# Dualité

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

**Exercice 1** **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application $\varphi_a$ par : $\forall P \in E,\ \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \ldots, \varphi_{a_n})$ est une base de $E^*$ et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des $\lambda_i$ sous la forme d'une intégrale.

Correction ▼ [005629]

**Exercice 2** **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de $E^*$ et trouver la base dont elle est la duale.

Correction ▼ [005630]

**Exercice 3** **

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\varphi$ et $\psi$ deux formes linéaires sur $E$. On suppose que pour tout $x$ de $E$, on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Correction ▼ [005631]

**Exercice 4** ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1$,..., $\varphi_n$ et $\varphi$ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie. Montrer que : $\left(\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \ \varphi = \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi\right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan $P$ contenant $D$ : $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$ et le vecteur $u = (1,1,1)$ ?

Correction ▼ [005632]

**Exercice 5** ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi_1$,..., $\varphi_n$ $n$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace $E$ de dimension $n$.
Montrer que la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est liée si et seulement s'il existe un vecteur $x$ non nul tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(x) = 0$.

Correction ▼ [005633]

**Exercice 6** **

Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{array}{l} f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 = x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 = x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 = x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{array} \quad ?$$

Correction ▼ [005634]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc, $\varphi_a$ est une forme linéaire sur $E$.

2. On a déjà $\text{card}\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre.

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $P_k = \prod_{j\neq k} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Chaque $P_k$ est un élément de $E$ et de plus

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \neq k \\ 0 \text{ si } j = k \end{cases} \quad (*).$$

Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0 \Rightarrow \forall P \in E,\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,k} = 0$$
$$\Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre et donc une base de $E^*$. Les égalités $(*)$ montrent alors que la préduale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de $E^*$ est la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

3. Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\ dt$. $\varphi$ est une forme linéaire sur $E$ et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $E^*$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in E$, $\int_0^1 P(t)\ dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$ (les $\lambda_j$ étant indépendants de $P$).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme $P_k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t)\ dt = \int_0^1 \prod_{j\neq k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j}\ dt$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j\neq k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j}\ dt.}$$

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

Les quatre applications $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\psi_1$ et $\psi_2$ sont effectivement des formes linéaires sur $E$.
Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. On note $(P_0, P_1, P_2, P_3)$ cette future base.
On doit avoir $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$ et $\psi_1(P_2) = 1$. Ainsi, $P_2$ s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1) = 0$. Donc $P_2$ admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque $P_2$ est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante $a$ telle que $P_2 = aX(X-1)^2 = aX^3 - 2aX^2 + aX$ puis $P_2'(0) = 1$ fournit $a = 1$ puis $P_2 = X(X-1)^2$.
De même, il existe une constante $a$ telle que $P_3 = aX^2(X-1) = aX^3 - aX^2$ et $1 = P_3'(1) = 3a - 2a$ fournit $P_3 = X^2(X-1)$.
$P_0$ admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que $P_0 = (aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0) = 1$ et $P_0'(0) = 0$ fournissent $b = 1$ et $a - 2b = 0$. Par suite, $P_0 = (2X+1)(X-1)^2$.
$P_1$ admet 0 pour racine double et il existe deux constantes $a$ et $b$ telles que $P_1 = (aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1) = 1$ et $P_1'(1) = 0$ fournissent $a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$ et donc $P_1 = (-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0 = (2X+1)(X-1)^2,\ P_1 = (-2X+3)X^2,\ P_2 = X(X-1)^2 \text{ et } P_3 = X^2(X-1).}$$

Montrons alors que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $E^*$. Cette famille est libre car si $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\psi_1 + d\psi_2 = 0$, on obtient en appliquant successivement à $P_0$, $P_1$, $P_2$ et $P_3$, $a = b = c = d = 0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une famille libre de $E^*$ de cardinal 4et donc une base de $E^*$. Sa préduale est $(P_0, P_1, P_2, P_3)$.

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

**1 ère solution.** On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi = 0 \Rightarrow \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \text{Ker}\psi \subset \text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \text{ ou } \text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

**2ème solution.** Supposons que $\varphi\psi = 0$ et qu'il existe $x$ et $y$ tels que $\varphi(x) \neq 0$ (et donc $\psi(x) = 0$) et $\psi(y) \neq 0$ (et donc $\varphi(y) = 0$). Alors $0 = \varphi(x+y)\psi(x+y) = (\varphi(x) + \varphi(y))(\psi(x) + \psi(y)) = \varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall (\varphi, \psi) \in (E^*)^2,\ (\forall x \in E,\ \varphi(x)\psi(x) = 0) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.}$$

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

1. Soit $\varphi \in E^*$.

   $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$.

   Soit $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 + \ldots + 0 = 0$ et donc $x \in \text{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi$.

   $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de $E^*$ en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \ldots, \varphi_p)$ de $E^*$ et on note $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$.

   Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ un élément de $E$.

   $$x \in \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{n+1}, \ldots, e_p)$$

   (avec la convention usuelle $\text{Vect}(\varnothing) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i = \text{Vect}(e_{n+1}, \ldots, e_p)$.

   Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\varphi_i$.

   $$\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \text{Vect}(e_{n+1}, \ldots, e_p) \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in [\![n+1, p]\!],\ \varphi(e_j) = 0$$

   $$\Rightarrow \forall j \in [\![n+1, p]\!],\ \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\varphi_i.$$

   Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est libre.

Si tous les $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i = E$ puis $\text{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, $\varphi$ est combinaison linéaire des $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Si les $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ génératrice de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^{m} \text{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, étant combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$, chaque $\text{Ker}\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m} \text{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m} \text{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i$. Finalement, $\bigcap_{k=1}^{m} \text{Ker}\varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^{n} \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, $\varphi$ est combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ et donc des $\varphi_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P = \text{Ker}\varphi$ (en particulier $\varphi$ n'est pas nulle). Soient $\varphi_1$ la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ et $\varphi_2$ la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 2x + 3z$. Alors la famille $(\varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D = \text{Ker}\varphi_1 \cap \text{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \ \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de $P$ est donc $5(x + y + z) - 3(2x + 3z) = 0$ ou encore $-x + 5y - 4z = 0$.

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Soit $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) \end{array}$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

Si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, c'est une base de $E^*$ (car $\dim(E^*) = n$). Notons $(u_1, \dots, u_n)$ sa préduale et notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $f(u_i) = e_i$. Ainsi, l'image par $f$ d'une base de $E$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que $f$ est un isomorphisme. En particulier, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Si les $\varphi_i$ sont tous nuls, tout vecteur non nul $x$ annule chaque $\varphi_i$. Supposons alors que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée et que les $\varphi_i$ ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ (avec $1 \leqslant m < n$) de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \dots, \psi_{n-m})$ de $E^*$. On note $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en $e_n$ et donc chaque $\varphi_i$ s'annule en $e_n$ puisque chaque $\varphi_i$ est combinaison linéaire des $\varphi_{i_k}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Le vecteur $e_n$ est donc un vecteur non nul $x$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

La matrice de la famille $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$.

La matrice $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (pour $2 \leqslant j \leqslant 3$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$) puis que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$)

Si $m = 0$, $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A) = 3$.

Si $m \neq 0$, $A$ a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ $(C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3)$ puis que la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ $(C_4 \leftarrow 2C_4 + (m-2)C_3)$

Donc, si $m = 4$, $\text{rg}(A) = 3$ et si $m$ n'est ni 0 ni 4, $\text{rg}(A) = 4$.

Si $m \notin \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 4$ et si $m \in \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3$.

---