Fonctions usuelles

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **I

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire, f' est impaire et si f est impaire, f' est paire.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. $f^{(n)}$ désignant la dérivée n-ième de f, montrer que si f est paire, $f^{(n)}$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.
3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. A-t-on des résultats analogues concernant les primitives de f?
4. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la condition f est paire (ou impaire) par la condition f est T-périodique .

Correction ▼ [005097]

Exercice 2 **

Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [005098]

Exercice 3 **I

1. Étudier brièvement la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ et tracer son graphe.
2. Trouver tous les couples (a, b) d'entiers naturels non nuls et distincts vérifiant $a^b = b^a$.

Correction ▼ [005099]

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. (**) $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$,
2. (*) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$,
3. (**) $2\,\mathrm{argsh}\, x = \mathrm{argch}\, 3 - \mathrm{argth}\, \frac{7}{9}$,
4. (**) $\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0$,
5. (**) $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Correction ▼ [005100]

Exercice 5 **

Trouver $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$.

Correction ▼ [005101]

Exercice 6

Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.

Correction ▼ [005102]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est paire, alors, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -f'(-x) = f'(x),$$

et donc f' est impaire. De même, si f est impaire, pour tout réel x, on a $f(-x) = -f(x)$, et par dérivation on obtient pour tout réel x, $f'(-x) = f'(x)$. f' est donc paire.

$$\boxed{(f \text{ paire} \Rightarrow f' \text{ impaire}) \text{ et } (f \text{ impaire} \Rightarrow f' \text{ paire.})}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f paire. Par suite, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$. Immédiatement par récurrence, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(-x) = (-1)^n f(x).$$

Ceci montre que $f^{(n)}$ a la parité de n, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ est une fonction paire quand n est un entier pair et est une fonction impaire quand n est un entier impair. De même, si f est impaire et n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}$ a la parité contraire de celle de n.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et impaire et F une primitive de f. Montrons que F est paire. Pour x réel, posons $g(x) = F(x) - F(-x)$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$g'(x) = F'(x) + F'(-x) = f(x) + f(-x) = 0.$$

g est donc constante sur $\mathbb{R}$ et par suite, pour tout réel x, $g(x) = g(0) = F(0) - F(0) = 0$. Ainsi, g est la fonction nulle et donc, pour tout réel x, $F(x) = F(-x)$. On a montré que F est paire. Par contre, si f est paire, F n'est pas nécessairement impaire. Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 1$ est paire, mais $F : x \mapsto x + 1$ est une primitive de f qui n'est pas impaire.

4. On montre aisément en dérivant une ou plusieurs fois l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$, que les dérivées successives d'une fonction T-périodique sont T-périodiques. Par contre, il n'en est pas de même des primitives. Par exemple, si pour tout réel x, $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, f est π-périodique, mais la fonction $F : x \mapsto \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$, qui est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, n'est pas π-périodique ni même périodique tout court.

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \sqrt[n]{n}$ puis, pour x réel strictement positif, $f(x) = x^{1/x}$ de sorte que pour tout naturel non nul n, on a $u_n = f(n)$. f est définie sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$, $f(x) = e^{\ln x/x}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} e^{\ln x/x}.$$

Pour $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$ et donc f' est strictement positive sur $]0, e[$ et strictement négative sur $]e, +\infty[$. f est donc strictement croissante sur $]0, e]$ et strictement décroissante sur $[e, +\infty[$. En particulier, pour $n \geqslant 3$,

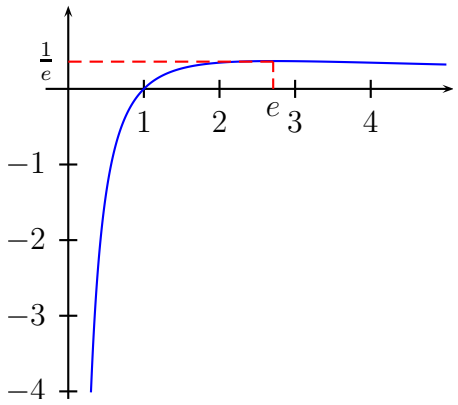
$$u_n = f(n) \leqslant f(3) = u_3 = \sqrt[3]{3}.$$

Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$, on a donc $\text{Max}\{u_n,\ n \in \mathbb{N}^*\} = \text{Max}\{\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}\}$. Enfin, $\sqrt{2} = 1,41... < 1,44.. = \sqrt[3]{3}$ (on peut aussi constater que $(\sqrt{2})^6 = 8 < 9 = (\sqrt[3]{3})^6$). Finalement,

$$\text{Max}\left\{\sqrt[n]{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}=\sqrt[3]{3}=1,44...$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Pour $x>0$, posons $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$, $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. f est donc strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. Le graphe de f s'en déduit facilement :



2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a<b$. On a alors

$$a^b=b^a\Leftrightarrow\ln(a^b)=\ln(b^a)\Leftrightarrow b\ln a=a\ln b\Leftrightarrow\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}\Leftrightarrow f(a)=f(b).$$

Si $a\geqslant 3$, puisque f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, on a alors $f(a)>f(b)$ et en particulier, $f(a)\neq f(b)$. a n'est donc pas solution. $a=1$ n'est évidemment pas solution. Par exemple, $a^b=b^a\Rightarrow 1^b=b^1\Rightarrow b=1=a$ ce qui est exclu. Donc, nécessairement $a=2$ et b est un entier supérieur ou égal à 3, et donc à e, vérifiant $f(b)=f(2)$. Comme f est strictement décroissante sur $[e,+\infty[$, l'équation $f(b)=f(2)$ a au plus une solution dans $[e,+\infty[$. Enfin, comme $2^4=16=4^2$, on a montré que : il existe un et un seul couple (a,b) d'entiers naturels non nuls tel que $a<b$ et $a^b=b^a$, à savoir $(2,4)$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\ln|x+1|-\ln|2x+1|\leqslant\ln 2&\Leftrightarrow\ln\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant\ln 2\Leftrightarrow\left|\frac{x+1}{2x+1}\right|\leqslant 2\text{ et }x+1\neq 0\\&\Leftrightarrow -2\leqslant\frac{x+1}{2x+1}\leqslant 2\text{ et }x\neq -1\Leftrightarrow\frac{x+1}{2x+1}+2\geqslant 0\text{ et }\frac{x+1}{2x+1}-2\leqslant 0\text{ et }x\neq -1\\&\Leftrightarrow\frac{5x+3}{2x+1}\geqslant 0\text{ et }\frac{-3x-1}{2x+1}\leqslant 0\text{ et }x\neq -1\\&\Leftrightarrow\left(x\in\left]-\infty,-\frac{3}{5}\right]\cup\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[\right)\text{ et }\left(\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[\right)\text{ et }x\neq -1\\&\Leftrightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,-\frac{3}{5}\right]\cup\left[-\frac{1}{3},+\infty\right[\end{aligned}$$

2. Pour $x>0$

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}}=\sqrt{x}^x&\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=x\ln\sqrt{x}\Leftrightarrow\ln x(\sqrt{x}-\frac{x}{2})=0\\&\Leftrightarrow\ln x\times\sqrt{x}(2-\sqrt{x})=0\Leftrightarrow x=1\text{ ou }x=4.\end{aligned}$$

3. $\operatorname{argch} 3 = \ln(3+\sqrt{3^2-1}) = \ln(3+\sqrt{8})$ et $\operatorname{argth}\frac{7}{9} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}\right) = \ln\sqrt{8}$. Donc, $\operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} = \ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$. Par suite,

$$\begin{aligned}2\operatorname{argsh} x = \operatorname{argch} 3 - \operatorname{argth}\frac{7}{9} &\Leftrightarrow x = \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{3}{\sqrt{8}}\right)\right)\\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}}\right) = \frac{3}{2\sqrt{8}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{8}}}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{8}}\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt[4]{2}}{4}\frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)}{4}.\end{aligned}$$

4. Pour $x \in]0,+\infty[\setminus\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$,

$$\begin{aligned}\ln_x(10) + 2\ln_{10x}(10) + 3\ln_{100x}(10) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\ln(10)}{\ln x} + 2\frac{\ln(10)}{\ln(10x)} + 3\frac{\ln(10)}{\ln(100x)} = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10)) + 2\ln x(\ln x+2\ln(10)) + 3\ln x(\ln x+\ln(10))}{\ln x(\ln x+\ln(10))(\ln x+2\ln(10))} = 0\\ &\Leftrightarrow 6\ln^2 x + 10\ln(10)\times\ln x + 2\ln^2(10) = 0\\ &\Leftrightarrow \ln x \in \left\{\frac{-5\ln(10)+\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}, \frac{-5\ln(10)-\sqrt{13\ln^2(10)}}{6}\right\}\\ &\Leftrightarrow x \in \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}.\end{aligned}$$

Comme aucun de ces deux nombres n'est dans $\left\{\frac{1}{100},\frac{1}{10},1\right\}$, $\mathcal{S} = \left\{10^{(-5-\sqrt{13})/6}, 10^{(-5+\sqrt{13})/6}\right\}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} &\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x-1}(2+1) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1) \Leftrightarrow 3\times 2^{2x-1} = 4\times 3^{x-\frac{1}{2}}\\ &\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3)\ln 2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)\ln 3\\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3}{2\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $x > 0$, $(x^x)^x = e^{x\ln(x^x)} = e^{x^2\ln x}$ et $x^{(x^x)} = e^{x^x\ln x}$. Par suite,

$$\forall x > 0,\ \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2 - x^x)).$$

Or, $x^2 - x^x = -x^x(1-x^{2-x}) = -e^{x\ln x}(1-e^{(2-x)\ln x})$. Quand x tend vers $+\infty$, $(2-x)\ln x$ tend vers $-\infty$. Donc, $1-e^{(2-x)\ln x}$ tend vers 1 puis x^2-x^x tend vers $-\infty$. Mais alors, $\ln x(x^2-x^x)$ tend vers $-\infty$, puis $\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = \exp(\ln x(x^2-x^x))$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}} = 0.}$$

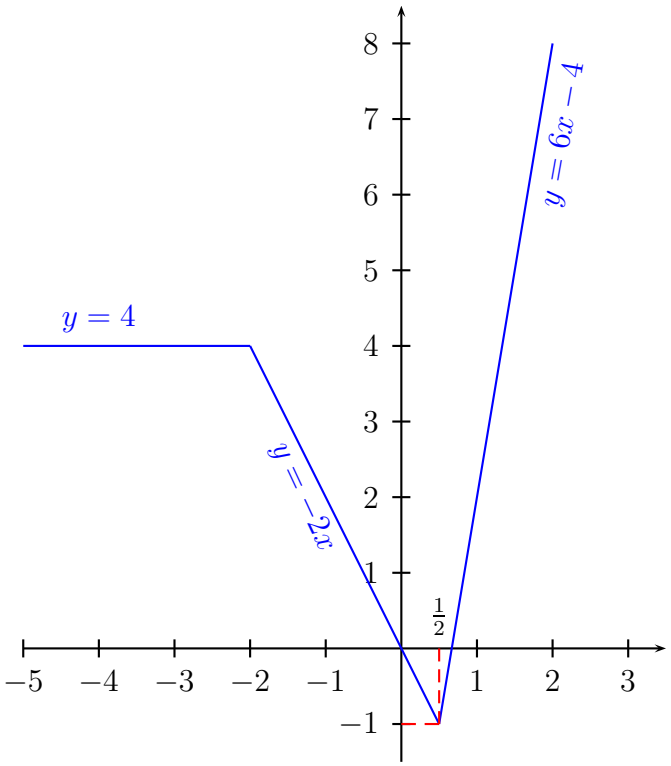
Correction de l'exercice 6 ▲

On notera C_i le graphe de f_i.

1. f_1 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$. On précise dans un tableau l'expression de $f_1(x)$ suivant les valeurs de x.

x	$-\infty$	-2	$1/2$	$+\infty$
$\lvert 2x-1\rvert$	$-2x+1$	$-2x+1$	$2x-1$	
$\lvert x+2\rvert$	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$f_1(x)$	4	$-2x$	$6x-4$	

On en déduit C_1.



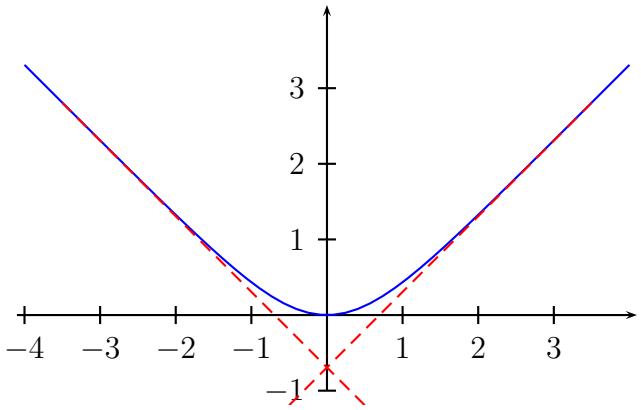
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\operatorname{ch} x \geqslant 1$ et donc $f_2(x)$ existe et $f_2(x) \geqslant 0$. f_2 est donc définie sur $\mathbb{R}$. De plus, f_2 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. Puisque la fonction $x \mapsto \operatorname{ch} x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, f_2 est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et, par parité, strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. f_2 est paire et donc f_2' est impaire. Par suite, $f_2'(0) = 0$ et C_2 admet l'axe des abscisses pour tangente en $(0, f_2(0)) = (0, 0)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x \geqslant 0$,

$$f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2 = \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - \ln 2 = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2x}).$$

Quand x tend vers $+\infty$, e^{-2x} tend vers 0 et donc, $\ln(1 + e^{-2x})$ tend vers 0. On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to+\infty}(f_2(x) - (x - \ln 2)) = 0$ et la droite (D) d'équation $y = x - \ln 2$ est asymptote à C_2 en $+\infty$. Par symétrie par rapport à la droite (Oy), la droite (D') d'équation $y = -x - \ln 2$ est asymptote à C_2 en $-\infty$. Enfin, pour tout réel x,

$$f_2(x) - (x - \ln 2) = \ln(1 + e^{-2x}) > \ln 1 = 0,$$

et C_2 est strictement au-dessus de (D) sur $\mathbb{R}$. De même, C_2 est strictement au-dessus de (D') sur $\mathbb{R}$. On en déduit C_2.



3. f_3 est définie et continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. **Etude en** $-\infty$. Soit $x \leqslant -1$.

$$f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{x-\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$, $x - \sqrt{x^2-1}$ tend vers $-\infty$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = 0$. **Etude en** $+\infty$. Immédiatement, $\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = +\infty$. Ensuite, pour $x \geqslant 1$,

$$\frac{f_3(x)}{x} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x} = 1 + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}},$$

qui tend vers 2 quand x tend vers $+\infty$. Mais alors,

$$f_3(x) - 2x = -x + \sqrt{x^2-1} = \frac{(-x+\sqrt{x^2-1})(-x-\sqrt{x^2-1})}{-x-\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

On en déduit que $\lim_{x\to+\infty}(f_3(x)-2x) = 0$ et donc que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_3 en $+\infty$. **Etude en** 1. Pour $x > 1$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = 1 + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}},$$

et pour $x \in]-1,1[$,

$$\frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = \frac{(x-1)+\sqrt{(-x+1)(x+1)}}{-(-x+1)} = 1 - \sqrt{\frac{x+1}{-x+1}}.$$

Par suite, $\lim_{x\to1,\ x>1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x\to1,\ x<1} \frac{f_3(x)-f_3(1)}{x-1} = -\infty$. On en déduit que f_3 n'est pas dérivable en 1, mais que C_3 admet deux demi-tangentes parallèles à (Oy) au point de C_3 d'abscisse 1. Les résultats sont analogues en -1. **Etude des variations de f_3.** Pour $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $f_3(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Si $x > 1$, on a $x + \sqrt{x^2-1} > 0$ et donc, $f_3'(x) > 0$. Si $x < -1$, on a

$$\sqrt{x^2-1} < \sqrt{x^2} = |x| = -x,$$

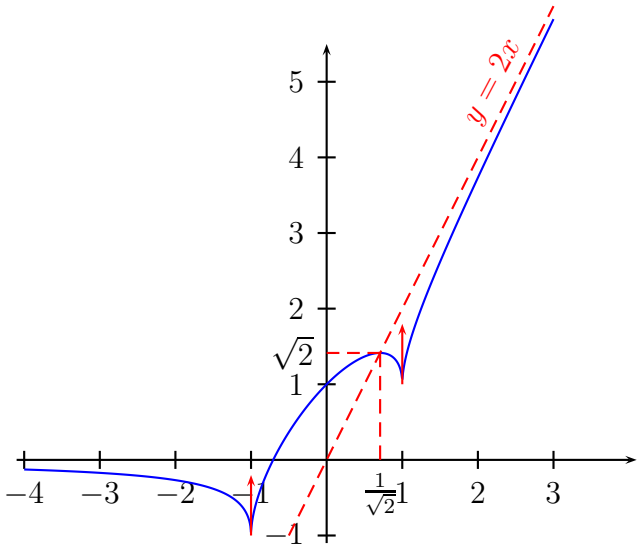
et donc, $x+\sqrt{x^2-1} < 0$ puis $f_3'(x) < 0$. Ainsi, f_3 est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$. Pour $x \in]-1,1[$, $f_3(x) = x + \sqrt{-x^2+1}$ et donc

$$f_3'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{-x^2+1}} = \frac{\sqrt{-x^2+1} - x}{\sqrt{-x^2+1}}.$$

Si $x \in]-1, 0]$, on a clairement $f_3'(x) > 0$. Si x$\in$ $[0, 1[$, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\text{sgn}(f_3'(x)) = \text{sgn}(\sqrt{-x^2+1} - x) = \text{sgn}((-x^2+1) - x^2) = \text{sgn}(1-2x^2) = \text{sgn}((1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})) = \text{sgn}[\frac{1}{\sqrt{2}} - x).$$

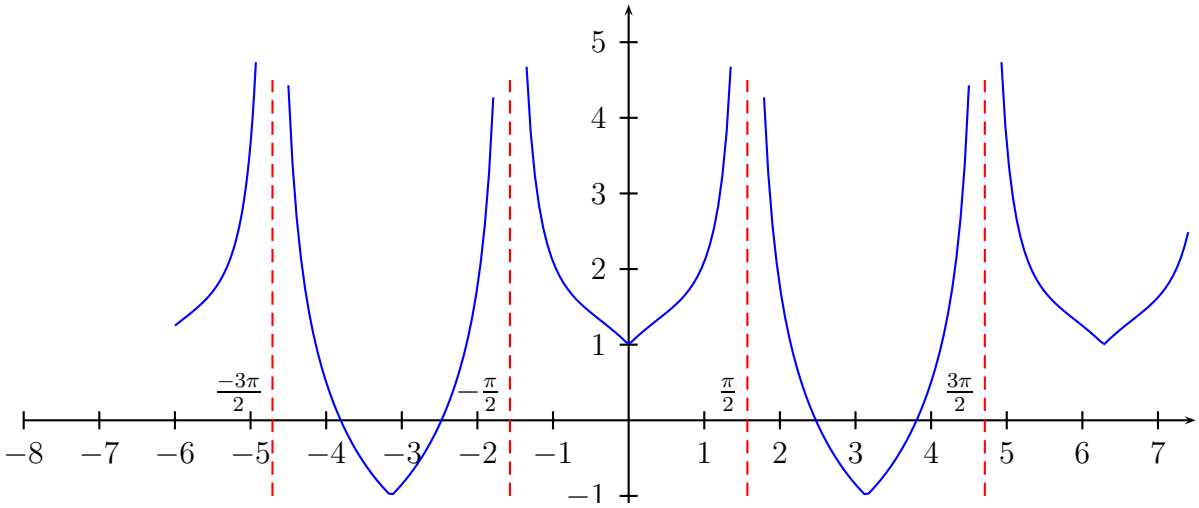
Donc, f_3' est strictement positive sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, strictement négative sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et s'annule en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En résumé, f_3' est strictement négative sur $]-\infty, -1[$ et sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement positive sur $\left]-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ et sur $]1, +\infty[$. f_3 est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$ et strictement décroissante sur $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et sur $[1, +\infty[$. On en déduit C_3.



4. f_4 est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, 2π-périodique et paire. On étudie donc f_4 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. **Etude des variations de f_4.** Pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f_4(x) = \tan x + \cos x$ et donc,

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \geqslant 1 - 1 = 0,$$

avec égalité si et seulement si $\sin x = \cos^2 x = 1$ ce qui est impossible. Donc, f_4' est strictement positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et f_4 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f_4(x) = -\tan x + \cos x$ et f_4 est strictement décroissante sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ en tant que somme de deux fonctions strictement décroissantes sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. On a immédiatement $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f_4(x) = +\infty$. On en déduit C_4.



5. Soit $x > 0$. x n'est pas nul donc $\frac{1}{x}$ existe puis $1 + \frac{1}{x} > 0$ et $f_6(x)$ existe. **Etude en 0**. Pour $x > 0$, $x\ln(1 + \frac{1}{x}) = -x\ln x + x\ln(1 + x)$. Par suite, $x\ln(1 + \frac{1}{x})$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures et donc $f_5(x) = \exp(x\ln(1 + \frac{1}{x}))$ tend vers 1. Posons encore $f_5(0) = 1$ et étudions la dérivabilité de f_5 en 0. Pour $x > 0$,

$$\frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = \frac{1}{x}\left(\exp(x\ln(1 + \frac{1}{x})) - 1\right) = \frac{\exp\left(x\ln(1 + \frac{1}{x})\right) - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Or, $x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0, et donc

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\exp(x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)) - 1}{x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y - 1}{y} = 1.$$

D'autre part, $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Finalement,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f_5(x) - f_5(0)}{x - 0} = +\infty.$$

Ainsi, f_5 n'est pas dérivable en 0 mais C_5 admet l'axe des ordonnées pour tangente en $(0, f_5(0)) = (0, 1)$. **Etude en** $+\infty$. Pour $x > 0$, $x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ et donc $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$. Par suite,

$$\lim_{x\to+\infty} f_5(x) = e.$$

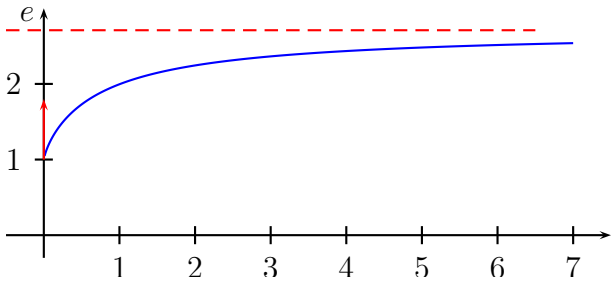
Etude des variations de f_5. Pour $x > 0$, $f_5(x) > 0$ puis $\ln(f_5(x)) = x\ln(1 + \frac{1}{x})$. Par suite, pour $x > 0$,

$$f_5'(x) = f_5(x)\ln(f_5)'(x) = f_5(x)\left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{x(-\frac{1}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}}\right) = f_5(x)g(x),$$

où $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$. Sur $]0, +\infty[$, f_5' est du signe de g. Pour déterminer le signe de g, étudions d'abord les variations de g sur $]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $x > 0$,

$$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} + \frac{1}{(x + 1)^2} = -\frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{-1}{x(x + 1)^2} < 0.$$

g est donc strictement décroissante sur $]0,+\infty[$, et puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, g est strictement positive sur $]0,+\infty[$. Il en est de même de f_5'. f_5 est strictement croissante sur $]0,+\infty($. On en déduit C_5.



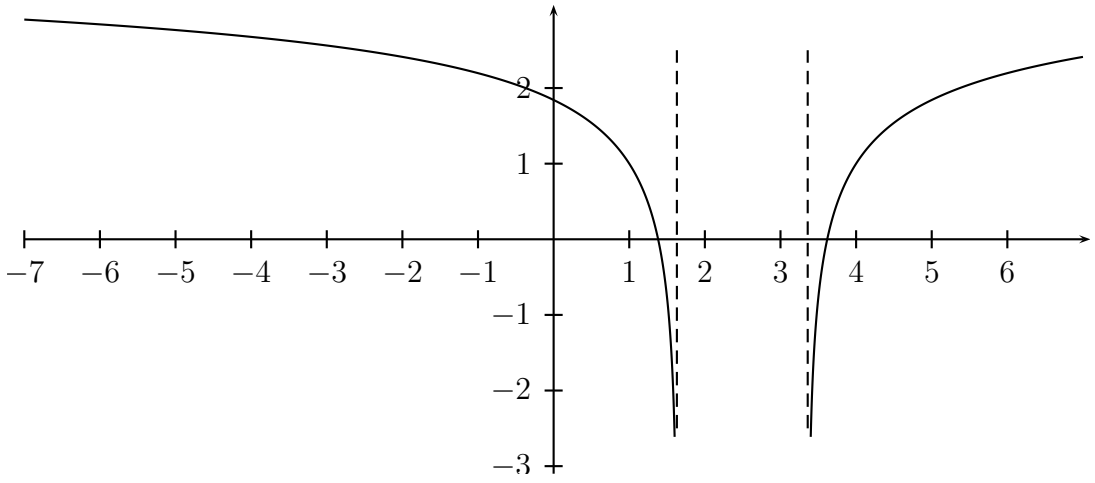
6. **Domaine de définition de f_6.** Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f_6(x) \text{ existe} \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } 1-\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln\frac{1}{2}}<1$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \text{ et } \ln(x^2-5x+6)>\ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2-5x+6>\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-5x+\frac{11}{2}>0 \Leftrightarrow x\in]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty[=\mathcal{D}_f.$$

Variations de f_6. La fonction $x\mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5}{2},+\infty\right[$. Comme $\frac{5+\sqrt{3}}{2}>\frac{5}{2}$ et que $\frac{5-\sqrt{3}}{2}<\frac{5}{2}$, la fonction $x\mapsto x^2-5x+6$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$, à valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme néperien est strictement croissante. La fonction $x\mapsto 1+\frac{\ln(x^2-5x+6)}{\ln 2}$ a le même sens de variations et finalement f_6 est strictement décroissante sur $\left]-\infty,\frac{5-\sqrt{3}}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{5+\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$. **Axe de symétrie** Soit $x\in\mathbb{R}$. $x\in\mathcal{D}_f \Leftrightarrow \frac{5}{2}-x\in\mathcal{D}_f$ et de plus, $\left(\frac{5}{2}-x\right)^2-5\left(\frac{5}{2}-x\right)+6=x^2-5x+6$. Par suite,

$$\forall x\in D,\ f_6(\frac{5}{2}-x)=f_6(x).$$

C_6 admet donc la droite d'équation $x=\frac{5}{2}$ pour axe de symétrie.
Le calcul des limites étant immédiat, on en déduit C_6.