition de Q, la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0, 1]$, de signe constant sur $[0, 1]$, d(intégrale nulle sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $F = \text{Vect}(x_1, ..., x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ dans la base $\mathcal{B}$ .M est une matrice rectangulaire de format (m, n).

   Soit $(i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$. Puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, le coefficient ligne i, colonne j de la matrice ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^{m} m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

   et on a donc

$$G(x_1, x_2, ..., x_n) = {}^tMM.$$

   Puisque $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et ${}^tMM$ ont même noyau.

   Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

   Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1, ..., x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n))$.

$$\text{rg}(G(x_1, x_2, ..., x_n)) = \text{rg}(x_1, \ldots, x_n).$$

2. D'après 1),

$$(x_1, ..., x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, ..., x_n) <\Leftrightarrow \text{rg}G(x_1, x_2, ..., x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, ..., x_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = 0.$$

   De plus, quand la famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, ..., x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(x_1,...,x_n) \text{ liée} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\dots,x_n)=0\\ (x_1,...,x_n) \text{ libre} \Leftrightarrow \gamma(x_1,\dots,x_n)>0.\end{array}}$$

3. **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F. Dans la première colonne de $\gamma(x,x_1,\dots,x_n)$, le théorème de Pythagore permet d'écrire (puisque $x-p_F(x)\in F^\perp$)

$$\begin{pmatrix}(x|x)\\(x|x_1)\\\vdots\\(x|x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)+p_F(x)\|^2\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(x-p_F(x)+p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)\|^2\\(p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\|x-p_F(x)\|^2\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(p_F(x)|p_F(x))\\(p_F(x)|x_1)\\\vdots\\(p_F(x)|x_n)\end{pmatrix}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)+\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)=0$. Il reste $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x\in E,\ \gamma(x,x_1,\dots,x_n)=\gamma(x-p_F(x),x_1,x_2,...,x_n)=\|x-p_F(x)\|^2\gamma(x_1,x_2,...,x_n).$$

Finalement

$$\boxed{\|x-p_F(x)\|=\sqrt{\frac{\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)}{\gamma(x_1,x_2,...,x_n)}}.}$$

2ème solution. Posons $p_F(x)=\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i$ puis $d=\|x-p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2=(x-p_F(x))|(x-p_F(x))=(x-p_F(x))|x=\|x\|^2-(x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i\in[\![1,n]\!]$, $x|x_i=(x-p_F(x)|x_I)+(p_F(x)|x_i)=(p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n+1$ réels d^2, λ_1,..., λ_n sont solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{cases}d^2+ & \lambda_1(x|x_1)+\dots+\lambda_n(x|x_n)=\|x\|^2\\ & \lambda_1(x_1|x_1)+\dots+\lambda_n(x_1|x_n)=(x|x_1)\\ & \qquad\vdots\\ & \lambda_1(x_n|x_1)+\dots+\lambda_n(x_n|x_n)=(x|x_n)\end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1,x_2,...,x_n)>0$ et le système est de Cramer. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x,x_1,x_2,...,x_n)$ et les formules de Cramer refournissent

$$d^2=\frac{\gamma(x,x_1,...,x_n)}{\gamma(x_1,...,x_n)}.$$