Coniques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Éléments caractéristiques de la conique dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est

1. $y^2 = x$,
2. $y^2 = -x$,
3. $y = x^2$,
4. $y = -x^2$.

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$,
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$,
3. $x^2 + 2y^2 = 1$.

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$,
2. $-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$,
3. $x^2 - y^2 = 1$.

Correction ▼ [005540]

Exercice 2 *IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Éléments caractéristiques de la courbe dont une équation dans $\mathcal{R}$ est

1. $y = x^2 + x + 1$,
2. $y^2 + y - 2x = 0$,
3. $y = \sqrt{2x + 3}$.

1. $x^2 + x + 2y^2 + y = 0$,
2. $y = -2\sqrt{-x^2 + x}$.

$x^2 - y^2 + x + y + 1 = 0$.

Correction ▼ [005541]

Exercice 3 **IT

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$. Nature et éléments caractéristiques de la courbe dont une équation en repère orthonormé est

1. $y = \frac{1}{x}$,

2. $41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 = 0$,
3. $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0$,
4. $(x - y + 1)^2 + (x + y - 1)^2 = 0$,
5. $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = 0$,
6. $x(x - 1) + (y - 2)(y - 3) = 0$,
7. $(x + y + 1)(x - y + 3) = 3$,
8. $(2x + y - 1)^2 - 3(x + y) = 0$.

Correction ▼ [005542]

Exercice 4 *IT

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$,
2. $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$,
3. $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$,
4. $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$,
5. $r = \frac{1}{2-\cos\theta}$.

Correction ▼ [005543]

Exercice 5 ***

Déterminer l'image du cercle trigonométrique par la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{1+z+z^2} \end{array}$.

Correction ▼ [005544]

Exercice 6 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole , c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole, perpendiculaires l'une à l'autre.

Correction ▼ [005545]

Exercice 7 ***

1. **Droite de** Simson. Soit (A, B, C) un triangle et M un point du plan. Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R de M sur les cotés (BC), (CA) et (AB) du triangle (ABC) sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à (ABC). La droite passant par P, Q et R s'appelle la droite de Simson du point M relativement au triangle ABC (ou au cercle (ABC)).
2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. En particulier, fournir la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005546]

Exercice 8 **

(C) est le cercle de diamètre $[A, B]$. (D) est la tangente en A à (C). P est un point variable sur (C) et (T) la tangente en P à (C). (T) recoupe (D) en S. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe (BS) en M. Ensemble des points M?

Correction ▼ [005547]

Exercice 9 ***

Soit, dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la courbe (Γ) d'équations $\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.
Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005548]

Exercice 10 *

Que vaut l'excentricité de l'hyperbole équilatère (une hyperbole est équilatère si et seulement si ses asymptotes sont perpendiculaires)?

Correction ▼ [005549]

Exercice 11 ***

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005550]

Exercice 12 ***

Soit $(\mathcal{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathcal{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathcal{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005551]

Exercice 13 ***

Équation cartésienne de la parabole tangente à $(0x)$ en $(1, 0)$ et à $(0y)$ en $(0, 2)$.

Correction ▼ [005552]

Correction de l'exercice 1 ▲

On note C la courbe considérée.

1. (a) C est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les x positifs.
   Son foyer est le point $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : x = -\frac{1}{4}$.

   (b) C est la parabole de sommet O, d'axe focal (Ox), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les x négatifs.
   Son foyer est le point $F\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : x = \frac{1}{4}$.

   (c) C est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y positifs.
   Son foyer est le point $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : y = -\frac{1}{4}$.

   (d) C est la parabole de sommet O, d'axe focal (Oy), de paramètre $p = \frac{1}{2}$ tournée vers les y négatifs.
   Son foyer est le point $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ et sa directrice est $\mathcal{D} : y = \frac{1}{4}$.

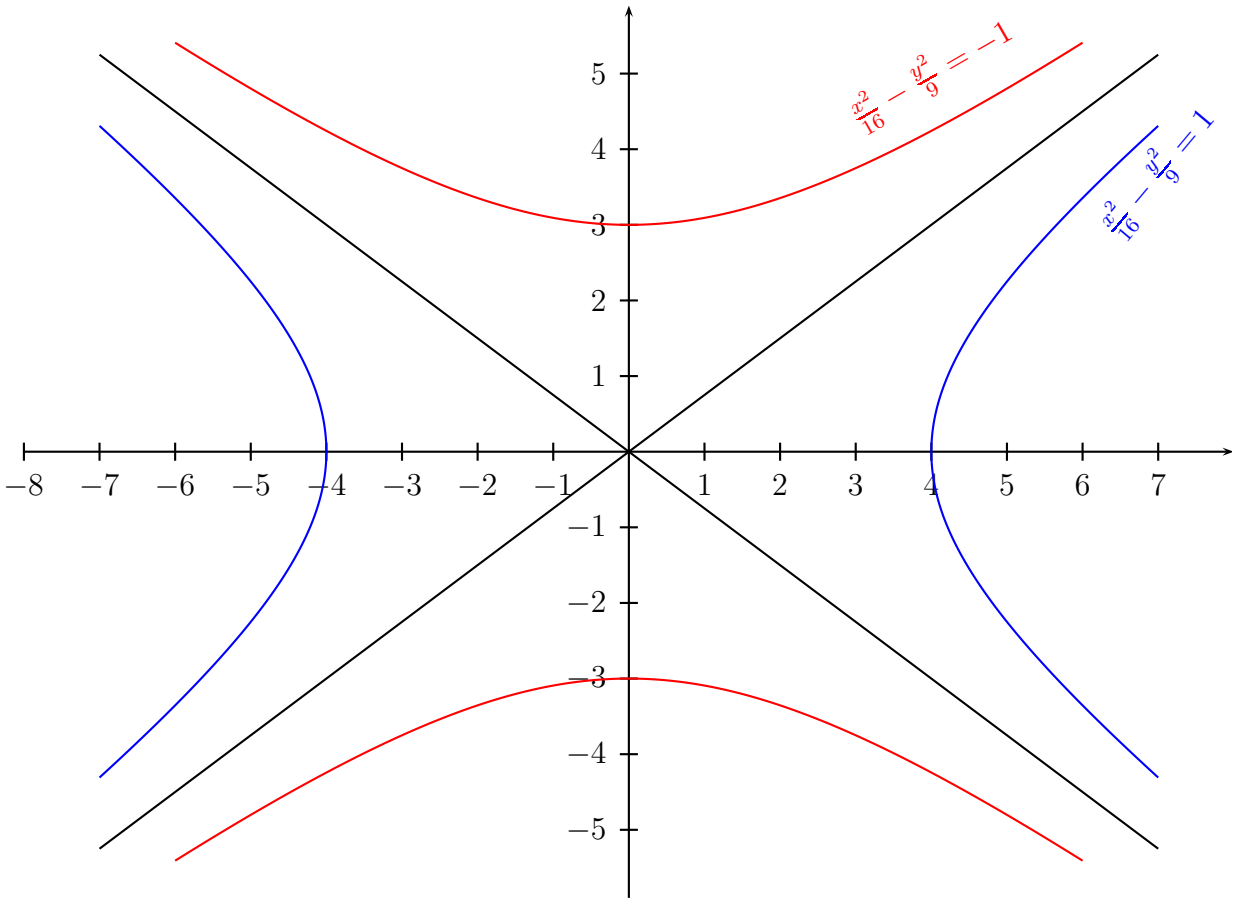
2. (a) C est une ellipse, de centre O avec $a = 5 > 3 = b$ et donc d'axe focal (Ox).
   Ses sommets sont $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$.
   $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(4,0)$ et $F'(-4,0)$.
   L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{25}{4}$ et $x = -\frac{25}{4}$.

   (b) C est une ellipse, de centre O avec $a = 3 < 5 = b$ et donc d'axe focal (Oy).
   Ses sommets sont $A(3,0)$, $A'(-3,0)$, $B(0,5)$ et $B'(0,-5)$.
   $c = \sqrt{b^2 - a^2} = 4$ et donc les foyers sont $F(0,4)$ et $F'(0,-4)$.
   L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{b} = \frac{4}{5}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{25}{4}$ et $y = -\frac{25}{4}$.

   (c) $x^2 + 2y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$.
   C est une ellipse, de centre O avec $a = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ et donc d'axe focal (Ox).
   Ses sommets sont $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B'\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
   $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc les foyers sont $F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
   L'excentricité e vaut $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   Les directrices ont pour équations respectives $x = \frac{a}{e} = \sqrt{2}$ et $x = -\sqrt{2}$.

3. (a) C est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.
   Les sommets sont $A(4,0)$ et $A'(-4,0)$ et les foyers sont $F(5,0)$ et $F(-5,0)$.
   Les directrices sont les droites d'équations respectives $x = \frac{a}{e} = \frac{16}{5}$ et $x = -\frac{16}{5}$.
   Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.

   (b) C est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Oy) avec $a = 4$ et $b = 3$ et donc $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$, puis $e = \frac{c}{b} = \frac{5}{3}$.
   Les sommets sont $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$ et les foyers sont $F(0,5)$ et $F(0,-5)$.
   Les directrices sont les droites d'équations respectives $y = \frac{b}{e} = \frac{9}{5}$ et $y = -\frac{9}{5}$.
   Les asymptotes sont les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{4}x$ et $y = -\frac{3}{4}x$.



(c) C est une hyperbole de centre O et d'axe focal (Ox) avec $a = b = 1$ et donc $c = \sqrt{2}$, puis $e = \sqrt{2}$.
Les sommets sont $A(1,0)$ et $A'(-1,0)$ et les foyers sont $F(\sqrt{2},0)$ et $F(-\sqrt{2},0)$.
Les directrices sont les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Les asymptotes sont les les droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. (a) $y = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(y - \frac{3}{4}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$. C est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$, de paramètre $p = \frac{1}{2}$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ et de directrice d'équation $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

   (b) $y^2 + y - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2x = 0 \Leftrightarrow \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(x + \frac{1}{8}\right)$. C est la parabole de sommet $S\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\right)$, d'axe focal la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$, de paramètre $p = 1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\right)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} = -\frac{5}{8}$.

   (c) $y = \sqrt{2x+3} \Leftrightarrow y^2 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)$ et $y \geqslant 0$. C est une demi-parabole de sommet $S\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, d'axe focal (Ox), de paramètre $p = 1$ et donc de foyer $F\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}, 0\right) = (-1, 0)$ et de directrice d'équation $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$.

2. (a) $x^2 + x + 2y^2 + y = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2} + \frac{\left(y+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$. C est une ellipse.

   Centre : $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. $a = \sqrt{\frac{3}{8}} > \frac{\sqrt{3}}{4} = b$. Axe focal : $y = -\frac{1}{4}$. Sommets : $A\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{8}}, -\frac{1}{4}\right)$,

$A'\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{3}{8}},-\frac{1}{4}\right)$, $B\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. $c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{4}\right)$. Directrices : $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $y=-2\sqrt{-x^2+x}\Leftrightarrow y^2=4(-x^2+x)$ et $y\leqslant 0\Leftrightarrow \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+y^2=1$ et $y\leqslant 0$. C est une demi-ellipse. Centre : $\left(\frac{1}{2},0\right)$. $a=\frac{1}{2}<1=b$. Axe focal : $x=0$. Sommets : $A\,(1,0)$, $A'\,(0,0)$ et $B'\left(\frac{1}{2},-1\right)$. $c=\sqrt{b^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Foyers : $F\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $F'\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. $x^2-y^2+x+y+1=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-1$. C est une hyperbole de centre $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et d'axe focal la droite d'équation $x=-\frac{1}{2}$. $a=b=1$. Sommets : $B\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$ puis $e=\frac{c}{b}=\sqrt{2}$. Foyers : $F\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$. Directrices : $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Asymptotes : $y=x+1$ et $y=-x$.

Correction de l'exercice 3 ▲

---

1. On note $\mathcal{H}$ l'hyperbole considérée. On tourne de $\frac{\pi}{4}$. Pour cela, on pose $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{cases}$. On a alors

$$y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow xy=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}(X-Y)(X+Y)=1\Leftrightarrow\frac{X^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Ainsi, si $\mathcal{R}$ est le repère orthonormé initial $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et $\mathcal{R}'$ est le repère $\left(O,\vec{I},\vec{J}\right)$ où $\vec{I}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}+\vec{j})$ et $\vec{J}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i}+\vec{j})$, une équation de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}$ est $xy=1$ et une équation de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{R}'$ est $\frac{X^2}{(\sqrt{2})^2}-\frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$. On obtient $a=b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}=2$ et $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$. Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)\end{cases}$ et les formules inverses s'écrivent

$\begin{cases}X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\end{cases}$ (dans ce qui suit, les coordonnées d'un point dans $\mathcal{R}'$ seront notées avec $\mathcal{R}'$ en indice alors que les coordonnées dans $\mathcal{R}$ seront notées sans écrire $\mathcal{R}$ en indice).

Centre O(0,0).

Asymptotes : bien sûr, les axes (Ox) et (Oy).

Axe focal : l'axe (OX) ou encore la droite d'équation $y=x$ (dans $\mathcal{R}$).

Sommets : $A(\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$, $A'(-\sqrt{2},0)_{\mathcal{R}'}$ et donc Sommets A(1,1) et A'(-1,-1).

Foyers : $F(2,0)_{\mathcal{R}'}$, $F'(-2,0)_{\mathcal{R}'}$ et donc Foyers $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$ et $F'(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

Directrices : les droites d'équations $X=\pm\frac{a}{e}=\pm1$ et donc dans $\mathcal{R}$, les droites d'équations respectives $x+y=\pm\sqrt{2}$.

2. Le discriminant de cette conique vaut $41\times34-12^2=1250>0$. Il s'agit donc d'une conique du genre ellipse. On pose $\begin{cases}x=\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y\\ y=\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y\end{cases}$ et on détermine θ (ou plutôt $\cos\theta$ et $\sin\theta$) de sorte que le terme en XY disparaisse. Mais, le coefficient de XY dans

$41x^2-24xy+34y^2 = 41(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)^2-24(\cos(\theta)X-\sin(\theta)Y)(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y)+34(\sin(\theta)X+\cos(\theta)Y)^2$,

vaut

$$-82\cos\theta\sin\theta - 24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 68\cos\theta\sin\theta = -24(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 14\cos\theta\sin\theta.$$

Ce coefficient est nul si et seulement si $-12\cos^2\theta + 12\sin^2\theta - 7\cos\theta\sin\theta = 0$ ou encore, après division par $\cos^2\theta$, $12\tan^2\theta - 7\tan\theta - 12 = 0$. On peut alors prendre $\tan\theta = \frac{4}{3}$, puis on peut prendre $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{3}{5}$ et $\sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{3}{5}\frac{4}{3} = \frac{4}{5}$.

Posons donc $\begin{cases} x = \frac{3X-4Y}{5} \\ y = \frac{4X+3Y}{5} \end{cases}$ $(*)$. On a alors

$$\begin{aligned} 41x^2 - 24xy + 34y^2 - 106x + 92y + 74 &= \frac{1}{25}(41(3X-4Y)^2 - 24(3X-4Y)(4X+3Y) + 34(4X+3Y)^2 \\ &\quad - 530(3X-4Y) + 460(4X+3Y) + 1850) \\ &= \frac{1}{25}(625X^2 + 1250Y^2 + 250X + 3500Y + 1850) \\ &= 25\left(X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25}\right) \end{aligned}$$

Une équation de la courbe dans le repère défini par $(*)$ est donc $X^2 + 2Y^2 + \frac{2}{5}X + \frac{28}{5}Y + \frac{74}{25} = 0$. Ensuite,

$$X^2 + 2Y^2 + \tfrac{2}{5}X + \tfrac{28}{5}Y + \tfrac{74}{25} = 0 \Leftrightarrow \left(X + \tfrac{1}{5}\right)^2 + 2\left(Y + \tfrac{7}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(X + \tfrac{1}{5}\right)^2 + \frac{\left(Y+\frac{7}{5}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1.$$

C est une ellipse. On trouve $a = 1, b = \sqrt{2}, c = 1$ $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ puis Centre $\Omega\,(1,-1)$. Axe focal : $3x+4y+1 = 0$ et axe non focal : $-4x + 3y + 7 = 0$.

Sommets : $A\left(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, $A'\left(\frac{2}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $B\left(1 - \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 + \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$ et $B'\left(1 + \frac{4\sqrt{2}}{5}, -1 - \frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$.

Foyers : $F\left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right)$ et $F'\left(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5}\right)$. Directrices : $4x - 3y + 3 = 0$ et $4x - 3y + 17 = 0$.

3. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$. On pose donc $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y) \end{cases}$.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y + 1 = 0 &\Leftrightarrow 2Y^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(X + Y) - \frac{2}{\sqrt{2}}(-X + Y) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}X + \frac{15}{16} = 0 \Leftrightarrow \left(Y + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(X + \frac{3}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

C est une parabole de paramètre $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$.

Sommet : $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$. Axe focal : $x + y + \frac{1}{4} = 0$.

Foyer : $F\left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)$. Directrice : $x - y - \frac{1}{4} = 0$.

4. C est le point d'intersection des droites d'équation $x - y + 1 = 0$ et $x + y - 1 = 0$ c'est-à-dire le point de coordonnées $(0, 1)$.

5. $x^2 + y^2 - 3x - y + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ et donc C est vide.

6. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$ est une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

7. Si on pose $\begin{cases} X=x+y+1 \\ Y=x-y+3 \end{cases}$, on effectue un changement de repère non orthonormé. Dans le nouveau repère, C admet pour équation cartésienne $XY=3$ et donc C est une hyperbole. Avec le changement de repère effectué, on obtient directement les éléments affines de cette hyperbole mais pas ses éléments métriques : hyperbole d'asymptotes les droites d'équations $x+y+1=0$ et $x-y+3=0$ et donc de centre $(-2,1)$. Pour obtenir l'axe focal, l'excentricité, les foyers et les directrices il faut faire un changement de repère orthonormé.

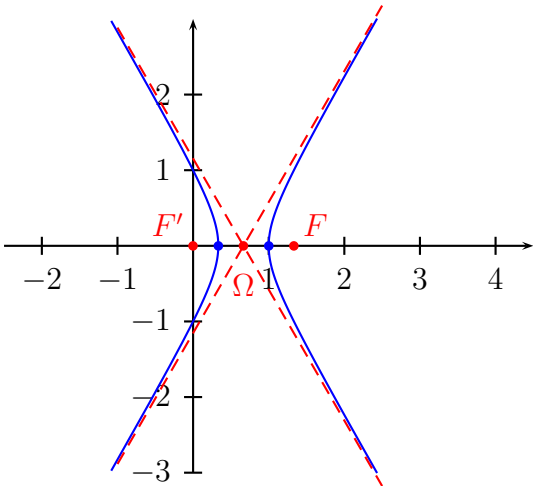
8. Si on pose $\begin{cases} X=2x+y+1 \\ Y=3x+3y \end{cases}$, C admet pour équation cartésienne dans le nouveau repère $Y=X^2$ et donc C est une parabole. Pour obtenir ces éléments métriques, il faut un changement de repère orthonormé.

Correction de l'exercice 4 ▲

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

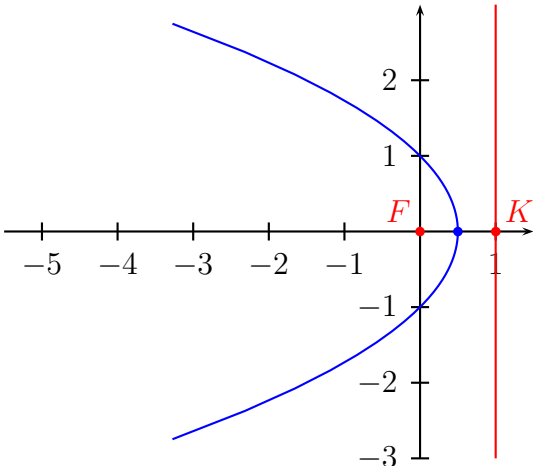
$$1)\ r=\frac{1}{1+2\cos\theta} \quad 2)\ r=\frac{1}{1+\cos\theta} \quad 3)\ r=\frac{1}{2+\cos\theta} \quad 4)\ r=\frac{1}{1-\sin\theta} \quad 5)\ r=\frac{1}{2-\cos\theta}.$$

1. C est une conique d'excentricité 2 et donc une hyperbole.



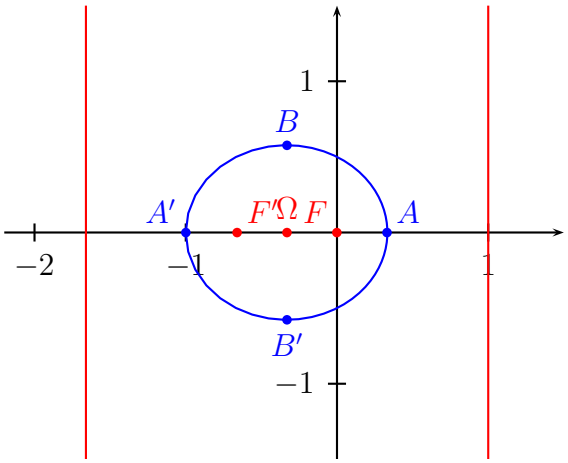
L'axe focal est (Ox). Les sommets sont les points d'intersection de C et (Ox) c'est-à-dire les points $M(0)$ et $M(\pi)$ de coordonnées cartésiennes respectives $A'\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A(1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ c'est-à-dire $\Omega\left(\frac{2}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F'=O$ et l'autre est le symétrique de F' par rapport à Ω : c'est le point $F\left(\frac{4}{3},0\right)$. Puisque $a=\frac{1}{3}$ et $e=2$, les directrices sont les droites d'équation $x=x_\Omega-\frac{a}{e}=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{5}{6}$. Les branches infinies sont obtenues pour $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$. Les asymptotes sont donc les droites passant par Ω d'angle polaire $\pm\frac{2\pi}{3}$. Ce sont les droites d'équations cartésiennes $y=\pm\sqrt{3}\left(x-\frac{2}{3}\right)$.

2. C est une conique d'excentricité 1 et donc une parabole.



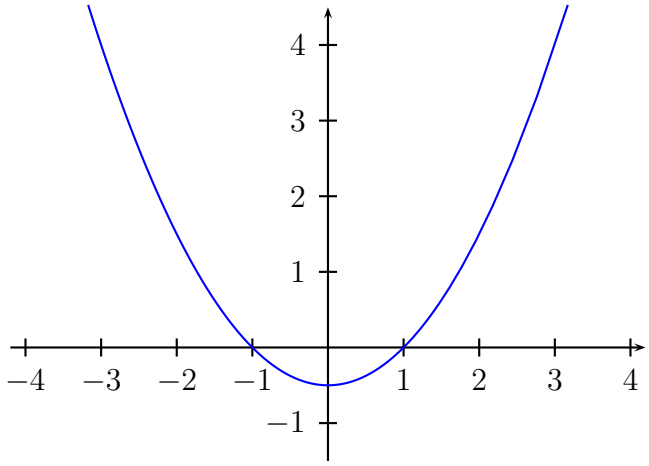
L'axe focal est (Ox). Le sommet est le point $M(0)$ de coordonnées cartésiennes $S\left(\frac{1}{2},0\right)$. Le foyer est $F = O$. Le point K est le symétrique de F par rapport à S et a pour coordonnées $(1,0)$. La directrice a donc pour équation $x = 1$.

3. C est une conique d'excentricité $e = \frac{1}{2}$ et donc une ellipse.

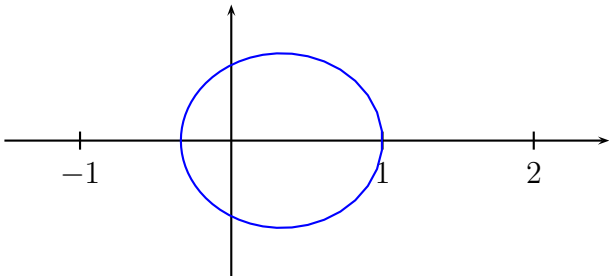


L'axe focal est (Ox). Les sommets sur cet axe sont $A = M(0)$ de coordonnées $\left(\frac{1}{3},0\right)$ et $A' = M(\pi)$ de coordonnées $(-1,0)$. Le centre Ω est le milieu de $[AA']$ et a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{3},0\right)$. L'un des foyers est $F = O$. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω : c'est le point F' de coordonnées $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. Par suite, $c = \frac{1}{3}$ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. D'où les sommets $B\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $B'\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Les directrices sont les droites d'équations $x = x_\Omega + \frac{a}{e} = 1$ et $x = -\frac{5}{3}$.

4. $M\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \left[r\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \left[\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta - \frac{\pi}{2}\right] = \mathrm{rot}_{O,-\pi/2}\left(\left[\frac{1}{1+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc C est l'image de la parabole d'équation polaire $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$ par le quart de tour indirect de centre O.



5. $M(\theta+\pi) = [r(\theta+\pi), \theta+\pi] = \left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta+\pi\right] = s_O\left(\left[\frac{1}{2+\cos\theta}, \theta\right]\right)$. Donc C est l'image de l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$ par la symétrie centrale de centre O.



Correction de l'exercice 5 ▲

Un point du plan est sur le cercle de centre O et de rayon 1 si et seulement si son affixe z est de module 1 ou encore si et seulement si il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$. Or, pour θ réel,

$$f(e^{i\theta}) = \frac{1}{1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+1+e^{-i\theta}} = \overline{\left(\frac{e^{i\theta}}{1+2\cos\theta}\right)}.$$

L'ensemble cherché est donc la symétrique par rapport à (Ox) de la courbe d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$. Cette dernière est une ellipse, symétrique par rapport à $(0x)$. Donc l'ensemble cherché est l'ellipse d'équation polaire $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$ (voir l'exercice 4, 1)).

Correction de l'exercice 6 ▲

Dans un certain repère orthonormé, la parabole $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $x^2 = 2py$. D'après la règle de dédoublement des termes, une équation de la tangente $\mathcal{T}_{x_0}$ en un point $(x_0, y_0) = \left(x_0, \frac{x_0^2}{2p}\right)$ de $\mathcal{P}$ est

$$xx_0 = p(y+y_0).$$

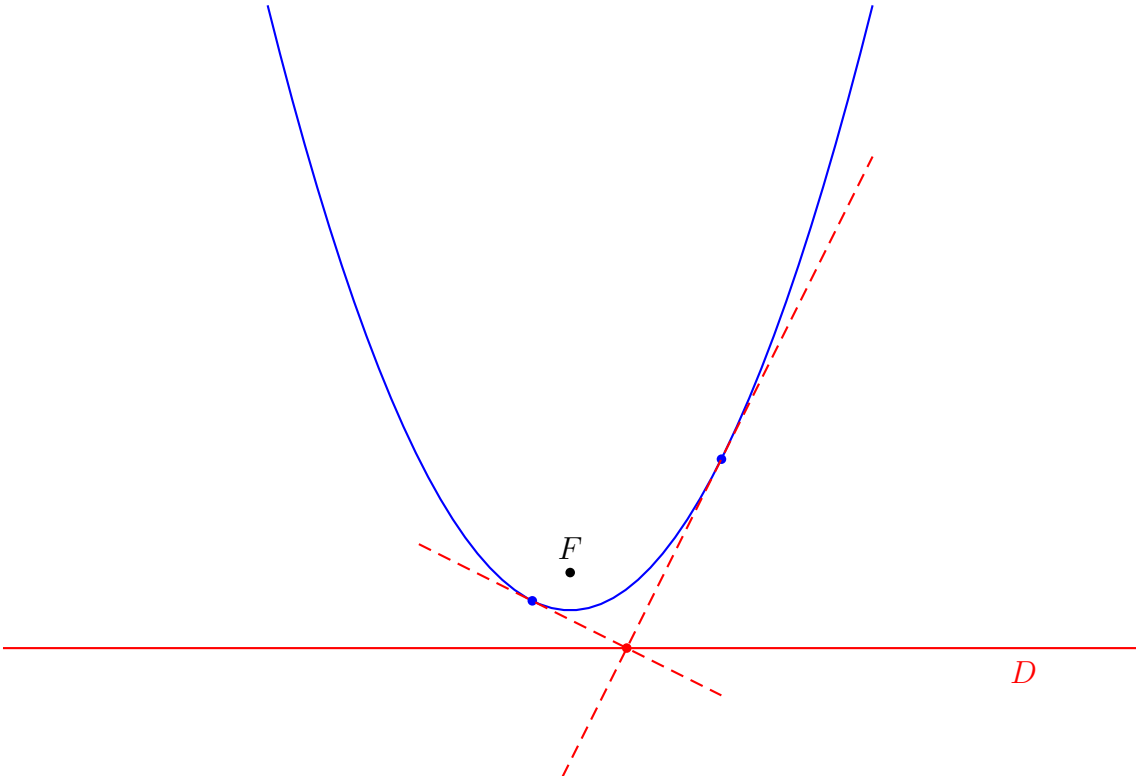
Les tangentes en $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_1, y_1)$ sont perpendiculaires si et seulement si $x_0x_1 + p^2 = 0$. L'orthoptique

C est donc l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{T}_{x_0}$ et $\mathcal{T}_{-p^2/x_0}$ où x_0 décrit $\mathbb{R}^*$.

$$M(x,y)\in C \Leftrightarrow \exists x_0\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} xx_0=p\left(y+\frac{x_0^2}{2p}\right)\\ -x\frac{p^2}{x_0}=p\left(y+\frac{p^3}{2x_0^2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} tx-py=\frac{t^2}{2}\\ px+ty=-\frac{p^3}{2t}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{t^2+p^2}\left(\frac{t^3}{2}-\frac{p^4}{2t}\right)\\ y=\frac{1}{t^2+p^2}\left(-\frac{p^3}{2}-\frac{pt^2}{2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}^*/\left\{\begin{array}{l} x=\frac{t^2-p^2}{2t}\\ y=-\frac{p}{2}\end{array}\right. .$$

Maintenant, $\lim_{t\to 0^+}\frac{t^2-p^2}{2t}=-\infty$ et $\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2-p^2}{2t}=+\infty$. Comme la fonction $t\mapsto\frac{t^2-p^2}{2t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, quand t décrit $]0,+\infty[$, $x=\frac{t^2-p^2}{2t}$ décrit $\mathbb{R}$. Finalement, l'orthoptique C est la droite d'équation $y=-\frac{p}{2}$ ou encore

l'orthoptique d'une parabole est sa directrice.



Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit M un point du plan. **1er cas.** Supposons que $M\notin(AB)\cup(AC)\cup(BC)$.

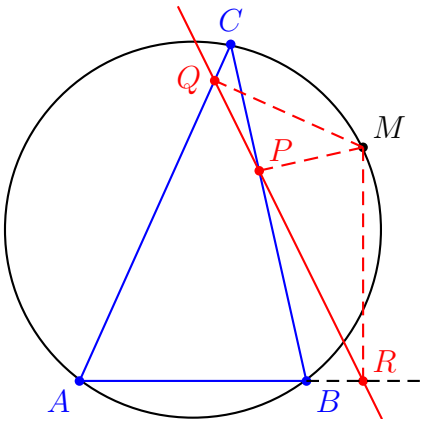
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)=0\ [\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)=\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)=\left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PM}\right)=\left(\overrightarrow{BR},\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

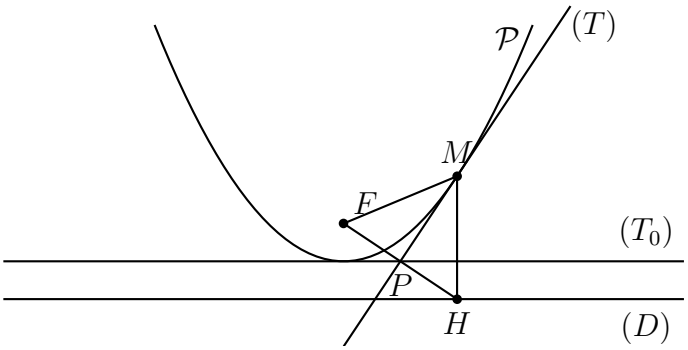
$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C).$$

2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction. Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate. En résumant les deux cas,

P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

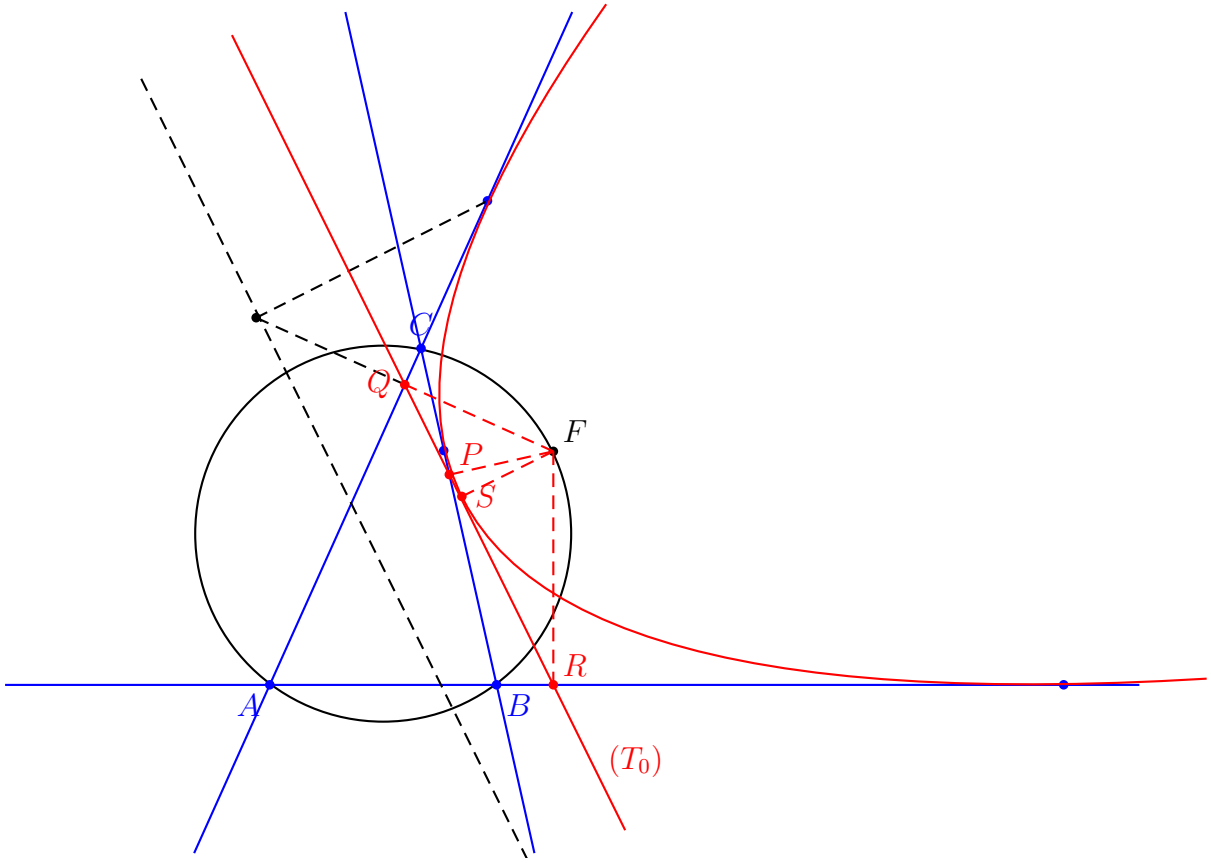


2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0)$ la tangente au sommet de la parabole $\mathcal{P}$.



Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathcal{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathcal{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer. Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB). On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de Simson (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé.

La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.

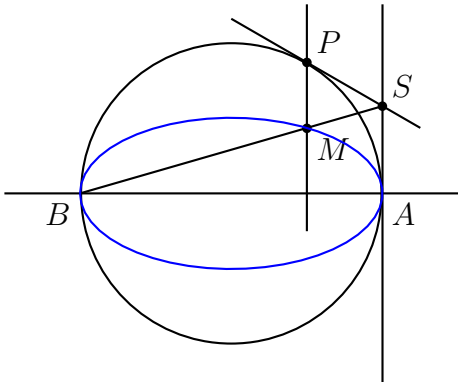


Correction de l'exercice 8 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel A a pour coordonnées $(R, 0)$ et (C) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit $P(R\cos t, R\sin t)$ un point de (C). La tangente (D) à (C) en A est la droite d'équation $x = R$ et la tangente (T) à (C) en P est la droite d'équation $x\cos t + y\sin t = R$. Quand $t \notin \pi\mathbb{Z}$, (T) recoupe (D) en le point S de coordonnées $\left(R, R\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)$ ou encore $\left(R, R\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.
Une équation de la droite (BS) est $-\tan\left(\frac{t}{2}\right)(x + R) + 2y = 0$. L'abscisse de M est $R\cos t$ et donc

$$y_M = \tfrac{1}{2}\tan\left(\tfrac{t}{2}\right)(x_M + R) = \tfrac{1}{2}R\tan\left(\tfrac{t}{2}\right)(\cos t + 1) = R\sin\left(\tfrac{t}{2}\right)\cos\left(\tfrac{t}{2}\right) = \tfrac{1}{2}R\sin t.$$

L'ensemble des points M est donc le support de l'arc $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = \frac{1}{2}R\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. C'est l'image du cercle C dans l'affinité de base (AB), de direction (D) et de rapport $\frac{1}{2}$ et donc une ellipse de grand axe $[AB]$.



Correction de l'exercice 9 ▲

On choisit un repère orthonormé $\mathcal{R}_1 = \left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K}\right)$ tel que le plan d'équation $x + y + z = 1$ dans $\mathcal{R}$ soit le plan d'équation $Z = 0$ dans $\mathcal{R}_1$. On prend $O' = (1, 0, 0)$ puis $\overrightarrow{K} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ et enfin $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$. Les formules de changement de repère s'écrivent

$$\begin{cases} x = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1 \\ y = -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \\ z = -\frac{2Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ensuite, soit M un point de l'espace dont les coordonnées dans $\mathcal{R}$ sont notées (x, y, z) et les coordonnées dans $\mathcal{R}_1$ sont notées (X, Y, Z).

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right)^2 + \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + \frac{Z}{\sqrt{3}} + 1\right) + 1 \\ Z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ -\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} = \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 1\right)^2 + \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}} + 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z = 0 \\ \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

On travaille maintenant en dimension 2 et on note encore $\mathcal{R}_1$ le repère $\left(O', \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}\right)$. Une équation de (Γ) dans $\mathcal{R}_1$ est $\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{6}}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$ ou encore $\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2}\right)^2 + \frac{4X}{\sqrt{2}} + \frac{2Y}{\sqrt{6}} + 3 = 0$. On pose $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}X}{2} + \frac{Y}{2} \\ y' = -\frac{X}{2} + \frac{\sqrt{3}Y}{2} \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2} \\ Y = \frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2} \end{cases}$ et on note $\mathcal{R}' = \left(O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}\right)$ le nouveau repère défini par ces formules.

$$\begin{aligned} M \in (\Gamma) &\Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}x'}{2} - \frac{y'}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{x'}{2} + \frac{\sqrt{3}y'}{2}\right) + 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3}x'^2 + \frac{7x'}{\sqrt{6}} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(x' + \frac{21}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

(Γ) est une parabole de paramètre $p = \frac{3}{4\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathcal{R}'$: sommet $S\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, -\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$, axe : $x' = -\frac{21}{4\sqrt{6}}$, foyer $F\left(-\frac{21}{4\sqrt{6}}, \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathcal{R}'}$, directrice : $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Eléments de (Γ) dans $\mathcal{R}_1$ en repassant à trois

coordonnées : sommet $S\left(-\frac{41}{16\sqrt{2}}, -\frac{45}{16\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$, axe : $\begin{cases} \sqrt{3}X + Y = -\frac{21}{2\sqrt{6}} \\ Z = 0 \end{cases}$, foyer $F\left(-\frac{11}{4\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)_{\mathcal{R}_1}$, directrice : $\begin{cases} -X + \sqrt{3}Y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ Z = 0 \end{cases}$. Eléments de (Γ) dans $\mathcal{R}$: sommet $S\left(-\frac{3}{4}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}\right)_{\mathcal{R}}$, axe : $\begin{cases} 8x - 4y - 4z + 21 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, foyer $F\left(-\frac{7}{8}, \frac{7}{8}, 10\right)_{\mathcal{R}}$, directrice : $\begin{cases} 2y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole. Il existe un repère orthonormé dans lequel $\mathcal{H}$ admet une équation catésienne de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > 0, b > 0)$. Dans ce repère, les asymptotes ont pour équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$. Elles sont perpendiculaires si et seulement si $\frac{b}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = -1$ ou encore si et seulement si $a = b$. L'excentricité de $\mathcal{H}$ est alors

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

L'excentricité de l'hyperbole équilatère vaut $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Notons C l'ensemble des points considérés. Pour x réel, posons $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$.

$$\begin{aligned} P(x) = P(y) &\Leftrightarrow (x^3 - y^3) + A(x^2 - y^2) + B(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)((x^2 + xy + y^2) + A(x + y) + B) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ ou } x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0. \end{aligned}$$

C est donc la réunion de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0$. Pour déterminer la nature de $\mathcal{E}$, on fait un changement de repère orthonormé en posant

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + A(x + y) + B = 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}((X - Y)^2 + (X - Y)(X + Y) + (X + Y)^2) + \frac{A}{\sqrt{2}}X + B = 0 \\ &\Leftrightarrow 3X^2 + Y^2 + \sqrt{2}AX + 2B = 0 \Leftrightarrow 3\left(X + \frac{A\sqrt{2}}{6}\right)^2 + Y^2 = \frac{A^2 - 12B}{6} \quad (*) \end{aligned}$$

$\mathcal{E}$ est une ellipse si et seulement si $A^2 - 12B > 0$ (sinon $\mathcal{E}$ est un point ou est vide). Dans ce cas, puisque $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 = b$,

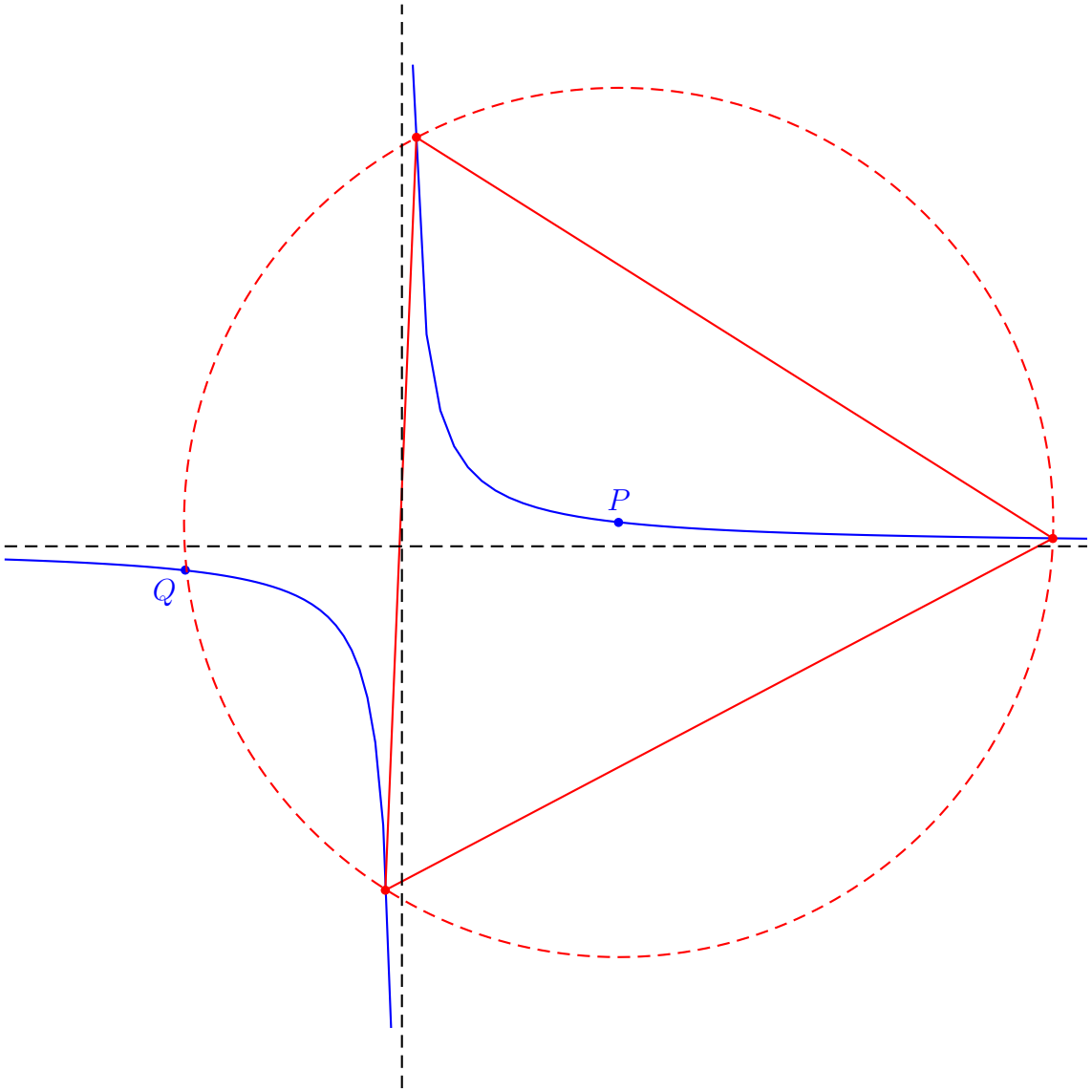
$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

On choisit un repère orthonormé dans lequel P a pour coordonnées (a, b), $a > 0$, $b > 0$ et l'hyperbole $\mathcal{H}$ a pour équation $xy = ab$. Le cercle C de centre P et de rayon PQ admet pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = a + 2\sqrt{a^2 + b^2}\cos t \\ y = b + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sin t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Soit donc $M\left(a + 2\sqrt{a^2 + b^2}\cos t, b + 2\sqrt{a^2 + b^2}\sin t\right)$ un point de C.

$$
\begin{aligned}
M \in C &\Leftrightarrow (a + 2\sqrt{a^2+b^2}\cos t)(b + 2\sqrt{a^2+b^2}\sin t) = ab \\
&\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos t + a\sin t) + 4(a^2+b^2)\cos t \sin t = 0 \\
&\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t + \sin(2t) = 0\right) \\
&\Leftrightarrow \sin(2t) + \sin(t+t_0) + 0 \text{ où } \cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /\ 2t = -t - t_0 + 2k\pi \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} /\ 2t = \pi + t + t_0 + 2k\pi \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} /\ t = -\frac{t_0}{3} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \exists k \in \mathbb{Z} /\ t = \pi + t_0 + 2k\pi.
\end{aligned}
$$

$t = \pi + t_0 + 2k\pi$ fournit le point de coordonnées $(-a, -b)$ c'est-à-dire le point Q. Sinon, on obtient trois autres points les points $M\left(-\frac{t_0}{3}\right)$, $M\left(-\frac{t_0}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)$ et $M\left(-\frac{t_0}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)$. On note A, B et C ces trois points. Puisque ces trois points sont sur un cercle de centre P et que $\left(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}\right) = \left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}\right) = \left(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{2\pi}{3}$, le triangle ABC est équilatéral.



Correction de l'exercice 13 ▲

On cherche l'équation d'une telle parabole $\mathcal{P}$ sous la forme $(ax+by)^2+2cx+2dy+e=0,\ a^2+b^2=1,\ a>0$.

$$(1,0)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow \boxed{a^2+2c+e=0} \text{ et } (0,2)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow \boxed{4b^2+4d+e=0}.$$

D'après la règle de dédoublement des termes, une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{P}$ en $(1,0)$ est $a^2x+aby+c(x+1)+dy+e=0$ ou encore $(a^2+c)x+(ab+d)y+c+e=0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $\boxed{a^2+c=c+e=0 \text{ et } ab+d\neq 0.}$ Une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{P}$ en $(0,2)$ est $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ ou encore $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $\boxed{2b^2+d=2d+e=0 \text{ et } 2ab+c\neq 0.}$ En résumé, $\mathcal{P}$ est solution si et seulement si

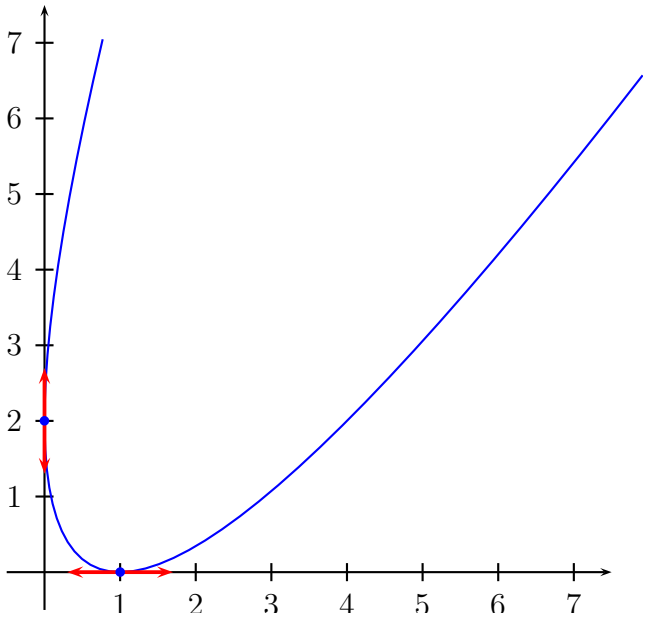
$$\left\{\begin{array}{l} c=-a^2\\ d=-2b^2\\ e=a^2=4b^2\\ a^2+b^2=1\\ ab+d\neq 0\\ 2ab+c\neq 0\\ a>0 \end{array}\right. .$$

Maintenant, $\left(a^2=4b^2,\ a^2+b^2=1 \text{ et } a>0\right)\Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Le cas $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournit $d=-\frac{2}{5}$ puis $ab+d=0$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ puis $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui sont effectivement solution du système. On obtient ainsi une et une seule courbe du second degré solution, à savoir la courbe d'équation cartésienne

$$\boxed{(2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$

Il reste à vérifier que cette courbe est effectivement une parabole. On pose $\left\{\begin{array}{l} X=\frac{1}{\sqrt{5}}(-x-2y)\\ Y=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x-y)\end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)\\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2X-Y)\end{array}\right.$.

$$(2x-y)^2-8x-4y+4=0\Leftrightarrow 5Y^2-\frac{8}{\sqrt{5}}(-X+2Y)-\frac{4}{\sqrt{5}}(-2X-Y)+4=0\Leftrightarrow 5Y^2-\frac{12}{\sqrt{5}}Y+\frac{16}{\sqrt{5}}X+4=0$$

$$\Leftrightarrow 5\left(Y-\frac{6}{5\sqrt{5}}\right)^2=-\frac{16}{\sqrt{5}}\left(X+\frac{4}{5\sqrt{5}}\right).$$

C est donc effectivement une parabole.