Géométrie analytique (affine ou euclidienne)

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne les points $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$, $C(2,1,-1)$ et $D(1,0,4)$. Déterminer l'intersection des plans (OAB) et (OCD).

Correction ▼ [005501]

Exercice 2 **T

Dans E_3 rapporté à un repère (O,i,j,k), on donne : la droite (D) dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 2+3t \\ y = -t \\ z = 1+t \end{cases}$, le plan P dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = 1+2\lambda+\mu \\ y = -1-3\lambda+2\mu \\ z = 1+\lambda \end{cases}$, le plan P' dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = -5-\nu \\ y = 3+\nu+3\eta \\ z = \nu+\eta \end{cases}$, Étudier $D \cap P$ et $P \cap P'$

Correction ▼ [005502]

Exercice 3 **T

Matrice dans la base canonique orthonormée directe de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ autour de $(1,2,2)$ qui transforme j en k.

Correction ▼ [005503]

Exercice 4 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, espace vectoriel euclidien orienté rapporté à la base orthonormée directe (i,j,k), déterminer l'image du plan d'équation $x+y=0$ par

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-y+z=0$,
2. la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $(1,1,1)$,
3. par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur $(1,1,1)$.

Correction ▼ [005504]

Exercice 5 *T

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer un repère de la droite (D) $\begin{cases} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{cases}$.

Correction ▼ [005505]

Exercice 6 *T

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer l'intersection de (D) $\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = 7 \end{cases}$ et $(P) : x+3y-5z+2=0$.

Correction ▼ [005506]

Exercice 7 **

Dans $\mathbb{R}^3$ affine, déterminer le réel a pour que les droites $\begin{cases} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{cases}$ et $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases}$ soient coplanaires, puis déterminer une équation du plan les contenant.

Correction ▼ [005507]

Exercice 8 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, équation du plan P parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0,-1,2)$ et $B(-1,2,3)$.

Correction ▼ [005508]

Exercice 9 **T

Dans $\mathbb{R}^3$, soit (D) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ et $(\Delta) : 6x=2y=3z$ puis $(P) : x+3y+2z=6$. Déterminer la projection de (D) sur (P) parallèlement à (Δ).

Correction ▼ [005509]

Exercice 10 **

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (D) $\begin{cases} x-z-a=0 \\ y+3z+1=0 \end{cases}$ et (D') $\begin{cases} x+2y+z-2b=0 \\ 3x+3y+2z-7=0 \end{cases}$. Vérifier que (D) et (D') ne sont pas parallèles puis trouver a et b pour que (D) et (D') soient sécantes. Former alors une équation cartésienne de leur plan.

Correction ▼ [005510]

Exercice 11 **

Système d'équations cartésiennes de la droite (Δ) parallèle à la droite (D): $2x=3y=6z$ et sécante aux droites (D_1): $x=z-4=0$ et (D_2): $y=z+4=0$.

Correction ▼ [005511]

Exercice 12 ***

Trouver toutes les droites sécantes aux quatre droites (D_1) $x-1=y=0$, (D_2): $y-1=z=0$, (D_3): $z-1=x=0$ et (D_4): $x=y=-6z$.

Correction ▼ [005512]

Exercice 13 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

Correction ▼ [005513]

Exercice 14 **T

Soit $M(x,y,z)$ un point de $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé. Déterminer la distance de M à la droite (D) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$. En déduire une équation du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

Correction ▼ [005514]

Exercice 15 **T

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un repère orthonormé, soient (D) $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{cases}$ et (D') $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{cases}$. Déterminer la distance de (D) à (D') puis la perpendiculaire commune à ces deux droites.

Correction ▼ [005515]

Exercice 16 **

Montrer que les plans (P_1): $z-2y=5$, (P_2): $2x-3z=0$ et (P_3) : $3y-x=0$ admettent une parallèle commune. Ils définissent ainsi un prisme. Déterminer l'aire d'une section perpendiculaire.

Correction ▼ [005516]

Exercice 17 *T

Angle entre les plans $x+2y+2z=3$ et $x+y=0$.

Correction ▼ [005517]

Exercice 18 **T

Soient (P_1) : $4x+4y-7z-1=0$ et (P_2) : $8x-4y+z+7=0$. Trouver une équation cartésienne des plans bissecteurs de (P_1) et (P_2).

Correction ▼ [005518]

Exercice 19 **T

Déterminer la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D'): $(D)\begin{cases} x+y-3z+4=0 \\ 2x-z+1=0 \end{cases}$ et $(D')\begin{cases} x=z-1 \\ y=z-1 \end{cases}$.

Correction ▼ [005519]

Exercice 20 **

Soit (D) la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y-z=0 \end{cases}$ et (P) le plan d'équation cartésienne $x+3y+2z=6$. Déterminer la projection (orthogonale) de (D) sur (P).

Correction ▼ [005520]

Exercice 21 **I

Déterminer les différents angles d'un tétraèdre régulier (entre deux faces, entre deux arêtes et entre une arête et une face).

Correction ▼ [005521]

Exercice 22 **T

Déterminer la distance de l'origine O à la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{cases}$.

Correction ▼ [005522]

Correction de l'exercice 1 ▲

$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ a pour coordonnées $(2, -3, -4)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, A et B ne sont pas alignés et le plan (OAB) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2, -3, -4)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $2x - 3y - 4z = 0$. $\overrightarrow{n}' = \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ a pour coordonnées $(4, -9, -1)$. Ce vecteur n'est pas nul. Par suite, les points O, C et D ne sont pas alignés et le plan (OCD) est bien défini. C'est le plan passant par O et de vecteur normal $\overrightarrow{n}'(4, -9, -1)$. Une équation cartésienne du plan (OAB) est donc $4x - 9y - z = 0$. $-\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{n}'$ a pour coordonnées $(33, 14, 6)$. Ce vecteur n'est pas nul et on sait que les plans (OAB) et (OCD) sont sécants en une droite, à savoir la droite passant par $O(0, 0, 0)$ et de vecteur directeur $(33, 14, 6)$. Un système d'équations cartésiennes de cette droite est $\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y - 4z = 0 \\ 4x - 9y - z = 0 \end{array} \right.$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Les vecteurs $(2, -3, 1)$ et $(1, 2, 0)$ ne sont pas colinéaires, de sorte que (P) est bien un plan. Trouvons alors une équation cartésienne de (P)

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = -1 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda = z - 1 \\ x = 1 + 2(z-1) + \mu \\ y = -1 - 3(z-1) + 2\mu \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \lambda = z - 1 \\ \mu = x - 2z + 1 \\ y = -1 - 3(z-1) + 2(x - 2z + 1) \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{aligned}$$

Soit alors $M(2 + 3t, -t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de (D)

$$M \in (P) \Leftrightarrow -2(2 + 3t) + (-t) + 7(1 + t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 0 \times t - 1 = 0.$$

Ce dernier système n'a pas de solution et donc $(D) \cap (P) = \varnothing$. La droite (D) est strictement parallèle au plan (P).

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (P) \cap (P') &\Leftrightarrow \exists (\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \\ -2x + y + 7z - 4 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\eta \\ z = \nu + \eta \\ -2(-5 - \nu) + (3 + \nu + 3\eta) + 7(\nu + \eta) - 4 = 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \exists (\nu, \eta) \in \mathbb{R}^2 / \left\{ \begin{array}{l} \eta = -\nu - \frac{9}{10} \\ x = -5 - \nu \\ y = 3 + \nu + 3\left(-\nu - \frac{9}{10}\right) \\ z = \nu + \left(-\nu - \frac{9}{10}\right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \exists \nu \in \mathbb{R} / \left\{ \begin{array}{l} x = -\nu - 5 \\ y = -2\nu + \frac{3}{10} \\ z = -\frac{9}{10} \end{array} \right. \end{aligned}$$

(P) et (P') sont donc sécants en la droite passant par le point $\left(-5, \frac{3}{10}, -\frac{9}{10}\right)$ et de vecteur directeur $(1, 2, 0)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit r la rotation cherchée. Notons u le vecteur $\frac{1}{3}(1, 2, 2)$ (u est unitaire) et θ l'angle de r. r est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire u. On sait que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^3$

$$r(v) = (\cos\theta)v + (1-\cos\theta)(v.u)u + (\sin\theta)u \wedge v \quad (*)$$

et en particulier que $[v, r(v), u] = \sin\theta\|v \wedge u\|^2$. L'égalité $r(j) = k$ fournit

$$\sin\theta\|j \wedge u\|^2 = [j, r(j), u] = [u, j, k] = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

Comme $u \wedge j = \frac{1}{3}(i+2j+2k) \wedge j = -\frac{2}{3}j + \frac{1}{3}k$, on a $\|j \wedge u\|^2 = \frac{5}{9}$ et donc $\sin\theta = \frac{3}{5}$. L'égalité $r(j) = k$ fournit ensuite

$$k = (\cos\theta)j + (1-\cos\theta) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}(i+2j+2k) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(i+2j+2k) \wedge j$$

En analysant la composante en i, on en déduit que $\frac{2}{9}(1-\cos\theta) - \frac{2}{5} = 0$ et donc $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout vecteur $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, l'égalité $(*)$ s'écrit

$$\begin{aligned} r(v) &= -\frac{4}{5}(x,y,z) + \frac{9}{5} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}(x+2y+2z)(1,2,2) + \frac{3}{5} \times \frac{1}{3}(2z-2y, 2x-z, -2x+y) \\ &= \frac{1}{5}(-4x + (x+2y+2z) + (2z-2y), -4y + 2(x+2y+2z) + (2x-z), -4z + 2(x+2y+2z) + (-2x+y)) \\ &= \frac{1}{5}(-3x+4z, 4x+3z, 5y) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice cherchée est

$$\boxed{\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons P le plan d'équation $x + y = 0$ dans la base $\mathcal{B} = (i, j, k)$. P est le plan de vecteur normal $n = i + j$.

1. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P' d'équation $x - y + z = 0$. $s(P)$ est le plan de vecteur normal $s(n)$. Or, le vecteur n est dans P' et donc $s(n) = n$ puis $s(P) = P$.

   $\boxed{s(P) \text{ est le plan } P.}$

2. Notons σ la symétrie orthogonale par rapport au vecteur $u = (1,1,1)$. $\sigma(P)$ est le plan de vecteur normal

   $$\sigma(n) = 2\frac{n.u}{\|u\|^2}u - n = 2\frac{2}{3}(1,1,1) - (1,1,0) = \frac{1}{3}(1,1,4).$$

   $\boxed{\sigma(P) \text{ est le plan d'équation } x + y + 4z = 0.}$

3. Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour du vecteur unitaire $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. $r(P)$ est le plan de vecteur normal

   $$\begin{aligned} r(n) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)n + \left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)(n.u)u + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)u \wedge n \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \frac{2}{3}(1,1,1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,0) \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 2(\sqrt{2}-1) - \sqrt{3}, 3 + 2(\sqrt{2}-1) + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-1)) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2} - \sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3}, 2(\sqrt{2}-1)). \end{aligned}$$

$r(P)$ est le plan d'équation $(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})x+(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})y+2(\sqrt{2}-1)z=0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1$, on choisit d'exprimer x et z en fonction de y. Soit $M(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. D'après les formules de CRAMER, on a

$$\begin{aligned} M \in (D) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z+7=0 \\ 2x+2y+3z-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2z=y-7 \\ -2x-3z=2y-5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} y-7 & 2 \\ 2y-5 & -3 \end{vmatrix} \text{ et } z=\frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & y-7 \\ -2 & 2y-5 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=31-7y \\ z=-19+4y \end{cases}. \end{aligned}$$

(D) est la droite passant par $A(31,0,-19)$ dirigée par le vecteur $u(-7,1,4)$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $M(2+\lambda, 3-\lambda, 7)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, un point quelconque de (D).

$$M \in (P) \Leftrightarrow (2+\lambda)+3(3-\lambda)-5\times 7+2=0 \Leftrightarrow \lambda = 12.$$

$(P)\cap(D)$ est donc un singleton. Pour $\lambda = 12$, on obtient les coordonnées du point d'intersection

$$(P)\cap(D)=\{(14,-9,7)\}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Repère de (D).

$$\begin{cases} x+2=-2z \\ y=3x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-2z \\ y=3(-2-2z)+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2-2z \\ y=-6-5z \end{cases}$$

(D) est la droite passant par $A(0,-1,-1)$ et dirigée par $u(2,5,-1)$. **Repère de (D').**

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-z=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-y=z-1 \\ 2x+y=z+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2z+a-1 \\ y=2-a-3z \end{cases}$$

(D') est la droite passant par $A'(a-1,2-a,0)$ et dirigée par $u'(2,-3,1)$. Déjà u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') sont ou bien sécantes en un point et dans ce cas coplanaires ou bien non coplanaires. Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A,u,u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x,y,z)\in(P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 2 \\ y+1 & 5 & -3 \\ z+1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2x-4(y+1)-16(z+1)=0 \Leftrightarrow -x+2y+8z=-10.$$

Enfin, (D) et (D') sont coplanaires si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ coplanaires} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow -(a-1)+2(2-a)=-10 \Leftrightarrow a=\frac{5}{3}.$$

(D) et (D') sont coplanaires si et seulement si $a = \frac{5}{3}$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $-x + 2y + 8z = -10$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Puisque P parallèle à la droite (Oy), le vecteur $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$ est dans $\overrightarrow{P}$. De même, le vecteur $\overrightarrow{AB} = (-1, 3, 1)$ est dans $\overrightarrow{P}$. P est donc nécessairement le plan passant par $A(0, -1, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$. Réciproquement, ce plan convient. Une équation de P est donc $(x - 0) + (z - 2) = 0$ ou encore $x + z = 2$.

Une équation du plan parallèle à la droite (Oy) et passant par $A(0, -1, 2)$ et $B(-1, 2, 3)$ est $x + z = 2$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Notons p la projection sur (P) parallèlement à (Δ). Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y + z = -x + 1 \\ 2y + z = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ z = -3x + 2 \end{array}\right.$$

(D) est la droite de repère $(A, \overrightarrow{u})$ où $A(0, -1, 2)$ et $\overrightarrow{u}(1, 2, -3)$. (Δ) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}(1, 3, 2)$. $\overrightarrow{u}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{u'}$ et donc (D) n'est pas parallèle à (Δ). On en déduit que $p(D)$ est une droite. Plus précisément, $p(D)$ est la droite intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et parallèle à (Δ). Déterminons une équation de (P'). Un repère de (P') est $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'})$. Donc

$$M(x, y, z) \in (P') \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y + 1 & 2 & 3 \\ z - 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 5(y + 1) + (z - 2) = 0 \Leftrightarrow 13x - 5y + z = 7.$$

Finalement

$p(D)$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est $\left\{\begin{array}{l} 13x - 5y + z = 7 \\ x + 3y + 2z = 6 \end{array}\right.$

Correction de l'exercice 10 ▲

Repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = a + z \\ y = -1 - 3z \end{array}\right. .$$

(D) est la droite passant par $A(a, -1, 0)$ et dirigée par $u(1, -3, 1)$. **Repère de (D').**

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2y + z = 2b - x \\ 3y + 2z = 7 - 3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 4b - 7 + x \\ z = 14 - 6b - 3x \end{array}\right.$$

(D') est la droite passant par $A'(0, 4b - 7, -6b + 14)$ et dirigée par $u'(1, 1, -3)$. Les vecteurs u et u' ne sont pas colinéaires et donc (D) et (D') ne sont pas parallèles. Le plan (P) contenant (D) et parallèle à (D') est le plan de repère (A, u, u'). Déterminons une équation de ce plan.

$$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - a & 1 & 1 \\ y + 1 & -3 & 1 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 8(x - a) + 4(y + 1) + 4z = 0 \Leftrightarrow 2x + y + z = 2a - 1.$$

Enfin, (D) et (D') sont sécantes si et seulement si (D') est contenue dans (P). Comme (D') est déjà parallèle à (P), on a

$$(D) \text{ et } (D') \text{ sécantes} \Leftrightarrow A' \in (P) \Leftrightarrow (4b-7)+(-6b+14)=2a-1 \Leftrightarrow b=-a+4.$$

(D) et (D') sont sécantes si et seulement si $b=-a+4$ et dans ce cas, une équation du plan contenant (D) et (D') est $2x+y+z=2a-1$.

Correction de l'exercice 11 ▲

(Δ) est parallèle à (D) si et seulement si (Δ) est dirigée par le vecteur $u(3,2,1)$ ou encore (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x=a+3\lambda \\ y=b+2\lambda \\ z=c+\lambda \end{array}\right.$. Ensuite, (Δ) est sécante à (D_1) si et seulement si on peut choisir le point (a,b,c) sur (D_1) ou encore si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=b+2\lambda \\ z=4+\lambda \end{array}\right.$. Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D_2) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \; b+2\lambda=4+\lambda+4=0 \Leftrightarrow b+2\times(-8)=0 \Leftrightarrow b=16.$$

Ceci démontre l'existence et l'unicité de (Δ) : un système d'équations paramétriques de (δ) est $\left\{\begin{array}{l} x=3\lambda \\ y=16+2\lambda \\ z=4+\lambda \end{array}\right.$.

Un système d'équations cartésiennes de (Δ) est $\left\{\begin{array}{l} x=3(z-4) \\ y=16+2(z-4) \end{array}\right.$ ou encore

$$(\Delta) : \left\{\begin{array}{l} x-3z+12=0 \\ y-2z-8=0 \end{array}\right. .$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Notons (Δ) une éventuelle droite solution. (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et par un point de la forme $(b,1,0)$ ou encore si et seulement si (Δ) passe par un point de la forme $(1,0,a)$ et est dirigée par un vecteur de la forme $(b-1,1,-a)$. Ainsi, (Δ) est sécante à (D_1) et (D_2) si et seulement si (Δ) admet un système d'équations paramétriques de la forme $\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda(b-1) \\ y=\lambda \\ z=a-\lambda a \end{array}\right.$ ou encore un système d'équations cartésiennes de la forme $\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y=1 \\ ay+z=a \end{array}\right.$.

Ensuite, (Δ) et (D_3) sécantes $\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R} / \left\{\begin{array}{l} -(b-1)y=1 \\ ay+1=a \end{array}\right. \Leftrightarrow b \neq 1$ et $-\frac{a}{b-1}+1=a \Leftrightarrow b \neq 0$ et $b \neq 1$ et $a=1-\frac{1}{b}$. En résumé, les droites sécantes à (D_1), (D_2) et (D_3) sont les droites dont un système d'équations cartésiennes est

$$\left\{\begin{array}{l} x-(b-1)y=1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right)y+z=1-\frac{1}{b} \end{array}\right. , b \notin \{0,1\}.$$

Enfin,

$$(\Delta) \text{ et } (D) \text{ sécantes} \Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x-(b-1)y = 1 \\ \left(1-\frac{1}{b}\right) y + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -6z + 6(b-1)z = 1 \\ -6\left(1-\frac{1}{b}\right) z + z = 1 - \frac{1}{b} \\ x = y = -6z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } -6\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{1}{6(b-2)} + \frac{1}{6(b-2)} = 1 - \frac{1}{b}$$

$$\Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } -6(b-1) + b = 6(b-1)(b-2) \Leftrightarrow b \notin \{0,1,2\} \text{ et } 6b^2 - 13b + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow b \in \left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.$$

Les droites solutions sont $(\Delta_1) : \begin{cases} 3x + y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$ et $(\Delta_2) : \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y + 3z = 1 \end{cases}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Déterminons le centre de gravité G.

$$G = \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{3}B + \tfrac{1}{3}C = \tfrac{1}{3}(2,-2,0) + \tfrac{1}{3}(4,2,6) + \tfrac{1}{3}(-1,-3,0) = \left(\tfrac{5}{3}, -1, 2\right).$$

Déterminons le centre du cercle circonscrit O. Une équation du plan (ABC) est $\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -3 \\ y+2 & 4 & -1 \\ z & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ ou encore $6(x-2) - 18(y+2) + 10z = 0$ ou enfin $3x - 9y + 5z = 24$. Posons alors $O(a,b,c)$. Ensuite, $OA = OB \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a-4)^2 + (b-2)^2 + (c-6)^2 \Leftrightarrow 4a + 8b + 12c = 48 \Leftrightarrow a + 2b + 3c = 16$ et $OA = OC \Leftrightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 + c^2 = (a+1)^2 + (b+3)^2 + c^2 \Leftrightarrow -6a - 2b = 2 \Leftrightarrow 3a + b = -1$. D'où le système

$$\begin{cases} 3a - 9b + 5c = 24 \\ a + 2b + 3c = 16 \\ 3a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 3a - 9(-3a-1) + 5c = 24 \\ a + 2(-3a-1) + 3c = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ 6a + c = 3 \\ -5a + 3c = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a - 1 \\ c = 3 - 6a \\ -5a + 3(3-6a) = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{9}{23} \\ b = \frac{4}{23} \\ c = \frac{123}{23} \end{cases}$$

Donc $O\left(-\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{123}{23}\right)$. Déterminons l'orthocentre H. D'après la relation d'Euler,

$$H = O + 3\overrightarrow{OG} = \left(-\tfrac{9}{23}, \tfrac{4}{23}, \tfrac{123}{23}\right) + 3\left(-\tfrac{9}{23} - \tfrac{5}{3}, \tfrac{4}{23} + 1, \tfrac{123}{23} - 2\right) = \left(\tfrac{-151}{23}, \tfrac{85}{23}, \tfrac{354}{23}\right).$$

Déterminons le centre du cercle inscrit I. On sait que $I = \text{bar}\{A(a), B(b), C(c)\}$ où $a = BC = \sqrt{5^2 + 5^2 + 6^2} = \sqrt{86}$, $b = AC = \sqrt{3^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{10}$ et $c = AB = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{54}$. Donc

$$I = \frac{\sqrt{86}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}A + \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}B + \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}C$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}, \frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).$$

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien rapporté à un repère orthonormé, on donne $A(2,-2,0)$, $B(4,2,6)$ et $C(-1,-3,0)$. Déterminer l'orthocentre, le centre de gravité, les centres des cercles circonscrits et inscrits au triangle (A,B,C).

$$G\left(\frac{5}{3},-1,2\right),\ O\left(-\frac{9}{23},\frac{4}{23},\frac{123}{23}\right) \text{ et } H\left(\frac{-151}{23},\frac{85}{23},\frac{354}{23}\right) \text{ puis}$$

$$I\left(\frac{2\sqrt{86}+4\sqrt{10}-\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{-2\sqrt{86}+2\sqrt{10}-3\sqrt{54}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}},\frac{6\sqrt{10}}{\sqrt{86}+\sqrt{10}+\sqrt{54}}\right).$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-1-z \\ 2x+y=2-5z \end{array}\right. \Leftrightarrow\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3-4z \\ y=-4+3z \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. Soit $M(x,y,z)$ un point du plan. On sait que

$$d(A,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{\sqrt{(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2}}{\sqrt{26}}$$

Notons C le cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2.

$$M(x,y,z)\in C \Leftrightarrow d(A,(D))=2 \Leftrightarrow (y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$$

Une équation cartésienne du cylindre de révolution d'axe (D) et de rayon 2 est
$(y-3z+4)^2+(x+4z-3)^2+(3x+4y+7)^2=104$.

Correction de l'exercice 15 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z+1=0 \\ 2x+y+5z=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z-1 \\ 2x+y=-5z+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-4z+3 \\ y=3z-4 \end{array}\right.$$

Un repère de (D) est $\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ où $A(3,-4,0)$ et $\overrightarrow{u}(-4,3,1)$. Déterminons un repère de (D').

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+y-5z=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=-z+2 \\ 2x+y=5z+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6z+1 \\ y=-7z+1 \end{array}\right.$$

Un repère de (D') est $\left(A',\overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(1,1,0)$ et $\overrightarrow{u'}(6,-7,1)$. $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix}-4\\3\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\10\\10\end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$.

Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D'). On sait que la distance d de (D) à (D') est donnée par

$$d = \frac{\text{abs}\left(\left[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}\right]\right)}{\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\|},$$

avec $[\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u'}] = \begin{vmatrix}-2&-4&6\\5&3&-7\\0&1&1\end{vmatrix} = 10\times(-2)+10\times5 = 30$ et donc $d=\frac{30}{10\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

$$d((D),(D')) = \sqrt{3}.$$

Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\begin{cases} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \\ \left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \end{cases}$. Or,

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x-3 & -4 & 1 \\ y+4 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-3) + 5(y+4) - 7z = 2x + 5y - 7z + 14,$$

et

$$\frac{1}{10}\left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = \begin{vmatrix} x-1 & 6 & 1 \\ y-1 & -7 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8(x-1) - 5(y-1) + 13z = -8x - 5y + 13z + 13.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est
$$\begin{cases} 2x + 5y - 7z = -14 \\ 8x + 5y - 13z = 13 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

$\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{P_1} \cap \overrightarrow{P_2} \cap \overrightarrow{P_3} \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$. Ainsi, les plans (P_1), (P_2) et (P_3) sont tous trois parallèles à la droite affine (D) d'équations $\begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases}$. Ces plans définissent donc un prisme. Déterminons alors l'aire d'une section droite. Le plan (P) d'équation $3x + y + 2z = 0$ est perpendiculaire à la droite (D). Son intersection avec les plans (P_1), (P_2) et (P_3) définit donc une section droite du prisme. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_2) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 2x - 3z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{z-5}{2} \\ x = \frac{3}{2}z \\ \frac{9}{2}z + \frac{z-5}{2} + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{5}{14} \\ y = -\frac{65}{28} \\ x = \frac{15}{28} \end{cases}$$

Notons $A\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$. Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_1) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} z - 2y = 5 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y + 5 \\ x = 3y \\ 9y + y + 2(2y + 5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{7} \\ x = -\frac{15}{7} \\ z = \frac{25}{7} \end{cases}$$

Notons $B\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$.
Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace.

$$M \in (P_2) \cap (P_3) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3z = 0 \\ 3y - x = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Une section droite est OAB où $A\left(\frac{15}{28}, -\frac{65}{28}, \frac{5}{14}\right)$ et $B\left(-\frac{15}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{25}{7}\right)$. De plus

$$\text{aire de}(OAB) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\right\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7}\left\|\begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7}\sqrt{63^2 + 21^2 + 42^2}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{28} \times \frac{5}{7} \times 21\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{75}{4\sqrt{14}}$$

L'aire d'une section droite est $\frac{75}{4\sqrt{14}}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient (P) le plan d'équation $x + 2y + 2z = 3$ et (P') le plan d'équation $x + y = 0$. L'angle entre (P) et (P') est l'angle entre les vecteurs normaux $\overrightarrow{n}(1, 2, 2)$ et $\overrightarrow{n'}(1, 1, 0)$:

$$\widehat{\left(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{n'}\right)} = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}}{\|\overrightarrow{n}\|\|\overrightarrow{n'}\|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{3\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. On a

$$d(M, (P_1)) = \frac{|4x+4y-7z-1|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{|4x+4y-7z-1|}{9} \text{ et } d(M, (P_2)) = \frac{|8x-4y+z+7|}{\sqrt{8^2+4^2+1^2}} = \frac{|8x-4y+z+7|}{9}.$$

Par suite,

$$d(M, (P_1)) = d(M, (P_2) \Leftrightarrow |4x + 4y - 7z - 1| = |8x - 4y + z + 7| \Leftrightarrow (4x + 4y - 7z - 1)^2 = (8x - 4y + z + 7)^2$$
$$\Leftrightarrow ((4x + 4y - 7z - 1) - (8x - 4y + z + 7))\,((4x + 4y - 7z - 1) + (8x - 4y + z + 7)) = 0$$
$$\Leftrightarrow (-4x + 8y - 8z - 8)(12x - 6z + 6) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 2z + 2 = 0 \text{ ou } 2x - z + 1 = 0.$$

Les plans bissecteurs de (P_1) et (P_2) admettent pour équation cartésienne $x - 2y + 2z + 2 = 0$ et $2x - z + 1 = 0$.

Correction de l'exercice 19 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 3z = -x - 4 \\ z = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5x - 1 \\ z = 2x + 1 \end{cases}$$

Un repère de (D) est $\left(A, \overrightarrow{u}\right)$ où $A(0, -1, 1)$ et $\overrightarrow{u}(1, 5, 2)$. Puisque un système d'équations de (D') est $\begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}$, un repère de (D') est $\left(A', \overrightarrow{u'}\right)$ où $A'(-1, -1, 0)$ et $\overrightarrow{u'}(1, 1, 1)$. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}$. Puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires, les droites (D) et (D') ne sont parallèles. Ceci assure l'unicité de la perpendiculaire commune à (D) et (D').

Un système d'équations de la perpendiculaire commune est $\begin{cases} \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \\ \left[\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\right] = 0 \end{cases}$. Or,

$$\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix} x & 1 & 3\\ y+1 & 5 & 1\\ z-1 & 2 & -4\end{vmatrix}=-22x+10(y+1)-14(z-1)=-22x+10y-14z+24,$$

et

$$\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{u'},\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{u'}\right]=\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 3\\ y+1 & 1 & 1\\ z & 1 & -4\end{vmatrix}=-5(x+1)+7(y+1)-2z=-5x+7y-2z+2.$$

Donc

un système d'équations cartésienne de la perpendiculaire commune à (D) et (D') est
$$\begin{cases} 11x-5y+7z=12\\ 5x-7y+2z=2\end{cases}.$$

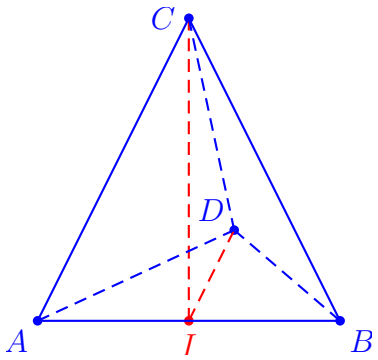
Correction de l'exercice 20 ▲

Notons p la projection orthogonale sur (P). Un repère de (D) est $\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ où $A(0,-1,2)$ et $\overrightarrow{u}(1,2,-3)$. Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(1,3,2)$. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ ne sont pas colinéaires et donc $p(D)$ est une droite du plan (P). Plus précisément, $p(D)$ est l'intersection du plan (P) et du plan (P') contenant (D) et perpendiculaire à (P). Un repère de (P') est $\left(A,\overrightarrow{u},\overrightarrow{n}\right)$. Donc

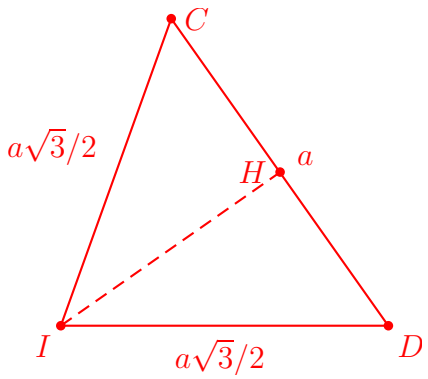
$$M(x,y,z)\in(P')\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x & 1 & 1\\ y+1 & 2 & 3\\ z-2 & -3 & 2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 13x-5(y+1)+(z-2)=0\Leftrightarrow 13x-5y+z=7.$$

La projetée orthogonale de (D) sur (P) est la droite d'équations $\begin{cases} 13x-5y+z=7\\ x+3y+2z=6\end{cases}$.

Correction de l'exercice 21 ▲



Angle entre deux arêtes. Les faces du tétraèdre $ABCD$ sont des triangles équilatéraux et donc l'angle entre deux arêtes est 60°.



Angle entre une arête et une face. C'est l'angle $\widehat{CDI}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CDI} = \arccos\left(\frac{HD}{DI}\right) = \arccos\left(\frac{a/2}{a\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54,7\ldots^\circ.$$

Angle entre deux faces. C'est l'angle $\widehat{CID}$ de la figure ci-dessus.

$$\widehat{CID} = \pi - 2\widehat{CDI} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 70,5\ldots^\circ.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Déterminons un repère de (D).

$$\left\{\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x+2y-z=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-z=y \\ y+2y=10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=\frac{10}{3} \\ z=x-\frac{10}{3} \end{array}\right. .$$

Un repère de (D) est $\left(A,\overrightarrow{u}\right)$ où $A\left(\frac{10}{3},\frac{10}{3},0\right)$ et $\overrightarrow{u}(1,0,1)$. On sait alors que

$$d(O,(D)) = \frac{\|\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{10}{3}\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\| = \frac{10}{\sqrt{6}}.$$

$$\boxed{d(O,(D)) = \frac{10}{\sqrt{6}}.}$$