Déterminants

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $b_{i,j} = (-1)^{i+j}a_{i,j}$. Calculer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

Correction ▼ [005635]

Exercice 2 ***I

On définit par blocs une matrice A par $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où A, B et C sont des matrices carrées de formats respectifs n, p et q avec $p+q=n$. Montrer que $\det(A) = \det(B)\times\det(C)$.

Correction ▼ [005636]

Exercice 3 ***I Déterminants de Vandermonde

Soient $x_0,...,x_{n-1}$ n nombres complexes. Calculer $\text{Van}(x_0,...,x_{n-1}) = \det(x_{j-1}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction ▼ [005637]

Exercice 4 ****I Déterminant de Cauchy

Soient $a_1,...,a_n$, $b_1,...,b_n$ $2n$ nombres complexes tels que toutes les sommes a_i+b_j, $1\leqslant i,j\leqslant n$, soient non nulles. Calculer $C_n = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Cas particulier : $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $a_i=b_i=i$ (déterminant de Hilbert).

Correction ▼ [005638]

Exercice 5 **

Résoudre le système $MX=U$ où $M=(j^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in M_n(\mathbb{R})$, $U=(\delta_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n}\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ et X est un vecteur colonne inconnu.

Correction ▼ [005639]

Exercice 6 **

Calculer $\det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_1,...,a_n$ sont n réels donnés ($n\geqslant 2$).

Correction ▼ [005640]

Exercice 7 **

Calculer $\det(a_i+b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_1,...,a_n,b_1,\ldots,b_n$ sont $2n$ nombres complexes donnés.

Correction ▼ [005641]

Exercice 8 **

Calculer $\det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où a est un complexe donné.

Correction ▼ [005642]

Exercice 9 ****

Soient $x_1, \dots, x_n$ des entiers naturels tels que $x_1 < \cdots < x_n$. À l'aide du calcul de $\det(C_{x_j}^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, montrer que $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{x_j - x_i}{j-i}$ est un entier naturel.

Correction ▼ [005643]

Exercice 10 **** Déterminants circulants

Soient a_0,...,a_{n-1} n nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ddots & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \det A$. Pour cela, on calculera d'abord $A\Omega$ où $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$ avec $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Correction ▼ [005644]

Exercice 11 **I

1. Soient $a_{i,j}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, n^2 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $d = \det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer d'.
2. Application : calculer $d_n(x) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$.

Correction ▼ [005645]

Exercice 12 ***

Soient A et B deux matrices carrées réelles de format n. Montrer que le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ de format $2n$ est un réel positif.

Correction ▼ [005646]

Exercice 13 ***

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de format n. Montrer que si C et D commutent et si D est inversible alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$. Montrer que le résultat persiste si D n'est pas inversible.

Correction ▼ [005647]

Exercice 14 ***

Soit A une matrice carrée complexe de format n ($n \geqslant 2$) telle que pour tout élément M de $M_n(\mathbb{C})$, on ait $\det(A + M) = \det A + \det M$. Montrer que $A = 0$.

Correction ▼ [005648]

Exercice 15 **I

Soient a_0, ... , a_{n-1} n nombres complexes et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$. Calculer $\det(A - xI_n)$.

Correction ▼ [005649]

Exercice 16 **

Calculer les déterminants suivants :

1. $\det A$ où $A \in M_{2n}(\mathbb{K})$ est telle que $a_{i,i} = a$ et $a_{i,2n+1-i} = b$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & & \dots & 1 \\ \vdots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$

4. (I) $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$ $(n \geqslant 2)$.

Correction ▼ [005650]

Correction de l'exercice 1 ▲

1ère solution.

$$\begin{aligned}\det B &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1),1}\dots b_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(-1)^{1+2+\dots+n+\sigma(1)+\dots+\sigma(n)}a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)(-1)^{2(1+2+\dots+n)}a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}\\ &= \det A.\end{aligned}$$

2ème solution. On multiplie les lignes numéros 2, 4,... de B par -1 puis les colonnes numéros 2, 4,... de la matrice obtenue par -1. On obtient la matrice A qui se déduit donc de la matrice B par multiplication des lignes ou des colonnes par un nombre pair de -1 (puisqu'il y a autant de lignes portant un numéro pair que de colonnes portant un numéro pair). Par suite, $\det(B) = \det(A)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soient $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p & \to & \mathbb{K}\\ (C_1,\dots,C_p) & \mapsto & \det\begin{pmatrix}X & D\\ 0 & C\end{pmatrix}\end{array}$ où $X = (C_1\dots C_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

φ est linéaire par rapport à chacune des colonnes $C_1,\dots,C_p$.

Si il existe $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $C_i = C_j$, alors $\varphi(C_1,\dots,C_p) = 0$.

Ainsi, φ est une forme p-linéaire alternée sur l'espace $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ qui est de dimension p. On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda\ \det_{\mathcal{B}_0}$ (où $\det_{\mathcal{B}_0}$ désigne la forme déterminant dans la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) ou encore il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de $(C_1,\dots,C_p)$ tel que $\forall (C_1,\dots,C_p) \in (\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}))^p$, $f(C_1,\dots,C_p) = \lambda\ \det_{\mathcal{B}_0}(C_1,\dots,C_p)$ ou enfin il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ indépendant de X tel que $\forall X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix}X & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \lambda\ \det(X)$. Pour $X = I_p$, on obtient $\lambda = \det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & C\end{pmatrix}$ et donc

$$\forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & C\end{pmatrix}.$$

De même, l'application $Y \mapsto \det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & Y\end{pmatrix}$ est une forme q-linéaire alternée des lignes de Y et donc il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $\forall Y \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$, $\det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & Y\end{pmatrix} = \mu\ \det(Y)$ puis $Y = I_q$ fournit $\mu = \det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & I_q\end{pmatrix}$ et donc

$$\begin{gathered}\forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}), \forall C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K}), \forall D \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\\ \det\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C)\times\det\begin{pmatrix}I_p & D\\ 0 & I_q\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C),\end{gathered}$$

(en supposant acquise la valeur d'un déterminant triangulaire qui peut s'obtenir en revenant à la définition d'un déterminant et indépendamment de tout calcul par blocs).

$$\boxed{\forall (B,C,D) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_q(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}),\ \det\begin{pmatrix}B & D\\ 0 & C\end{pmatrix} = \det(B)\times\det(C).}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note $L_0, L_1,\dots,L_n$ les lignes du déterminant $\mathrm{Van}(x_0,\dots,x_n)$

A la ligne numéro n du déterminant $\mathrm{Van}(x_0,\dots,x_n)$, on ajoute une combinaison linéaire des lignes précédentes du type $L_n \leftarrow L_n + \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i L_i$. La valeur du déterminant n'a pas changé mais sa dernière ligne s'écrit maintenant

$(P(x_0),...,P(x_n))$ où P est un polynôme unitaire de degré n. On choisit alors pour P (le choix des λ_i équivaut au choix de P) le polynôme $P = \prod_{i=0}^{n-1}(X - x_i)$ (qui est bien unitaire de degré n). La dernière ligne s'écrit alors $(0,...,0,P(x_{n+1}))$ et en développant ce déterminant suivant cette dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{Van}(x_0,\dots,x_n) = P(x_n)\mathrm{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}) = \prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)\mathrm{Van}(x_0,\dots,x_{n-1}).$$

En tenant compte de $\mathrm{Van}(x_0) = 1$, on obtient donc par récurrence

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n,\ \mathrm{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j - x_i).}$$

En particulier, $\mathrm{Van}(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n-1} \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 4 ▲

Si deux des a_i sont égaux ou deux des b_j sont égaux, C_n est nul car C_n a soit deux lignes identiques, soit deux colonnes identiques.
On suppose dorénavant que les a_i sont deux à deux distincts de même que les b_j (et toujours que les sommes $a_i + b_j$ sont toutes non nulles).
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $L_1,\dots,L_{n+1}$ les lignes de C_{n+1}.
On effectue sur C_{n+1} la transformation $L_{n+1} \leftarrow \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i L_i$ avec $\lambda_{n+1} \neq 0$.
On obtient $C_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}}D_{n+1}$ où D_{n+1} est le déterminant obtenu en remplaçant la dernière ligne de C_{n+1} par la ligne $(R(b_1),...,R(b_{n+1}))$ avec $R = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{X+a_i}$. On prend $R = \frac{(X-b_1)...(X-b_n)}{(X+a_1)...(X+a_{n+1})}$.
Puisque les $-a_i$ sont distincts des b_j, R est irréductible.
Puisque les a_i sont deux à deux distincts, les pôles de R sont simples.
Puisque $\deg((X-b_1)...(X-b_n)) < \deg((X+a_1)...(X+a_{n+1}))$, la partie entière de R est nulle.
R admet donc effectivement une décomposition en éléments simples de la forme $R = \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\lambda_i}{X+a_i}$ où $\lambda_{n+1} \neq 0$.
Avec ce choix des λ_i, la dernière ligne de D_{n+1} s'écrit $(0,...,0,R(b_{n+1}))$ et en développant D_{n+1} suivant sa dernière ligne, on obtient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+1}}R(b_{n+1})C_n.$$

Calculons λ_{n+1}. Puisque $-a_{n+1}$ est un pôle simple de R,

$$\lambda_{n+1} = \lim x \to -a_{n+1}(x + a_{n+1})R(x) = \frac{(-a_{n+1}-b_1)...(-a_{n+1}-b_n)}{(-a_{n+1}+a_1)...(-a_{n+1}+a_n)} = \frac{(a_{n+1}+b_1)...(a_{n+1}+b_n)}{(a_{n+1}-a_1)...(a_{n+1}-a_n)}.$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}}R(b_{n+1}) = \frac{(a_{n+1}-a_1)...(a_{n+1}-a_n)}{(a_{n+1}+b_1)...(a_{n+1}+b_n)}\frac{(b_{n+1}-b_1)...(b_{n+1}-b_n)}{(b_{n+1}+a_1)...(b_{n+1}+a_n)}$$

puis la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ C_{n+1} = \frac{\prod_{i=1}^{n}(a_{n+1}-a_i)\prod_{i=1}^{n}(b_{n+1}-b_i)}{\prod_{i=n+1 \text{ ou } j=n+1}(a_i+b_j)}C_n.$$

En tenant compte de $C_1 = \frac{1}{a_1+b_1}$, on obtient par récurrence

$$\boxed{\det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)} = \frac{\mathrm{Van}(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\times\mathrm{Van}(b_j)_{1\leqslant j\leqslant n}}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.}$$

(y compris dans les cas particuliers analysés en début d'exercice).
Calcul du déterminant de Hilbert. On est dans le cas particulier où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$. D'abord

$$\mathrm{Van}(1,...,n) = \prod_{j=2}^{n}\left(\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\right) = \prod_{j=2}^{n}(j-1)! = \prod_{j=1}^{n-1}i!.$$

Puis $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)=\prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}(i+j)\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(i+n)!}{i!}=$ et donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ H_n=\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}i!\right)^4}{n!^2\prod_{i=1}^{2n}i!}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Le déterminant du système est $\Delta=\mathrm{Van}(1,\dots,n)\neq 0$. Le système proposé est donc un système de Cramer. Les formules de Cramer donnent : $\forall j\in[\![1,n]\!],\ x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}$ où

$$\Delta_j=\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & & j-1 & 0 & j+1 & & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & 0 & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j+1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & j-1 & j+1 & \dots & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & (j-1)^{n-1} & (j+1)^{n-1} & \dots & n^{n-1}\end{vmatrix}\ \text{(en développant suivant la } j\text{-ème colonne)}$$

$$=(-1)^{j+1}1\dots(j-1)(j+1)\dots n\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & & j-1 & j+1 & & n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \dots & (j-1)^{n-2} & (j+1)^{n-2} & \dots & n^{n-2}\end{vmatrix}\ \text{(par } n-\text{linéarité)}$$

$$=(-1)^{j+1}\frac{n!}{j}\mathrm{Van}(1,\dots,(j-1),(j+1),\dots,n)=(-1)^{j+1}\frac{n!}{j}\frac{\mathrm{Van}(1,\dots,n)}{(j-1)\dots(j-(j-1))((j+1)-j)\dots(n-j)}$$

$$=(-1)^{j+1}\frac{n!}{j!(n-j)!}\mathrm{Van}(1,\dots,n)=(-1)^{j+1}\binom{n}{j}\mathrm{Van}(1,\dots,n).$$

Finalement,

$$\boxed{\forall j\in[\![1,n]\!],\ x_j=(-1)^{j+1}\binom{n}{j}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

On note $C_1,\dots,C_n$ les colonnes du déterminant de l'énoncé puis on pose $C=(\cos(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $S=(\sin(a_i))_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $Cj=\sin(a_j)C+\cos(a_j)S$. Ainsi, les colonnes de la matrice proposée sont dans $\mathrm{Vect}(C,S)$ qui est un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n\geqslant 3,\ \det(\sin(a_i+a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}=0.}$$

Si $n=2$, on a $\begin{vmatrix} \sin(2a_1) & \sin(a_1+a_2) \\ \sin(a_1+a_2) & \sin(2a_2) \end{vmatrix} = \sin(2a_1)\sin(2a_2) - \sin^2(a_1+a_2)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soient les vecteurs colonnes $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U = (1)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = A + b_j U$. Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus deux et donc,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 3,\ \det(a_i+b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Si $n=2$, on a $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_1+b_2)(a_2+b_1) = a_1b_2 + a_2b_1 - a_1b_1 - a_2b_2 = (a_2-a_1)(b_1-b_2)$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$C_j = ((a+i+j)^2)_{1\leqslant i\leqslant n} = j^2(1)_{1\leqslant i\leqslant n} + 2(a+j)(i)_{1\leqslant i\leqslant n} + (i^2)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Les colonnes de la matrice proposée sont dans un espace de dimension au plus trois et donc,

$$\boxed{\text{si } n \geqslant 4,\ \det((a+i+j)^2)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = 0.}$$

Le calcul est aisé pour $n \in \{1,2,3\}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

$\frac{x_j-x_i}{j-i}$ est déjà un rationnel strictement positif.
Posons $P_i = 1$ si $i=1$, et si $i \geqslant 2$, $P_i = \frac{X(X-1)\ldots(X-(i-2))}{(i-1)!}$.
Puisque, pour $i \in [\![1,n]\!]$, $\deg(P_i) = i-1$, on sait que la famille $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. De plus, pour $i \geqslant 2$, $P_i - \frac{X^{i-1}}{(i-1)!}$ est de degré $i-2$ et est donc combinaison linéaire de P_1, P_2,..., P_{i-2} ou encore, pour $2 \leqslant i \leqslant n$, la ligne numéro i du déterminant $\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est somme de la ligne $\left(\frac{x_j^{i-1}}{(i-1)!}\right)_{1\leqslant j\leqslant n}$ et d'une combinaison linéaire des lignes qui la précède. En partant de la dernière ligne et en remontant jusqu'à la deuxième, on retranche la combinaison linéaire correspondante des lignes précedentes sans changer la valeur du déterminant. On obtient par linéarité par rapport à chaque ligne

$$\det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (i-1)!}\mathrm{Van}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(j-i)}.$$

Finalement,

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_j-x_i}{j-i} = \det\left(C_{x_j}^{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathbb{N}^*.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, de la matrice A vaut a_{k-j} avec la convention : si $-(n-1) \leqslant u \leqslant -1$, $a_u = a_{n+u}$.
Le coefficient ligne j, colonne k, $(j,k) \in [\![1,n]\!]^2$, de la matrice $A\Omega$ vaut

$$\sum_{u=1}^{n} a_{u-j}\omega^{(u-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} = \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)} + \sum_{v=0}^{n-j} a_v\omega^{(v+j-1)(k-1)}$$
$$= \sum_{v=-(j-1)}^{-1} a_{v+n}\omega^{(v+n+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} \text{ (car } a_{v+n} = a_v \text{ et } \omega^n = 1)$$
$$= \sum_{u=n-j+1}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} + \sum_{u=0}^{n-j} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)} = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{(u+j-1)(k-1)}$$
$$= \omega^{(j-1)(k-1)} \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.$$

Pour $k \in [\![1, n]\!]$, posons $S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}$. Le coefficient ligne j, colonne k de $A\Omega$ vaut donc $\omega^{(j-1)(k-1)}S_k$. Par passage au détereminant, on en déduit que :

$$\det(A\Omega) = \det\left(\omega^{(j-1)(k-1)}S_k\right)_{1\leqslant j,k\leqslant n} = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)\det(\omega^{(j-1)(k-1)})_{1\leqslant j,k\leqslant n}$$

(S_k est en facteur de la colonne k) ou encore $(\det A)(\det\Omega) = \left(\prod_{k=1}^{n} S_k\right)(\det\Omega)$. Enfin, Ω est la matrice de Vandermonde des racines n-èmes de l'unité et est donc inversible puisque celles-ci sont deux à deux distinctes. Par suite $\det\Omega \neq 0$ et après simplification on obtient

$$\boxed{\det A = \prod_{k=1}^{n} S_k \text{ où } S_k = \sum_{u=0}^{n-1} a_u\omega^{u(k-1)}.}$$

Par exemple, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = S_1S_2S_3 = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ où $j = e^{2i\pi/3}$.
Un calcul bien plus simple sera fourni dans la planche Réduction .

Correction de l'exercice 11 ▲

1. $d = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et de plus

$$d' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1}...a_{\sigma(n),n})' = \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(i),i}\ldots a_{\sigma(n),n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}...a'_{\sigma(i),i}\ldots$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \det(C_1, ..., C'_i, ..., C_n) \text{ (où } C_1, ..., C_n \text{ sont les colonnes de la matrice).}$$

2. **1 ère solution.** D'après ce qui précède, la fonction d_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $n \geqslant 2$ et x réel, on a

$$d_n'(x) = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots & & & & \\ & & \ddots & x+1 & 0 & \vdots & & & \\ \vdots & & & 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & \vdots & 0 & x+1 & \ddots & & \\ & & & & \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix} \text{ (la colonne particulière est la colonne } i\text{)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d_{n-1}(x) \text{ (en développant le } i\text{-ème déterminant par rapport à sa } i\text{-ème colonne)}$$

$$= n d_{n-1}(x).$$

En résumé, $\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = n d_{n-1}(x)$. D'autre part $\forall x \in \mathbb{R}, d_1(x) = x+1$ et $\forall n \geqslant 2, d_n(0) = 0$ (déterminant ayant deux colonnes identiques).

Montrons alors par récurrence que $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = x^n + n x^{n-1}$.

C'est vrai pour $n = 1$.

Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = x^n + n x^{n-1}$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$d_{n+1}(x) = d_{n+1}(0) + \int_0^x d_{n+1}'(t)\, dt = (n+1) \int_0^x d_n(t\, dt) = x^{n+1} + (n+1)x^n.$$

On a montré que

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}, d_n(x) = x^n + n x^{n-1}.}$$

2 ème solution. d_n est clairement un polynôme de degré n unitaire. Pour $n \geqslant 2$, puisque dn(0) = 0 et que $d_n' = n d_{n-1}$, 0 est racine de d_n, d_n', ..., $d_n^{(n-2)}$ et est donc racine d'ordre $n-1$ au moins de d_n. Enfin, $d_n(-n) = 0$ car la somme des colonnes du déterminant obtenu est nulle. Finalement $\forall n \geqslant 2, \forall x \in \mathbb{R}$, $d_n(x) = x^{n-1}(x+n)$ ce qui reste vrai pour $n = 1$.

Une variante peut être obtenue avec des connaissances sur la réduction.

Correction de l'exercice 12 ▲

On effectue sur la matrice $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ les transformations : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + iC_{n+j}$ (où $i^2 = -1$) sans modifier la valeur du déterminant. On obtient $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix}$.
Puis en effectuant les transformations : $\forall j \in [\![n+1, 2n]\!]$, $L_j \leftarrow L_j - iL_{j-n}$, on obtient

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} = \det(A + iB) \times \det(A - iB).$$

Comme les matrices A et B sont réelles, $\det(A - iB) = \overline{\det(A + iB)}$ et donc

$$\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = |\det(A + iB)|^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Si D est inversible, un calcul par blocs fournit

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ CD-DC & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ (car } C \text{ et } D \text{ commutent)}$$

et donc, puisque

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}\right) &= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \det D \times \det D^{-1} \\ &= \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et que $\det\begin{pmatrix} AD-BC & BD^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$, on a bien $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC)$ (si C et D commutent).

Si D n'est pas inversible, $\det(D-xI)$ est un polynôme en x de degré n et donc ne s'annule qu'un nombre fini de fois. Par suite, la matrice $D-xI$ est inversible sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de x. D'autre part, pour toute valeur de x, les matrices C et $D-xI$ commutent et d'après ce qui précède, pour toutes valeurs de x sauf peut-être pour un nombre fini, on a

$$\text{detdet}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A(D-xI)-BC).$$

Ces deux expressions sont encore des polynômes en x qui coïncident donc en une infinité de valeurs de x et sont donc égaux. Ces deux polynômes prennent en particulier la même valeur en 0 et on a montré que

$$\text{si } C \text{ et } D \text{ commutent, } \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD-BC).$$

Correction de l'exercice 14 ▲

$A=0$ convient.

Réciproquement, on a tout d'abord $\det(A+A) = \det A + \det A$ ou encore $(2^n-2)\det A = 0$ et, puique $n \geqslant 2$, $\det A = 0$. Donc,

$$A \notin GL_n(\mathbb{K}) \text{ et } A \text{ vérifie : } \forall M \in M_n(\mathbb{K}), \det(A+M) = \det M.$$

Supposons $A \neq 0$. Il existe donc une colonne $C_j \neq 0$.

La colonne $-C_j$ n'est pas nulle et d'après le théorème de la base incomplète, on peut construire une matrice M inversible dont la j-ème colonne est $-C_j$. Puisque M est inversible, $\det M \neq 0$ et puisque la j-ème colonne de la matrice $A+M$ est nulle, $\det(A+M)=0$. Pour cette matrice M, on a $\det(A+M) \neq \det A + \det M$ et A n'est pas solution du problème. Finalement

$$\boxed{(\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \det(A+M) = \det A + \det M)/lra A = 0.}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

En développant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\det(A-xI_n)=\begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -x & a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_n-x \end{vmatrix} = (-x)^n(a_n-x)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k\Delta_k$$

où $\Delta_k = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & \times & \dots & \dots & \times \\ \times & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & \vdots \\ \times & \dots & \times & -x & \times & \dots & \dots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-x)^k 1^{n-k} = (-x)^k$ (déterminant par blocs)

Finalement,

$$\det(A-xI_n) = (-x)^n(a_n-x)+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k+1}a_k(-x)^k = (-1)^{n+1}\left(x^{n+1}-\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\right).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Sans modifier la valeur de $\det A$, on effectue les transformations :$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j \leftarrow C_j + C_{2n+1-j}$.

   On obtient alors par linéarité du déterminant par rapport à chacune des n premières colonnes

$$\det A = (a+b)^p \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

   On effectue ensuite les transformations : $\forall i \in [\![n+1,2n]\!]$, $L_i \leftarrow L_i - L_{2n+1-i}$ et par linéarité du déterminant par rapport aux n dernières lignes, on obtient

$$\det A = (a+b)^n(a-b)^n = (a^2-b^2)^n.$$

2. Ce déterminant a deux colonnes égales et est donc nul.

3. On retranche la première colonne à toutes les autres et on obtient un déterminant triangulaire : $D_n = (-1)^{n-1}$.

   Pour le deuxième déterminant, on ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $n-1$ en facteur de la première colonne et on retombe sur le déterminant précédent. On obtient : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)$.

4. On ajoute les $n-1$ dernières colonnes à la première puis on met $a+(n-1)b$ en facteur de la première colonne. On obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & a & \ddots & & \vdots \\ & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

On retranche ensuite la première ligne à toutes les autres et on obtient

$$D_n = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.}$$