Dénombrements

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 IT

1. (***) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $\sum C_n^{2k} = \sum C_n^{2k+1}$ ou encore démontrer directement qu'un ensemble à n éléments contient autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
2. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.
3. (****) Trouver une démonstration combinatoire de l'identité $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

Correction ▼ [005278]

Exercice 2 ***

Combien y a-t-il de partitions d'un ensemble à pq éléments en p classes ayant chacune q éléments ? (Si E est un ensemble à pq éléments et si A_1,..., A_p sont p parties de E, A_1,..., A_p forment une partition de E si et seulement si tout élément de E est dans une et une seule des parties A_i. Il revient au même de dire que la réunion des A_i est E et que les A_i sont deux à deux disjoints.)

Correction ▼ [005279]

Exercice 3 ***

Combinaisons avec répétitions. Montrer que le nombre de solutions en nombres entiers $x_i \geqslant 0$ de l'équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ (k entier naturel donné) est C_{n+k-1}^k. (Noter $a_{n,k}$ le nombre de solutions et procéder par récurrence.)

Correction ▼ [005280]

Exercice 4 *

Combien y a-t-il de nombres à 5 chiffres où 0 figure une seule fois ?

Correction ▼ [005281]

Exercice 5 ***I

Quelle est la probabilité p_n pour que dans un groupe de n personnes choisies au hasard, deux personnes au moins aient le même anniversaire (on considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables). Montrer que pour $n \geqslant 23$, on a $p_n \geqslant \frac{1}{2}$.

Correction ▼ [005282]

Exercice 6 ***

Montrer que le premier de l'an tombe plus souvent un dimanche qu'un samedi.

Correction ▼ [005283]

Exercice 7 **I

On part du point de coordonnées $(0,0)$ pour rejoindre le point de coordonnées (p,q) (p et q entiers naturels donnés) en se déplaçant à chaque étape d'une unité vers la droite ou vers le haut. Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [005284]

Exercice 8 ***I

De combien de façons peut-on payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes ?

Correction ▼ [005285]

Exercice 9 ****

1. Soit E un ensemble fini et non vide. Soient n un entier naturel non nul et $A_1, \dots, A_n$, n parties de E. Montrer la formule du crible :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\ + \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ + \cdots + (-1)^{n-1} \operatorname{card}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).\end{aligned}$$

2. Combien y a-t-il de permutations σ de $\{1, \dots, n\}$ vérifiant $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sigma(i) \neq i$? (Ces permutations sont appelées dérangements (permutations sans point fixe).) Indication : noter A_i l'ensemble des permutations qui fixent i et utiliser 1).

   On peut alors résoudre un célèbre problème de probabilité, le problème des chapeaux. n personnes laissent leur chapeau à un vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Montrer que la probabilité qu'aucune de ces personnes n'ait repris son propre chapeau est environ $\frac{1}{e}$ quand n est grand.

Correction ▼ [005286]

Exercice 10 **

Combien y a-t-il de surjections de $\{1, ..., n+1\}$ sur $\{1, ..., n\}$?

Correction ▼ [005287]

Exercice 11 ***

Soit (P) un polygone convexe à n sommets. Combien ce polygone a-t-il de diagonales ? En combien de points distincts des sommets se coupent-elles au maximum ?

Correction ▼ [005288]

Exercice 12 ***

1. On donne n droites du plan. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourantes. Déterminer le nombre $P(n)$ de régions délimitées par ces droites.

2. On donne n plans de l'espace. On suppose qu'il n'en existe pas deux qui soient parallèles, ni trois qui soient concourants en une droite, ni quatre qui soient concourants en un point. Déterminer le nombre $Q(n)$ de régions délimitées par ces plans.

Correction ▼ [005289]

Exercice 13 ***

Soit P_n^k le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k classes.
Montrer que $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Dresser un tableau pour $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.
Calculer en fonction de P_n^k le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments.

Correction ▼ [005290]

Indication pour l'exercice 7 ▲

Coder un chemin par un mot : D pour droite, H pour haut.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit E un ensemble à n éléments, $n \geqslant 1$, et a un élément fixé de E. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \begin{cases} A \setminus \{a\} \text{ si } a \in A \\ A \cup \{a\} \text{ si } a \notin A \end{cases} \end{array}$.

   Montrons que f est involutive (et donc bijective). Soit A un élément de $\mathcal{P}(E)$.

   Si $a \notin A$, $f(A) = A \cup \{a\}$ et donc, puisque $a \in A \cup \{a\}$, $f(f(A)) = (A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A$.

   Si $a \in A$, $f(A) = A \setminus \{a\}$ et $f(f(A)) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$.

   Ainsi, $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ f \circ f(A) = A$ ou encore, $f \circ f = Id_{\mathcal{P}(E)}$.

   Maintenant clairement, en notant $\mathcal{P}_p(E)$ (resp. $\mathcal{P}_i(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair), $f(\mathcal{P}_p(E)) \subset \mathcal{P}_i(E)$ et $f(\mathcal{P}_i(E)) \subset \mathcal{P}_p(E)$. Donc, puisque f est bijective

   $$\text{card}(\mathcal{P}_p(E)) = \text{card}(f(P_p(E)) \leqslant \text{card}\mathcal{P}_i(E)$$

   et de même $\text{card}(\mathcal{P}_i(E)) \leqslant \text{card}\mathcal{P}_p(E)$. Finalement, $\text{card}(\mathcal{P}_i(E)) = \text{card}\mathcal{P}_p(E)$.

2. Soient $E = \{a_1, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E. Soit $k \in \{1, ..., n-1\}$.

   Il y a C_{n-1}^{k-1} parties à k éléments qui contiennent a. Donc, $nC_{n-1}^{k-1} (= C_{n-1}^{k-1} + ... + C_{n-1}^{k-1})$ est donc la somme du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_1 et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_2 ... et du nombre de parties à k éléments qui contiennent a_n.

   Dans cette dernière somme, chaque partie à k éléments de E a été comptée plusieurs fois et toutes les parties à k éléments (en nombre égal à C_n^k) ont été comptés un même nombre de fois. Combien de fois a été comptée $\{a_1, a_2...a_k\}$? Cette partie a été comptée une fois en tant que partie contenant a_1, une fois en tant que partie contenant a_2... et une fois comme partie contenant a_k et donc a été comptée k fois.

   Conclusion : $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$.

3. Soit $E = \{a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n\}$ un ensemble à $2n$ éléments. Il y a C_{2n}^n parties à n éléments de E. Une telle partie a k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et $n-k$ dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour un certain k de $\{0, ..., n\}$. Il y a C_n^k choix possibles de k éléments dans $\{a_1, ..., a_n\}$ et C_n^{n-k} choix possibles de $n-k$ éléments dans $\{b_1, ..., b_n\}$ pour k donné dans $\{0, ..., n\}$ et quand k varie de 0 à n, on obtient :

   $$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k C_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Il y a C_{pq}^q choix possibles d'une première classe. Cette première classe étant choisie, il y a $C_{pq-q}^q = C_{(p-1)q}^q$ choix possibles de la deuxième classe... et C_q^q choix possibles de la p-ième classe. Au total, il y a $C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q$ choix possibles d'une première classe, puis d'une deuxième ...puis d'une p-ième.
Maintenant dans le nombre $C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q$, on a compté plusieurs fois chaque partition, chacune ayant été compté un nombre égal de fois.
On a compté chaque partition autant de fois qu'il y a de permutations des p classes à savoir $p!$. Le nombre cherché est donc :

$$\frac{1}{p!} C_{pq}^q C_{(p-1)q}^q ... C_q^q = \frac{1}{p!} \frac{(pq)!}{q!((p-1)q)!} \frac{((p-1)q)!}{q!((p-2)q)!} ... \frac{(2q)!}{q!q!} \frac{q!}{q!0!} = \frac{(pq)!}{p!(q!)^p}.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Clairement, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n,0} = 1$ (unique solution : $0 + 0 + ... + 0 = 0$) et $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{1,k} = 1$ (unique solution : $k = k$).

Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$ fixés. $a_{n+1,k}$ est le nombre de solutions en nombre entiers positifs x_i de l'équation $x_1 + ... + x_n + x_{n+1} = k$. Il y a $a_{n,k}$ solutions telles que $x_{n+1} = 0$ puis $a_{n,k-1}$ solutions telles que $x_{n+1} = 1$ ... puis $a_{n,0}$ solutions telles que $x_{n+1} = k$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k-1} + ... + a_{n,0}$ (et on rappelle $a_{n,0} = a_{1,k} = 1$).
Montrons alors par récurrence sur n, entier naturel non nul, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.
Pour $n = 1$, on a pour tout naturel k, $a_{1,k} = 1 = C_{1+k-1}^k$.
Soit $n \geqslant 1$, supposons que $\forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$. Soit $k \geqslant 1$.

$$a_{n+1,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{n,i} = \sum_{i=0}^{k} C_{n+i-1}^i = 1 + \sum_{i=1}^{k} (C_{n+i}^{i+1} - C_{n+i}^i) = 1 + C_{n+k}^{k+1} - 1 = C_{n+k}^{k+1},$$

ce qui reste clair pour $k = 0$.
On a montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N},\ a_{n,k} = C_{n+k-1}^k$.

Correction de l'exercice 4 ▲

On place le 0 soit au chiffre des unités, soit au chiffre des dizaines, soit au chiffre des centaines, soit au chiffre des milliers (mais pas au chiffre des dizaines de milliers) et le 0 étant placé, on n'y a plus droit.
Réponse : $4.9.9.9.9 = 4.9^4 = 4.(80+1)^2 = 4.6561 = 26244$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Si $n \geqslant 366$, on a clairement $p_n = 1$ (Principe des tiroirs : si 366 personnes sont à associer à 365 dates d'anniversaire, alors 2 personnes au moins sont à associer à la même date d'anniversaire).
Si $2 \leqslant n \leqslant 365$, on a $p_n = 1 - q_n$ où q_n est la probabilité que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Il y a $(365)^n$ répartitions possibles des dates d'anniversaires (cas possibles) et parmi ces répartitions, il y en a $365.364.363....(365-n+1)$ telles que les dates d'anniversaire soient deux à deux distinctes. Finalement

$$p_n = 1 - \frac{1}{(365)^n} 365.364.363....(365-n+1) = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} \frac{365-k}{365} = 1 - \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}).$$

Ensuite,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \ln(1 - \frac{k}{365}) \leqslant \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{365}) \geqslant \ln 2.$$

Maintenant, soit $x \in [0, 1[$. On a

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \geqslant \int_0^x \frac{1}{1-0} dt = x.$$

Pour k élément de $\{1, ..., n-1\} (\subset \{1, ..., 364\})$, $\frac{k}{365}$ est un réel élément de $[0, 1[$.
En appliquant l'inégalité précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} -\ln(1 - \frac{k}{365}) \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{365} = \frac{n(n-1)}{730}.$$

Ainsi,

$$p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{n(n-1)}{730} \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - n - 730 \ln 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{1 + \sqrt{1 + 2920 \ln 2}}{2} = 22,99... \Leftrightarrow n \geqslant 23.$$

Finalement, dans un groupe d'au moins 23 personnes, il y a plus d'une chance sur deux que deux personnes au moins aient la même date d'anniversaire.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Notre calendrier est 400 ans périodique (et presque 4.7 = 28 ans périodique). En effet,

   (a) la répartition des années bissextiles est 400 ans périodique (1600 et 2000 sont bissextiles mais 1700, 1800 et 1900 ne le sont pas (entre autre pour regagner 3 jours tous les 400 ans et coller le plus possible au rythme du soleil))

   (b) il y a un nombre entier de semaines dans une période de 400 ans. En effet, sur 400 ans, le quart des années, soit 100 ans, moins 3 années sont bissextiles et donc sur toute période de 400 ans il y a 97 années bissextiles et 303 années non bissextiles.

   Une année non bissextile de 365 jours est constituée de 52.7 + 1 jours ou encore d'un nombre entier de semaines plus un jour et une année bissextile est constituée d'un nombre entier de semaine plus deux jours.

   Une période de 400 ans est donc constituée d'un nombre entier de semaines plus : 97.2 + 303.1 = 194 + 303 = 497 = 7.71 jours qui fournit encore un nombre entier de semaines.

2. Deux périodes consécutives de 28 ans ne contenant pas d'exception (siècles non bissextiles) reproduisent le même calendrier. En effet, les 7 années bissextiles fournissent un nombre entiers de semaines plus 2.7 jours = 2 semaines et les 21 années non bissextiles fournissent un nombre entier de semaines plus 21.1 jours = 3 semaines.

3. D'après ce qui précède, il suffit de compter les 1ers de l'an qui tombe un dimanche ou un samedi sur une période de 400 ans donnée, par exemple de 1900 à 2299 (inclus).

   On décompose cette période comme suit :

   $$1900,\ 1901 \to 1928,\ 1929 \to 1956,\ 1957 \to 1984,\ 1985 \to 2012,\ 2013 \to 2040,\ 2041 \to 2068,\ 2069 \to 2096,$$
   $$2097 \to 2100,\ 2101 \to 2128,\ 2129 \to 2156,\ 2157 \to 2184,\ 2185 \to 2200,\ 2201 \to 2228\ 2229 \to 2256,$$
   $$2257 \to 2284,\ 2285 \to 2299.$$

4. On montre ensuite que sur toute période de 28 ans sans siècle non bissextile, le premier de l'an tombe un même nombre de fois chaque jour de la semaine (Lundi, mardi,..). (La connaissance des congruences modulo 4 et 7 seraient bien utile). Quand on passe d'une année non bissextile à l'année suivante, comme une telle année contient un nombre entier de semaines plus un jour, le 1er de l'an tombe un jour plus tard l'année qui suit et deux jours plus tard si l'année est bissextile. Par exemple,

   1er janvier 1998 : jeudi 1999 : vendredi 2000 : samedi 2001 : Lundi 2002 : Mardi 2003 : Mercredi 2004 : Jeudi 2005 : samedi...

   Notons A,B,C,D,E,F,G les jours de la semaine. Sur une période de 28 ans sans siècle non bissextile finissant par exemple une année bissextile, on trouve la séquence suivante :

   ABCD FGAB DEFG BCDE GABC EFGA CDEF (puis çà redémarre ABCD...) soit 4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F, et 4G.

5. Il reste à étudier les périodes à exception (soulignées dans le 3)).

   Détermination du 1er janvier 1900. Le 1er janvier 1998 était un jeudi . Il en est donc de même du 1er janvier 1998-28 = 1970 et des premiers janvier 1942 et 1914 puis on remonte :

   1914 Jeudi 1913 Mercredi 1912 Lundi 1911 Dimanche 1910 Samedi 1909 Vendredi 1908 Mercredi 1907 Mardi 1906 Lundi 1905 Dimanche 1904 Vendredi 1903 Jeudi 1902 Mercredi 1901 Mardi 1900 Lundi (1900 n'est pas bissextile)

   Les premiers de l'an 2000, 2028 , 2056 et 2084 sont des samedis, 2088 un jeudi, 2092 un mardi, 2096 un dimanche et donc 2097 mardi 2098 mercredi 2099 jeudi 2100 vendredi.

   2101 est un samedi de même que 2129, 2157, 2185 ce qui donne de 2185 à 2200 inclus la séquence :

   S D L Ma J V S D Ma Me J V D L Ma Me

   2201 est un jeudi de même que 2285 ce qui donne de 2285 à 2299 inclus la séquence :

   J V S D Ma Me J V D L Ma Me V S D

Le décompte des Lundis , mardis ... soulignés est : 6D 4L 6Ma 5Me 5J 6V 4S. Dans toute période de 400 ans, le 1er de l'an tombe 2 fois de plus le dimanche que le samedi et donc plus souvent le dimanche que le samedi.

Correction de l'exercice 7 ▲

On pose H = "vers le haut" et D = "vers la droite". Un exemple de chemin de $(0,0)$ à (p,q) est le mot $DD...DHH...H$ où D est écrit p fois et H est écrit q fois. Le nombre de chemins cherché est clairement le nombre d'anagrammes du mot précédent.
Le nombre de choix de l'emplacement du H est C_{p+q}^{q}. Une fois que les lettres H sont placées il n'y a plus de choix pour les lettres D. Il y a donc C_{p+q}^{q} chemins possibles.
Remarque : si on place d'abord les lettres D alors on a C_{p+q}^{p} choix possibles. Mais on trouve bien sûr le même nombre de chemins car $C_{p+q}^{p} = C_{p+q}^{(p+q)-p} = C_{p+q}^{q}$.

Correction de l'exercice 8 ▲

On note respectivement x, y et z le nombre de pièces de 10, 20 et 50 centimes. Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{N}^3$ l'équation $10x + 20y + 50z = 10000$ ou encore $x + 2y + 5z = 1000$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. $x + 2y = k \Leftrightarrow x = k - 2y$ et le nombre de solutions de cette équation est :

$$\sum_{k=0}^{E(k/2)} 1 = E(\frac{k}{2}) + 1.$$

Pour $0 \leqslant z \leqslant 200$ donné, le nombre de solutions de l'équation $x + 2y = 1000 - 5z$ est donc $E(\frac{1000-5z}{2}) + 1$. Le nombre de solutions en nombres entiers de l'équation $x + 2y + 5z = 1000$ est donc

$$\sum_{z=0}^{200}(E(\frac{1000-5z}{2}) + 1) = \sum_{z=0}^{200}(E(\frac{-5z}{2}) + 501) = 201.501 + \sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}) = 100701 + \sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}).$$

Maintenant

$$\sum_{z=0}^{200} E(\frac{-5z}{2}) = \sum_{k=1}^{100}(E(\frac{-5(2k-1)}{2})+E(\frac{-5(2k)}{2})) = \sum_{k=1}^{100}(E(-5k+\frac{5}{2})-5k) = \sum_{k=1}^{100}(-10k+2) = 200-10\frac{100.101}{2}.$$

Le nombre de solutions cherchés est donc $100701 - 50300 = 50401$. Il y a 50401 façons de payer 100 euros avec des pièces de 10, 20 et 50 centimes.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. $$\begin{aligned}\chi_{A_1\cup...\cup A_n} &= 1 - \chi_{\overline{A_1\cup...\cup A_n}} = 1 - \chi_{\overline{A_1}\cap...\cap\overline{A_n}} = 1 - \chi_{\overline{A_1}} \times ... \times \chi_{\overline{A_n}} \\ &= 1 - (1-\chi_{A_1})...(1-\chi_{A_n}) = 1 - (\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\sum_{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant n} \chi_{A_{i_1}}\cdots\chi_{A_{i_k}}))\end{aligned}$$

   et en sommant sur l'ensemble des x de E, on obtient le résultat.

2. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, posons $A_k = \{\sigma \in S_n / \ \sigma(k) = k\}$. L'ensemble des permutations ayant au moins un point fixe est $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. L'ensemble des permutations sans points fixes est le complémentaire dans S_n de $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

   D'après 1), leur nombre est donc :

$$\begin{aligned}\text{card}(S_n) - \text{card}(A_1 \cup A_2 ... \cup A_n) = \text{card}(S_n) - \sum_{i=1}^{n} \text{card}(A_i) + \sum_{i<j} \text{card}(A_i \cap A_j) \\ - ... + (-1)^k \sum_{i_1<i_2<...<i_k} \text{card}(A_{i_1} \cap ... A_{i_k}) + ... \\ + (-1)^n \text{card}(A_1 \cap ... \cap A_n).\end{aligned}$$

A_i est l'ensemble des permutations qui fixent i. Il y en a $(n-1)!$ (nombre de permutations de $\{1, ..., n\} \setminus \{i\}$). $A_i \cap A_j$ est l'ensemble des permutations qui fixent i et j. Il y en a $(n-2)!$. Plus généralement, $\text{card}(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}) = (n-k)!$.

D'autre part, il y a $n = C_n^1$ entiers i dans $\{1, n\}$ puis C_n^2 couples (i, j) tels que $i < j$ et plus généralement, il y a C_n^k k-uplets $(i_1, ..., i_k)$ tels que $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Le nombre de dérangements est

$$n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Ainsi le problème des chapeaux admet pour réponse

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Montrons que cette suite tend très rapidement vers $\frac{1}{e} = 0,36...$ quand n tend vers l'infini.

(On adapte un calcul déjà mené pour le nombre e.)

Montrons que $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt$.

Pour $n = 0$, $(-1)^{n+1} \int_O^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt = -\int_0^1 e^{-t}\, dt = -1 + e^{-1}$ et donc, on a bien $e^{-1} = 1 - \int_0^1 e^{-t}\, dt$.

Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $e^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt$.

Une intégration par parties fournit

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\, dt = \frac{1}{(n+1)!} - \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\, dt.$$

Mais alors,

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^{-t}\, dt.$$

Le résultat est démontré par récurrence.

On en déduit que

$$|p_n - \frac{1}{e}| = \left| (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt \right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^{-t}\, dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, dt = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Ceci montre que p_n tend très rapidement vers $\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit n un naturel non nul. Dire que f est une surjection de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$ équivaut à dire que deux des entiers de $\{1,...,n+1\}$ ont même image k par f et que les autres ont des images deux à deux distinctes et distinctes de k. On choisit ces deux entiers : C_{n+1}^2 choix et leur image commune : n images possibles ce qui fournit nC_{n+1}^2 choix d'une paire de $\{1,...,n+1\}$ et de leur image commune. Puis il y a $(n-1)!$ choix des images des $n-1$ éléments restants. Au total, il y a $n!\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n.(n+1)!}{2}$ surjections de $\{1,...,n+1\}$ sur $\{1,...,n\}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $n \geqslant 5$. De chaque sommet part $n-1$ droites (vers les $n-1$ autres sommets) dont 2 sont des cotés et $n-3$ des diagonales. Comme chaque diagonale passe par 2 sommets , il y a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.
Ces diagonales se recoupent en $C_{n(n-3)/2}^2$ points distincts ou confondus. Dans ce décompte, chaque sommet a été compté autant de fois que l'on a choisi une paire de deux diagonales passant par ce sommet à savoir C_{n-3}^2.
Maintenant, il y a n sommets.
Réponse :

$$\begin{aligned} C_{n(n-3)/2}^2 - nC_{n-3}^2 &= \frac{1}{2}\frac{n(n-3)}{2}(\frac{n(n-3)}{2}-1) - n\frac{(n-3)(n-4)}{2} = \frac{n(n-3)}{8}(n(n-3)-2-4(n-4)) \\ &= \frac{n(n-3)}{8}(n^2-7n+14) \end{aligned}$$

Les diagonales se recoupent en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points distincts ou confondus et distincts des sommets (ou encore en $\frac{n(n-3)(n^2-7n+14)}{8}$ points au maximum).

Correction de l'exercice 12 ▲

1. On a bien sûr $P(1) = 2$. Soit $n \geqslant 1$. On trace n droites vérifiant les conditions de l'énoncé. Elles partagent le plan en $P(n)$ régions. On trace ensuite D_{n+1}, une $(n+1)$ème droite. Par hypothèse, elle coupe chacune des n premières droites en n points deux à deux distincts. Ces n points définissent $(n+1)$ intervalles sur la droite D_{n+1}. Chacun de ces $(n+1)$ intervalles partage une des $P(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $P(n+1) = P(n) + (n+1)$.

   Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} P(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(P(k+1)-P(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2+n+2}{2} \end{aligned}$$

   ce qui reste vrai pour $n = 1$.

2. On a bien sûr $Q(1) = 2$.Soit $n \geqslant 1$. On trace n plans vérifiant les conditions de l'énoncé. Ils partagent l'espace en $Q(n)$ régions. On trace ensuite P_{n+1}, un $(n+1)$ème plan. Par hypothèse, il recoupe chacun des n premiers plans en n droites vérifiant les conditions du 1). Ces n droites délimitent $P(n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ régions sur le plan P_{n+1}. Chacune de ces régions partage une des $Q(n)$ régions déjà existantes en deux régions et rajoute donc une nouvelle région. Ainsi, $Q(n+1) = Q(n) + P(n) = Q(n) + \frac{n^2+n+2}{2}$.

   Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} Q(n) &= P(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(Q(k+1)-Q(k)) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2+k+2}{2}) = 2 + (n-1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &= (n+1) + \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n^3+5n+6}{6} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Soient n et k des entiers naturels tels que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.
Soit E un ensemble à n éléments et a un élément fixé de E.
Il y a P_n^k partitions de E en k classes. Parmi ces partitions, il y a celles dans lesquelles a est dans un singleton. Elles s'identifient aux partitions en $k-1$ classes de $E \setminus \{a\}$ et sont au nombre de P_{n-1}^{k-1}. Il y a ensuite les partitions dans lesquelles a est élément d'une partie de cardinal au moins 2. Une telle partition est obtenue en partitionnant $E \setminus \{a\}$ en k classes puis en adjoignant à l'une de ces k classes au choix l'élément a. Il y a $kP_{n-1}k$ telles partitions. Au total, $P_n^k = P_{n-1}^{k-1} + kP_{n-1}^k$.
Valeurs de P_n^k pour $1 \leqslant k, n \leqslant 5$.

n / k	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0
3	1	3	1	0	0
4	1	7	6	1	0
5	1	15	25	10	1

Exprimons maintenant en fonction des P_n^k, le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments.
Si $p > n$, il n'y a pas de surjections de E_n dans E_p (où E_n et E_p désignent des ensembles à n et p éléments respectivement).
On suppose dorénavant $p \leqslant n$. La donnée d'une surjection f de E_n sur E_p équivaut à la donnée d'une partition de l'ensemble E_n en p classes (chaque élément d'une même classe ayant même image par f) puis d'une bijection de l'ensemble des parties de la partition vers E_p.
Au total, il y a donc $p!P_n^k$ surjections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments pour $1 \leqslant p \leqslant n$.