Arithmétique

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **

Montrer que le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est un carré parfait.

Correction ▼ [005291]

Exercice 2 ***T

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|5n^3 + n$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n} + 2^{2^n} + 1$.

Correction ▼ [005292]

Exercice 3 ***IT

Un entier de la forme $8n + 7$ ne peut pas être la somme de trois carrés parfaits.

Correction ▼ [005293]

Exercice 4 **IT

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ où $(a_n, b_n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que $a_n \wedge b_n = 1$.

Correction ▼ [005294]

Exercice 5 ****

Montrer que, pour tout entier naturel n, 2^{n+1} divise $E((1 + \sqrt{3})^{2n+1})$.

Correction ▼ [005295]

Exercice 6 ***IT

Soient A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A. Trouver la somme des chiffres de B. (Commencer par majorer la somme des chiffres de $n = a_0 + 10a_1 ... + 10^p a_p$.)

Correction ▼ [005296]

Exercice 7 **

Montrer que si p est premier et $8p^2 + 1$ est premier alors $8p^2 - 1$ est premier.

Correction ▼ [005297]

Exercice 8 **I

1. Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ [k \wedge n = 1 \Rightarrow n|C_n^k]$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n + 1)|C_{2n}^n$.

Correction ▼ [005298]

Exercice 9 **T

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ les équations ou systèmes d'équations suivants :

$$1)\ \begin{cases} x+y=56 \\ x\vee y=105 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x\wedge y=x-y \\ x\vee y=72 \end{cases} \qquad 3)\ x\vee y-x\wedge y=243.$$

Correction ▼ [005299]

Exercice 10 ***

Montrer que la somme de cinq carrés parfaits d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Correction ▼ [005300]

Exercice 11 ***IT

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n=2^{2^n}+1$ (nombres de Fermat). Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Correction ▼ [005301]

Exercice 12 ***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ (suite de Fibonacci).

1. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2=(-1)^n$ et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\wedge u_{n+1}=1$.
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall m\in\mathbb{N}^*,\ u_{m+n}=u_mu_{n+1}+u_{m-1}u_n$ et en déduire que $u_m\wedge u_n=u_{m\wedge n}$ pour m et n non nuls.

Correction ▼ [005302]

Exercice 13 ***I

On veut résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $x^2+y^2=z^2$ (de tels triplets d'entiers relatifs sont appelés triplets pythagoriciens, comme par exemple $(3,4,5)$).

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $x\wedge y\wedge z=1$. Montrer alors que dans ce cas, x, y et z sont de plus deux à deux premiers entre eux.
2. On suppose que x, y et z sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que deux des trois nombres x, y et z sont impairs le troisième étant pair puis que z est impair.

   On suppose dorénavant que x et z sont impairs et y est pair. On pose $y=2y'$, $X=\frac{z+x}{2}$ et $Z=\frac{z-x}{2}$.
3. Montrer que $X\wedge Z=1$ et que X et Z sont des carrés parfaits.
4. En déduire que l'ensemble des triplets pythagoriciens est l'ensemble des triplets de la forme

   $$(d(u^2-v^2),\ 2duv,\ d(u^2+v^2))$$

   où $d\in\mathbb{N}$, $(u,v)\in\mathbb{Z}^2$, à une permutation près des deux premières composantes.

Correction ▼ [005303]

Exercice 14 **

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $3x^3+xy+4y^3=349$.

Correction ▼ [005304]

Exercice 15 ***

Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ l'équation d'inconnue (x, y): $\sum_{k=1}^{x} k! = y^2$.

Correction ▼ [005305]

Exercice 16 ***

Montrer que $n = 4\ldots48\ldots89$ (p chiffres 4 et $p-1$ chiffres 8 et donc $2p$ chiffres) (en base 10) est un carré parfait.

Correction ▼ [005306]

Exercice 17 ***I

Montrer que tout nombre impair non divisible par 5 admet un multiple qui ne s'écrit (en base 10) qu'avec des 1 (par exemple, $37 \times 1 = 37$, $37 \times 2 = 74$, $37 \times 3 = 111$).

Correction ▼ [005307]

Exercice 18 ***

Soit $u_n = 10\ldots01_2$.(n chiffres égaux à 0). Déterminer l'écriture binaire de :

1. u_n^2,
2. u_n^3,
3. $u_n^3 - u_n^2 + u_n$.

Correction ▼ [005308]

Exercice 19 **I

1. Déterminer en fonction de n entier non nul, le nombre de chiffres de n en base 10.
2. Soit $\sigma(n)$ la somme des chiffres de n en base 10.
   (a) Montrer que la suite $\left(\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Cette suite converge-t-elle ?
   (b) Montrer que pour tout naturel non nul n, $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(1 + \log n)$.
   (c) Montrer que la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

Correction ▼ [005309]

Exercice 20 ***I

1. (Formule de Legendre) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et p un nombre premier. Établir que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est
$$E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + E(\frac{n}{p^3}) + \ldots$$
2. Par combien de 0 se termine l'écriture en base 10 de 1000!?

Correction ▼ [005310]

Exercice 21 ***I Petit théorème de Fermat

Soit p un nombre premier.

1. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$, p divise C_p^k.
2. Montrer que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$ (par récurrence sur a).

Correction ▼ [005311]

Exercice 22 ***I Théorème de WILSON

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que : $(p-1)! \equiv -1\ (p) \Rightarrow p$ est premier (en fait les deux phrases sont équivalentes mais en Sup, on sait trop peu de choses en arithmétique pour pouvoir fournir une démonstration raisonnablement courte de la réciproque).

Correction ▼ [005312]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit n un entier naturel.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = n^4+6n^3+11n^2+6n+1 = (n^2+3n+1)^2,$$

avec n^2+3n+1 entier naturel.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit n un entier relatif.

   Si n est pair, n et $5n^3$ sont pairs de même que $5n^3+n$ et 2 divise $5n^3+n$.

   Si n est impair, n et $5n^3$ sont impairs et de nouveau $5n^3+n$ est pair. Finalement : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2|(5n^3+n)$.

   Si n est multiple de 3, n et $5n^3$ sont multiples de 3 de même que $5n^3+n$.

   Si n est de la forme $3p+1$, alors

   $$5n^2+1 = 5(3p+1)^2+1 = 45p^2+30p+6 = 3(9p^2+10p+2)$$

   et $5n^2+1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3+n = n(5n^2+1)$.

   Si n est de la forme $3p+2$, $5n^2+1 = 5(3p+2)^2+1 = 45p^2+60p+21 = 3(9p^2+20p+7)$ et $5n^2+1$ est divisible par 3. Il en est de même de $5n^3+n = n(5n^2+1)$.

   Finalement, $\forall n \in \mathbb{Z},\ 3|(5n^3+n)$.

   Enfin, $5n^3+n$ est divisible par 2 et 3 et donc par $2\times 3 = 6$. On a montré que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 6|(5n^3+n)$. (Tout ceci s'exprime beaucoup mieux à l'aide de congruences. Par exemple : si $n \equiv 1\ (3)$, $5n^2+1 \equiv 5.1^2+1 = 6 \equiv 0\ (3)$)

2. 4^{2^n} signifie $(\ldots((4^2)^2)^2\ldots)^2$. Etudions la suite de ces élévations au carré successives modulo 7. $4^{2^0} = 4$ est dans $4+7\mathbb{Z}$. $4^{2^1} = 16$ est dans $2+7\mathbb{Z}$. $4^{2^2} = 16^2 = (7k+2)^2 = 4+7k'$ est dans $4+7\mathbb{Z}$... Montrons par récurrence sur p entier naturel que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $4^{2^{2p}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ et $4^{2^{2p+1}}$ est dans $2+7\mathbb{Z}$.

   C'est vrai pour $p = 0$.

   Soit $p \geqslant 0$. Si il existe deux entiers relatifs k_{2p} et k_{2p+1} tels que $4^{2^{2p}} = 4+7k_{2p}$ et $4^{2^{2p+1}} = 2+7k_{2p+1}$, alors :

   $$4^{2^{2p+2}} = (4^{2^{2p+1}})^2 = (2+7k_{2p+1})^2 = 4+7(4k_{2p+1}+7k_{2p+1}^2) \in 4+7\mathbb{Z},$$

   puis

   $$4^{2^{2p+3}} = (4^{2^{2p+2}})^2 = (4+7k_{2p+2})^2 = 16+28k_{2p+2}+49k_{2p+2}^2 = 2+7(2+4k_{2p+2}+7k_{2p+2}^2) \in 2+7\mathbb{Z}.$$

   On a montré par récurrence que si n est pair, 4^{2^n} est dans $4+7\mathbb{Z}$ et si n est impair, 4^{2^n} est dans $2+7\mathbb{Z}$.

   Ensuite $2^{2^0} = 2$ est dans $2+7\mathbb{Z}$ puis, pour $n \geqslant 1$, $2^{2^n} = 2^{2.2^{n-1}} = 4^{2^{n-1}}$ est dans $4+7\mathbb{Z}$ si $n-1$ est pair ou encore si n est impair et est dans $2+7\mathbb{Z}$ si n est pair. Ainsi, que n soit pair ou impair, $4^{2^n}+2^{2^n}+1$ est dans $(4+2)+1+7\mathbb{Z} = 7+7\mathbb{Z} = 7\mathbb{Z}$ et on a montré que :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ 7|4^{2^n}+2^{2^n}+1.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient m, n et p trois entiers naturels et r_1, r_2 et r_3 les restes des divisions euclidiennes de m, n et p par 8. Alors,

$$m^2+n^2+p^2 = (8q_1+r_1)^2+(8q_2+r_2)^2+(8q_3+r_3)^2 \in r_1^2+r_2^2+r_3^2+8\mathbb{Z}.$$

Donc $m^2+n^2+p^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$ si et seulement si $r_1^2+r_2^2+r_3^2$ est dans $7+8\mathbb{Z}$.
Comme r_1, r_2 et r_3 sont des entiers entre 0 et 7, il suffit de vérifier que les sommes de trois carrés d'entiers compris au sens large entre 0 et 7 ne sont pas dans $7+8\mathbb{Z}$.
Or, $0^2=0\in 8\mathbb{Z}$, $1^2=1\in 1+8\mathbb{Z}$, $2^2=4\in 4+8\mathbb{Z}$, $3^2=9\in 1+8\mathbb{Z}$, $4^2=16\in 8\mathbb{Z}$, $5^2=25\in 1+8\mathbb{Z}$, $6^2=36\in 4+8\mathbb{Z}$ et $7^2=49\in 1+8\mathbb{Z}$. Donc, les carrés des entiers de 0 à 7 sont dans $8\mathbb{Z}$ ou $1+8\mathbb{Z}$ ou $4+8\mathbb{Z}$.
Enfin,

$0+0+0=0\in 8\mathbb{Z}$, $0+0+1=1\in 1+8\mathbb{Z}$, $0+0+4=4\in 4+8\mathbb{Z}$, $0+1+1=2\in 2+8\mathbb{Z}$,
$0+1+4=5\in 5+8\mathbb{Z}$ $0+4+4=8\in 8\mathbb{Z}$, $1+1+1=3\in 3+8\mathbb{Z}$, $1+1+4=6\in 6+8\mathbb{Z}$,
$1+4+4=9\in 1+8\mathbb{Z}$, $4+4+4=12\in 4+8\mathbb{Z}$.

Aucune de ces sommes n'est dans $7+8\mathbb{Z}$ et on a montré qu'un entier de la forme $8n+7$ n'est pas la somme de trois carrés.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En développant $(1+\sqrt{2})^n$ par la formule du binôme de Newton et en séparant les termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant pair des termes où $\sqrt{2}$ apparaît à un exposant impair, on écrit $(1+\sqrt{2})^n$ sous la forme $a_n+b_n\sqrt{2}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels non nuls.
Mais alors $(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ et donc

$$(-1)^n=(1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n=(a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2})=a_n^2-2b_n^2$$

ou finalement,

$$((-1)^n a_n)a_n+(2(-1)^{n+1}b_n)b_n=1$$

où $(-1)^n a_n=u$ et $2(-1)^{n+1}b_n=v$ sont des entiers relatifs. Le théorème de Bezout permet d'affirmer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Correction de l'exercice 5 ▲

Posons $(1+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ où a_n et b_n sont des entiers naturels. On a alors $(1-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ et donc

$$(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=2a_{2n+1}\in\mathbb{N}.$$

Mais de plus, $-1<1-\sqrt{3}<0$ et donc, puisque $2n+1$ est impair, $-1<(1-\sqrt{3})^{2n+1}<0$. Par suite,

$$2a_{2n+1}<(1+\sqrt{3})^{2n+1}<2a_{2n+1}+1,$$

ce qui montre que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})=2a_{2n+1}=(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}$ et montre déjà que $E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier pair. Mais on en veut plus :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}&=(1+\sqrt{3})((1+\sqrt{3})^2)^n+(1-\sqrt{3})((1-\sqrt{3})^2)^n\\&=(1+\sqrt{3})(4+2\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})^n\\&=2^n((1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n)\end{aligned}$$

Montrons enfin que $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier, pair. Mais, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$ est de la forme $A+B\sqrt{3}$ où A et B sont des entiers naturels et donc, puisque $(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n=A-B\sqrt{3}$, on a finalement $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n=2A$ où A est un entier.
Donc, $(1+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(1-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair, ou encore $(1+\sqrt{3})^{2n+1}+(1-\sqrt{3})^{2n+1}=E((1+\sqrt{3})^{2n+1})$ est un entier divisible par 2^{n+1}.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit n un entier naturel non nul. On note $\sigma(n)$ la somme de ses chiffres en base 10 (voir l'exercice 19). Si $n = a_0 + 10a_1 + ... + 10^k a_k$ où $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant a_i \leqslant 9$ pour $0 \leqslant i \leqslant k$ et $a_k \neq 0$, alors

$$\sigma(n) = a_0 + ... + a_k \leqslant 9(k+1) \leqslant 9(E(\log n) + 1) \leqslant 9(\log n + 1).$$

Donc,

$$A = \sigma(4444^{4444}) \leqslant 9(\log(4444^{4444}) + 1) \leqslant 9(4444\log(10^5) + 1) = 9(4444.5 + 1) = 9.22221 = 199989.$$

Puis, $B = \sigma(A) \leqslant 1 + 5.9 = 46$, puis $\sigma(B) \leqslant \sigma(39) = 12$. Donc, $1 \leqslant \sigma(B) \leqslant 12$.
D'autre part, on sait que modulo 9 : $\sigma(B) \equiv B \equiv A = 4444^{4444}$. Enfin, $4444^{4444} = (9.443 + 7)^{4444} \equiv 7^{4444}$ (9).
De plus, $7 \equiv -2$ (9) puis $7^2 \equiv 4$ (9) puis $7^3 \equiv 28 \equiv 1$ (9) et donc $7^{4444} = (7^3)^{1481}.7 \equiv (1^3)^{1481}.7 \equiv 7$ (9).
Finalement, $1 \leqslant \sigma(B) \leqslant 12$ et $C \equiv 7$ (9) ce qui impose $C = 7$.

Correction de l'exercice 7 ▲

On a trois possibilités : $p \in 3\mathbb{Z}$, $p \in 3\mathbb{Z} + 1$ ou $p \in 3\mathbb{Z} - 1$.
Dans les deux derniers cas, $p^2 \in 1 + 3\mathbb{Z}$ et $8p^2 + 1 \in 9 + 3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$. Mais alors, $8p^2 + 1$ est premier et multiple de 3 ce qui impose $8p^2 + 1 = 3$. Cette dernière égalité est impossible.
Il ne reste donc que le cas où p est premier et multiple de 3, c'est-à-dire $p = 3$ (en résumé, p et $8p^2 + 1$ premiers impliquent $p = 3$). Dans ce cas, $8p^2 + 1 = 73$ et $8p^2 - 1 = 71$ sont effectivement premiers.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$. Donc, si k et n sont premiers entre eux, puisque n divise kC_n^k, le théorème de Gauss permet d'affirmer que n divise C_n^k.

2. De même, $(n+1)C_{2n}^{n-1} = nC_{2n}^n$ montre que $(n+1)$ divise nC_{2n}^n et, puisque n et $(n+1)$ sont premiers entre eux (d'après Bezout puisque $(n+1) - n = 1$), $(n+1)$ divise C_{2n}^n d'après le théorème de Gauss.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Posons $d = x \wedge y$ et $m = x \vee y$. d divise $m = 105 = 3.5.7$ mais, puisque d divise x et y, d divise aussi $x + y = 56 = 2^3.7$. Donc, d divise $105 \wedge 56 = 7$ et nécessairement $d = 1$ ou $d = 7$.

   1er cas. $d = 1$ fournit, puisque $m = 105$, $xy = md = 105$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 105 = 0$ qui n'admet pas de solutions entières.

   2ème cas. $d = 7$ fournit $xy = 7.105 = 735$. x et y sont donc les solutions de l'équation $X^2 - 56X + 735 = 0$ qui admet les solutions 21 et 35.

   Réciproquement, $21 + 35 = 56$ et $21 \vee 35 = 3.5.7 = 105$. $\mathcal{S} = \{(21, 35), (35, 21)\}$.

2. On pose $x = dx'$ et $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux et $d = x \wedge y$. Le système s'écrit $\begin{cases} x' - y' = 1 \\ dx'y' = 72 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x' = y' + 1 \\ d(y'+1)y' = 72 \end{cases}$. En particulier, y' et $y' + 1$ sont deux diviseurs consécutifs de 72. $72 = 2^3.3^2$ admet $4.3 = 12$ diviseurs à savoir 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72. Donc y' est élément de $\{1, 2, 3, 8\}$.

   1er cas. $y' = 1$ fournit $d = \frac{72}{1.2} = 36$ puis $y = 36.1 = 36$ et $x = y + d = 72$. Réciproquement, $72 - 36 = 36 = 36 \wedge 72$ et $36 \vee 72 = 72$.

   2ème cas. $y' = 2$ fournit $d = 12$, $y = 24$, $x = 36$ qui réciproquement conviennent.

   3ème cas. $y' = 3$ fournit $d = 6$, $y = 18$, $x = 24$ qui réciproquement conviennent.

   4ème cas. $y' = 8$ fournit $d = 1$, $y = 8$, $x = 9$ qui réciproquement conviennent.

$$\mathcal{S} = \{(9,8),(24,18),(36,24),(72,36)\}.$$

3. d divise m et donc d divise $243 = 3^5$ et $d \in \{1,3,9,27,81,243\}$. On pose alors $x = dx'$, $y = dy'$ avec x' et y' premiers entre eux.

1er cas. Si $d = 1$ on a $x'y' - 1 = 243$ ou encore $x'y' = 244$ ce qui fournit les possibilités (en n'oubliant pas que x' et y' sont premiers entre eux):
$x' = 1$, $y' = 244$ puis $x = 1$ et $y = 244$,
$x' = 4$, $y' = 61$ puis $x = 4$ et $y = 61$,
$x' = 61$, $y' = 4$ puis $x = 61$ et $y = 4$,
$x' = 244$, $y' = 1$ puis $x = 244$ et $y = 1$ qui réciproquement conviennent.

2ème cas. Si $d = 3$, on a $x'y' = 81 + 1 = 82$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 82$ puis $x = 3$ et $y = 246$,
$x' = 2$, $y' = 41$ puis $x = 6$ et $y = 123$,
$x' = 41$, $y' = 2$ puis $x = 123$ et $y = 6$,
$x' = 82$, $y' = 1$ puis $x = 246$ et $y = 3$ qui réciproquement conviennent.

3ème cas. Si $d = 9$ on a $x'y' = 27 + 1 = 28$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 28$ puis $x = 9$ et $y = 252$,
$x' = 4$, $y' = 7$ puis $x = 36$ et $y = 63$,
$x' = 7$, $y' = 4$ puis $x = 63$ et $y = 36$,
$x' = 28$, $y' = 1$ puis $x = 252$ et $y = 9$ qui réciproquement conviennent.

4ème cas. Si $d = 27$ on a $x'y' = 9 + 1 = 10$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 10$ puis $x = 27$ et $y = 270$,
$x' = 2$, $y' = 5$ puis $x = 54$ et $y = 135$,
$x' = 5$, $y' = 2$ puis $x = 135$ et $y = 54$,
$x' = 10$, $y' = 1$ puis $x = 270$ et $y = 27$ qui réciproquement conviennent.

5ème cas. Si $d = 81$, on a $x'y' = 3 + 1 = 4$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 4$ puis $x = 81$ et $y = 324$,
$x' = 4$, $y' = 1$ puis $x = 324$ et $y = 81$ qui réciproquement conviennent.

6ème cas. Si $d = 243$, on a $x'y' = 1 + 1 = 2$ ce qui fournit les possibilités :
$x' = 1$, $y' = 2$ puis $x = 243$ et $y = 486$,
$x' = 2$, $y' = 1$ puis $x = 486$ et $y = 243$ qui réciproquement conviennent.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2+2).$$

$5(n^2+2)$ devant être un carré parfait, n^2+2 doit encore être divisible par 5 mais si n est dans $5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $2+5\mathbb{Z}$, si n est dans $\pm 1 + 5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $3+5\mathbb{Z}$ et si n est dans $\pm 2 + 5\mathbb{Z}$, n^2+2 est dans $1+5\mathbb{Z}$ et n^2+2 n'est jamais divisible par 5. Une somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est donc pas un carré parfait.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soient n et m deux entiers naturels tels que $n < m$. Posons $m = n + k$ avec $k > 0$. On note que

$$F_m = 2^{2^{n+k}} + 1 = (2^{2^n})^{2^k} + 1 = (F_n - 1)^{2^k} + 1.$$

En développant l'expression précédente par la formule du binôme de Newton et en tenant compte du fait que 2^k est pair puisque k est strictement positif, on obtient une expression de la forme $q.F_n + 1 + 1 = q.F_n + 2$.

Le P.G.C.D. de F_n et F_m doit encore diviser $F_m - q.F_n = 2$ et vaut donc 1 ou 2. Enfin, puisque 2^n et 2^m sont strictement positifs, F_n et F_m sont impairs et leur P.G.C.D. vaut donc 1 (ce résultat redémontre l'existence d'une infinité de nombres premiers).

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soit, pour n entier naturel non nul donné, $v_n = u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2$. Alors,

$$v_{n+1} = u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_n + u_{n+1})u_n - u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) = u_n^2 - u_{n+1}u_{n-1} = -v_n.$$

   La suite v est donc une suite géométrique de raison -1 et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (-1)^{n-1}v_1 = (-1)^n.$$

   Cette égalité s'écrit encore $((-1)^n u_{n-1})u_{n+1} + ((-1)^{n+1}u_n)u_n = 1$ et le théorème de Bezout permet d'affirmer que pour tout entier naturel n, les entiers u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux (il est clair par récurrence que la suite u est à valeurs entières).

2. Pour $m = 1$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+1} = u_{n+1}u_1 + u_n u_0 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

   Pour $m = 2$ et n entier naturel quelconque :

$$u_{n+m} = u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = u_{n+1}u_2 + u_n u_1 = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n.$$

   Soit $m \geqslant 1$. Supposons que pour tout entier naturel n, on a $u_{n+m} = u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n$ et $u_{n+m+1} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_{n+m+2} &= u_{n+m+1} + u_{n+m} = u_{n+1}u_{m+1} + u_m u_n + u_{n+1}u_m + u_{m-1}u_n \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= u_{n+1}(u_{m+1} + u_m) + u_n(u_m + u_{m-1}) = u_{n+1}u_{m+2} + u_n u_{m+1}. \end{aligned}$$

   ce qui démontre l'égalité proposée par récurrence.

   Soient n et m deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. La division euclidienne de n par m s'écrit $n = mq + r$ avec q et r entiers tels que $0 \leqslant r \leqslant m - 1$.

   Or, $u_{m+r} = u_m u_{r+1} + u_{m-1}u_r$. Par suite, un diviseur commun à u_m et u_r divise encore u_m et u_{m+r} et réciproquement un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise $u_{m-1}u_r$. Mais, u_m et u_{m-1} sont premiers entre eux et, d'après le théorème de Gauss, un diviseur commun à u_m et u_{m+r} divise u_r. Les diviseurs communs à u_m et u_r sont encore les diviseurs communs à u_m et u_{m+r} et donc :

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r}.$$

   Puis, par récurrence

$$u_m \wedge u_r = u_m \wedge u_{m+r} = u_m \wedge u_{2m+r} = \ldots = u_m \wedge u_{qm+r} = u_m \wedge u_n.$$

   Ainsi, les algorithmes d'Euclide appliqués d'une part à u_m et u_n et d'autre part à m et n s'effectuent en parallèle et en particulier, $u_m \wedge u_n = u_{m \wedge n}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

1. Posons $d = x \wedge y \wedge z$ puis $x = dx'$, $y = dy'$ et $z = dz'$ où $x' \wedge y' \wedge z' = 1$.

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow d^2(x'^2 + d^2y'^2) = d^2z'2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

avec $x' \wedge y' \wedge z' = 1$, ce qui montre que l'on peut se ramener au cas où x, y et z sont premiers entre eux.

Supposons donc x, y et z premiers entre eux (dans leur ensemble). Soit p un nombre premier. Si p divise x et y alors p divise $x^2 + y^2 = z^2$ et donc p est également un facteur premier de z contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et y sont premiers entre eux.

Si p divise x et z alors p divise $z^2 - x^2 = y^2$ et donc p est également un facteur premier de y, contredisant le fait que x, y et z sont premiers entre eux. Donc, x et z sont premiers entre eux. De même, y et z sont premiers entre eux. Finalement, x, y et z sont premiers entre eux deux à deux.

2. Puisque x, y et z sont deux à deux premiers entre eux, parmi les nombres x, y et z, il y a au plus un nombre pair. Mais si ces trois nombres sont impairs, $x^2 + y^2 = z^2$ est pair en tant que somme de deux nombres impairs contredisant le fait que z est impair. Ainsi, parmi les nombres x, y et z, il y a exactement un nombre pair et deux nombres impairs.

   Si x et y sont impairs, alors d'une part, z est pair et z^2 est dans $4\mathbb{Z}$ et d'autre part x^2 et y^2 sont dans $1 + 4\mathbb{Z}$. Mais alors, $x^2 + y^2$ est dans $2 + 4\mathbb{Z}$ excluant ainsi l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$. Donc, z est impair et l'un des deux nombres x ou y est pair. Supposons, quite à permuter les lettres x et y, que x est impair et y est pair.

   Posons alors $y = 2y'$ puis $X = \frac{z+x}{2}$ et $Z = \frac{z-x}{2}$ (puisque x et z sont impairs, X et Z sont des entiers).

3. On a

$$x^2 + y^2 = z^2 \Leftrightarrow 4y'^2 = (z + x)(z - x) \Leftrightarrow y'^2 = XZ.$$

   Un diviseur commun à X et Z divise encore $z = Z + X$ et $x = Z - X$ et est donc égal à ± 1 puisque x et z sont premiers entre eux. X et Z sont des entiers premiers entre eux.

   Le produit des deux entiers X et Z est un carré parfait et ces entiers sont premiers entre eux. Donc, un facteur premier de X n'apparaît pas dans Z et apparaît donc dans X à un exposant pair ce qui montre que X est un carré parfait. De même, Z est un carré parfait.

4. Donc, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $X = u^2$ et $Z = v^2$. Mais alors, $z = Z + X = u^2 + v^2$ et $x = Z - X = u^2 - v^2$. Enfin, $y^2 = z^2 - x^2 = (u^2 + v^2)^2 - (u^2 - v^2)^2 = 4u^2v^2$ et donc, $y = 2uv$ quite à remplacer u par $-u$.

   En résumé, si $x^2 + y^2 = z^2$ alors il existe $(d, u, v) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que $x = d(u^2 - v^2)$, $y = 2duv$ et $z = d(u^2 + v^2)$ ou bien $x = 2duv$, $y = d(u^2 - v^2)$ et $z = d(u^2 + v^2)$.

   Réciproquement,

$$(d(u^2 - v^2))^2 + (2duv)^2 = d^2(u^4 + 2u^2v^2 + v^4) = (d(u^2 + v^2))^2,$$

   et on a trouvé tous les triplets Pythagoriciens. Par exemple, $d = 1$, $u = 2$ et $v = 1$ fournissent le triplet $(3, 4, 5)$. $d = 2$, $u = 2$ et $v = 1$ fournissent le triplet $(6, 8, 10)$ et $d = 1$, $u = 3$ et $v = 2$ fournissent le triplet $(5, 12, 13)$.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soient x et y deux entiers naturels tels que $3x^3 + xy + 4y^3 = 349$. On a $4y^3 \leqslant 3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ et donc

$$y \leqslant \sqrt[3]{\frac{349}{4}} = 4,4...$$

Donc, $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. De même, $3x^3 \leqslant 3x^3 + xy + 4y^3 = 349$ et donc

$$x \leqslant \sqrt[3]{\frac{349}{3}} = 4,8...$$

Donc, $x \in \{0,1,2,3,4\}$ ce qui ne laisse plus que $5.5 = 25$ couples candidats. Ensuite,
$y = 0$ donne $3x^3 = 349$ qui ne fournit pas de solutions.
$y = 1$ donne $3x^3 + x - 345 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y = 2$ donne $3x^3 + 2x - 317 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y = 3$ donne $3x^3 + 3x - 241 = 0$, équation dont aucun des entiers de 0 à 4 n'est solution.
$y = 4$ donne $3x^3 + 4x - 93 = 0$ dont seul $x = 3$ est solution.

$$\mathcal{S} = \{(3,4)\}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Si $x \geqslant 5$ et $5 \leqslant k \leqslant x$, alors $k!$ est divisible par $2.5 = 10$. D'autre part, $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ et le chiffre des unités de $\sum_{k=1}^{x} k!$ est 3. $\sum_{k=1}^{x} k!$ n'est donc pas un carré parfait car le chiffre des unités (en base 10) d'un carré parfait est à choisir parmi 0, 1, 4, 5, 6, 9. Donc, $x \leqslant 4$. Ensuite, $1! = 1 = 1^2$ puis $1! + 2! = 1 + 2 = 3$ n'est pas un carré parfait, puis $1! + 2! + 3! = 9 = 3^2$ puis $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ n'est pas un carré parfait.

$$\mathcal{S} = \{(1,1),(3,3)\}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

$$n = 9 + 8(10 + 10^2 + ... + 10^{p-1}) + 4(10^p + ... + 10^{2p-1}) = 9 + 80\frac{10^{p-1} - 1}{10 - 1} + 4.10^p \frac{10^p - 1}{10 - 1}$$
$$= \frac{1}{9}(81 + 80(10^{p-1} - 1) + 4.10^p(10^p - 1)) = \frac{1}{9}(4.10^{2p} + 4.10^p + 1) = \left(\frac{2.10^p + 1}{3}\right)^2,$$

(ce qui montre déjà que n est le carré d'un rationnel). Maintenant,

$$2.10^p + 1 = 2(9+1)^p + 1 = 2.\sum_{k=0}^{p} C_p^k 9^k + 1 = 3 + 2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k} = 3(1 + 2\sum_{k=1}^{p} C_p^k 3^{2k-1}),$$

et $2.10^p + 1$ est un entier divisible par 3. Finalement, $n = \left(\frac{2.10^p+1}{3}\right)^2$ est bien le carré d'un entier.

Correction de l'exercice 17 ▲

Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $a_k = 11...1$ ($k+1$ chiffres 1 en base 10).
Soit n un entier naturel quelconque.
La division euclidienne de a_k par n s'écrit : $a_k = n.q_k + r_k$ où q_k et r_k sont des entiers naturels tels que $0 \leqslant r_k \leqslant n - 1$.
Les $n+1$ entiers r_0,..., r_n sont à choisir parmi les n entiers 0, 1,..., $n-1$. Les $n+1$ restes considérés ne peuvent donc être deux à deux distincts. Par suite,

$$\exists (k,l) \in \mathbb{N}^2 / \ 0 \leqslant k < l \leqslant n \text{ et } r_k = r_l.$$

Mais alors, $a_l - a_k = (q_l - q_k)n$ est un multiple de n. Comme $a_l - a_k = 11...10...0$ ($l-k$ chiffres 1 et $k+1$ chiffres 0), on a montré que tout entier naturel admet un multiple de la forme $11...10...0 = 11...1.10^K$. Si de plus n est impair, non divisible par 5, alors n est premier à 2 et à 5 et donc à 10^K. D'après le théorème de Gauss, n divise $11...1$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. $u_n^2 = (2^{n+1}+1)^2 = 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 1 = 10...010...01_2$ ($n-1$ puis $n+1$ chiffres 0)

2.

$$\begin{aligned} u_n^3 &= (2^{n+1}+1)^3 = 2^{3n+3} + 3.2^{2n+2} + 3.2^{n+1} + 1 = 2^{3n+3} + (2+1).2^{2n+2} + (2+1).2^{n+1} + 1 \\ &= 2^{3n+3} + 2^{2n+3} + 2^{2n+2} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 1 = 10...0110...0110...01_2 \end{aligned}$$

($n-1$ puis $n-1$ puis n chiffres 0)

3.

$$\begin{aligned} u_n^3 - u_n^2 + u_n &= 2^{3n+3} + 3.2^{2n+2} + 3.2^{n+1} + 1 - 2^{2n+2} - 2^{n+2} - 1 + 2^{n+1} + 1 = 2^{3n+3} + 2^{2n+3} + 2^{n+2} + 1 \\ &= 10...010...010...01 \end{aligned}$$

($n-1$ puis n puis $n+1$ chiffres 0)

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = \sum_{k=0}^{p} a_k 10^k$, où $p \in \mathbb{N}$, et $\forall k \in \{0,...,p\}$, $a_k \in \{0,...,9\}$, et $a_p \neq 0$. Le nombre de chiffres de n est alors $p+1$. L'entier p vérifie $10^p \leqslant n < 10^{p+1}$ ou encore $p \leqslant \log n < p+1$. Par suite, $p = E(\log n)$. Ainsi, le nombre de chiffres de n en base 10 est $E(\log n) + 1$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $n = a_p 10^p + ... + 10a_1 + a_0 = \overline{a_p...a_1a_0}_{10}$. Si au moins un des chiffres de n n'est pas 9, on note k le plus petit indice tel que $a_k \neq 9$. Alors, $0 \leqslant k \leqslant p-1$ et $n = \overline{a_p...a_k 9...9}_{10}$ et $n+1 = \overline{a_p...a_{k+1}(a_k+1)0...0}_{10}$. Dans ce cas, si $k = 0$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{\sigma(n)+1}{\sigma(n)} = 1 + \frac{1}{\sigma(n)} \leqslant 1 + 1 = 2.$$

   Si $1 \leqslant k \leqslant p-1$,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{a_p + ... + a_k + 1}{a_p + ... + a_k + 9k} \leqslant \frac{a_p + ... + a_k + 1}{a_p + ... + a_k + 1} = 1 \leqslant 2.$$

   Sinon, tous les chiffres de n sont égaux à 9, et dans ce cas,

$$\frac{\sigma(n+1)}{\sigma(n)} = \frac{1}{9(p+1)} \leqslant 2.$$

   Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_n \leqslant 2$. La suite u est donc bornée.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p-1} = \frac{\sigma(10^p)}{\sigma(10^p-1)} = \frac{1}{9p}$. La suite extraite $(u_{10^p-1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite 0.
   Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $u_{10^p} = \frac{\sigma(10^p+1)}{\sigma(10^p)} = \frac{2}{1} = 2$. La suite extraite $(u_{10^p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge et a pour limite $2 \neq 0$.
   On en déduit que la suite u diverge.

   (b) Avec les notations du a), $1 \leqslant \sigma(n) \leqslant 9(p+1) = 9(E(\log n)+1) \leqslant 9(\log n + 1)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $1 \leqslant \sqrt[n]{\sigma(n)} \leqslant \sqrt[n]{9(\log n + 1)} = \exp(\frac{1}{n}(\ln 9 + \ln(1 + \frac{\ln n}{\ln 10})$. Les deux membres de cet encadrement tendent vers 1 et donc la suite $(\sqrt[n]{\sigma(n)})_{n\geqslant 1}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\sigma(n)} = 1$.

Correction de l'exercice 20 ▲

1. (Formule de Legendre) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Si p est un nombre premier qui divise $n! = 1.2...n$, alors p est un facteur premier de l'un des entiers 2,..., n et en particulier, $p \leqslant n$. Réciproquement, il est clair que si p est un nombre premier tel que $p \leqslant n$, p divise $n!$. Les facteurs premiers de $n!$ sont donc les nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

   Soit donc p un nombre premier tel que $p \leqslant n$. Pour trouver l'exposant de p dans la décomposition primaire de $n!$, on compte 1 pour chaque multiple de p inférieur ou égal à n, on rajoute 1 pour chaque multiple de p^2 inférieur ou égal à n, on rajoute encore 1 pour chaque multiple de p^3 inférieur ou égal à n... et on s'arrête quand l'exposant k vérifie $p^k > n$.

   $$n \geqslant p^k \Leftrightarrow \ln n \geqslant k \ln p \Leftrightarrow k \leqslant \frac{\ln n}{\ln p},$$

   (car $\ln p > 0$). Donc, si $k \geqslant E(\frac{\ln n}{\ln p}) + 1$, alors $p^k > n$.

   Dit autrement, l'exposant de p est la somme du nombre de multiples de p inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiples de p^2 inférieurs ou égaux à n, du nombre de multiple de p^3 inférieurs ou égaux à n... et du nombre de multiples de $p^{E(\ln n/\ln p)}$.

   Soit k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant E(\frac{\ln n}{\ln p})$ et K un entier naturel.

   $$1 \leqslant K.p^k \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{p^k} \leqslant K \leqslant \frac{n}{p^k} \Leftrightarrow 1 \leqslant K \leqslant E(\frac{n}{p^k}).$$

   Il y a donc $E(\frac{n}{p^k})$ multiples de p^k compris au sens large entre 1 et n. On a montré que l'exposant de p dans la décomposition de $n!$ en facteurs premiers est

   $$E(\frac{n}{p}) + E(\frac{n}{p^2}) + E(\frac{n}{p^3}) + ...$$

2. L'exposant de 5 dans la décomposition primaire de 1000! est

   $$E(\frac{1000}{5}) + E(\frac{1000}{5^2}) + E(\frac{1000}{5^3}) + E(\frac{1000}{5^4}) = 200 + 40 + 8 + 1 = 249.$$

   L'exposant de 2 est évidemment supérieur (il y a déjà au moins 500 nombres pairs entre 1 et 1000). Donc, la plus grande puissance de 10 divisant 1000! est encore la plus grande puissance de 5 divisant 1000!, à savoir 249. L'écriture en base 10 de 1000! se termine par 249 zéros.

Correction de l'exercice 21 ▲

(Petit théorème de Fermat) Soit p un nombre premier.

1. Soit p un nombre premier et k un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant p-1$. On a $kC_p^k = pC_{p-1}^{k-1}$. Donc, p divise kC_p^k. Mais, p est premier et donc p est premier à tous les entiers compris entre 1 et $p-1$ au sens large. D'après le théorème de Gauss, p divise C_p^k.

2. Soit p un nombre premier. Montrons par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p \equiv a\ (p)$.

   C'est clair pour $a = 1$.

   Soit $a \geqslant 1$. Supposons que $a^p \equiv a\ (p)$. On a alors

   $$\begin{aligned}(a+1)^p &= \sum_{k=0}^{p} C_p^k a^k = a^p + 1 + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k \\ &\equiv a^p + 1\ (p) \quad \text{(d'après 1))} \\ &\equiv a + 1\ (p) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\end{aligned}$$

   On a montré par récurrence que $\forall a \in \mathbb{N}^*,\ a^p \equiv a\ (p)$.

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Supposons que $(p-1)! \equiv -1\ (p)$. Il existe donc un entier relatif a tel que $(p-1)! = -1 + ap\ (*)$.
Soit $k \in \{1, ..., p-1\}$. L'égalité $(*)$ s'écrit encore $k(-\prod_{j \neq k} j) + ap = 1$. Le théorème de Bezout permet alors d'affirmer que k et p sont premiers entre eux. Ainsi, p est premier avec tous les entiers naturels éléments de $\{1, ..., p-1\}$ et donc, p est un nombre premier.