Trigonométrie

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = 0$,
2. $\sin x = 1$,
3. $\sin x = -1$,
4. $\cos x = 1$,
5. $\cos x = -1$,
6. $\cos x = 0$,
7. $\tan x = 0$,
8. $\tan x = 1$.

Correction ▼ [005063]

Exercice 2 *IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \frac{1}{2}$,
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
3. $\tan x = -1$,
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction ▼ [005064]

Exercice 3 **IT

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans I les équations suivantes :

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 2\pi]$,
2. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $I = [0, 4\pi]$,
3. $\tan(5x) = 1$, $I = [0, \pi]$,

4. $\cos(2x) = \cos^2 x,\ I = [0, 2\pi]$,
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0,\ I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos(nx) = 0\ (n \in \mathbb{N}^*)$,
7. $|\cos(nx)| = 1$,
8. $\sin(nx) = 0$,
9. $|\sin(nx)| = 1$,
10. $\sin x = \tan x,\ I = [0, 2\pi]$,
11. $\sin(2x) + \sin x = 0,\ I = [0, 2\pi]$,
12. $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2,\ I = [-\pi, \pi]$.

Correction ▼ [005065]

Exercice 4 **IT

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1. $\cos x \leqslant \frac{1}{2},\ I = [-\pi, \pi]$,
2. $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}},\ I = \mathbb{R}$,
3. $\cos x > \cos \frac{x}{2},\ I = [0, 2\pi]$,
4. $\cos^2 x \geqslant \cos(2x),\ I = [-\pi, \pi]$,
5. $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2},\ I = [0, 2\pi]$,
6. $\cos \frac{x}{3} \leqslant \sin \frac{x}{3},\ I = [0, 2\pi]$.

Correction ▼ [005066]

Exercice 5 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Correction ▼ [005067]

Exercice 6 *I

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Correction ▼ [005068]

Exercice 7 ***

Montrer que $\sum \cos(\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \ldots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Correction ▼ [005069]

Exercice 8 ***I

1. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour a élément donné de $]0, \pi[$ (penser à $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$).
2. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right)$.

Correction ▼ [005070]

Exercice 9 **

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2^{4\cos^2 x+1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2 x-3} = 20$.

Correction ▼ [005071]

Exercice 10 ***

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et de $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Calculer $\tan(3\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Correction ▼ [005072]

Exercice 11 ****

On veut calculer $S = \tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$.

1. Calculer $\tan(5x)$ en fonction de $\tan x$.
2. En déduire un polynôme de degré 4 dont les racines sont $\tan 9°$, $-\tan 27°$, $-\tan 63°$ et $\tan 81°$ puis la valeur de S.

Correction ▼ [005073]

Exercice 12 ***

Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Correction ▼ [005074]

Exercice 13 **I

On veut calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Vérifier que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. En déduire un polynôme de degré 2 dont les racines sont a et b puis les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

Correction ▼ [005075]

Exercice 14 **I

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \cos^2 x$,
2. $x \mapsto \cos^4 x$,

3. $x \mapsto \sin^4 x$,
4. $x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x$,
5. $x \mapsto \sin^6 x$,
6. $x \mapsto \cos x \sin^6 x$,
7. $x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x$,
8. $x \mapsto \cos^3 x$.

Correction ▼ [005076]

Exercice 15 **

Calculer $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx$ et $J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx$.

Correction ▼ [005077]

Exercice 16 **

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

1. $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$,
2. $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$,
3. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{2}{\cos(2x)}$,
4. $\frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}$.

Correction ▼ [005078]

Exercice 17 ***

Soit k un réel distinct de -1 et de 1.

1. Etudier les variations de $f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}$.
2. Calculer $\int_0^{\pi} f_k(x) \, dx$.

Correction ▼ [005079]

Exercice 18 ***I

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
2. $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$, ($x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ donnés).

Correction ▼ [005080]

Exercice 19 ***

Résoudre le système $\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases}$ où a, b et c sont trois réels.

Correction ▼ [005081]

Exercice 20 **

Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$.

Correction ▼ [005082]

Exercice 21 ***

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x)=\sin(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$ pour x élément de $\left\{\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{10}\right\}$.

Correction ▼ [005083]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. $\sin x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
2. $\sin x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
3. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$.
4. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, 2\pi\}$.
5. $\cos x = -1 \Leftrightarrow x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{\pi\}$.
6. $\cos x = 0 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.
7. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
8. $\tan x = 1 \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
2. $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$.
3. $\tan x = -1 \Leftrightarrow x \in -\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.
4. $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}\right\}$.
5. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.
6. $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. $\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}\right\}$.
2. $\sin\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{2} + 4\pi\mathbb{Z}\right)$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,4\pi]} = \left\{\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right\}$.
3. $\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,\pi]} = \left\{\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}\right\}$.
4. $\cos(2x) = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.
5. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup 2\pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\right\}$.
6. $\cos(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
7. $|\cos(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
8. $\sin(nx) = 0 \Leftrightarrow nx \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.
9. $|\sin(nx)| = 1 \Leftrightarrow nx \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}\mathbb{Z}$.

10. $\sin x = \tan x \Leftrightarrow \sin x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x \frac{\cos x - 1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$. De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \pi, 2\pi\}$.

11.

$$\sin(2x) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin(x+\pi) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = x + \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 2x = -x + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \pi + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{2k\pi}{3})$$

De plus, $\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, 2\pi\}$.

12.

$$12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2 \Leftrightarrow 6\cos^2 x - 4(1-\cos^2 x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \cos = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$.
3. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos x > \cos\frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 > 0 \Leftrightarrow (2\cos\frac{x}{2} + 1)(\cos\frac{x}{2} - 1) > 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{x}{2} + 1 < 0 \text{ et } \cos\frac{x}{2} \neq 1$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2} \text{ et } \frac{x}{2} \notin 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x}{2} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{4\pi}{3} + 4k\pi, \frac{8\pi}{3} + 4k\pi\right[\text{ et } x \notin 4\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in]\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$$

4. Pour $x \in [-\pi, \pi]$, $\cos^2 x \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) \geqslant \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in [-\pi, \pi]$.
5. Pour $x \in [0, 2\pi]$, $\cos^2 x \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$.
6. Pour $x \in [0, 2\pi]$,

$$\cos\frac{x}{3} \leqslant \sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ 2k\pi \leqslant \frac{x}{3} - \frac{\pi}{4} \leqslant \pi + 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}/\ \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \leqslant x \leqslant 3\pi + \frac{3\pi}{4} + 6k\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Correction de l'exercice 5 ▲

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2\times\frac{\pi}{8})\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, et puisque $\cos\frac{\pi}{8} > 0$,

$$\boxed{\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.}$$

De même, puisque $\sin\frac{\pi}{8} > 0$, $\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos(2\times\frac{\pi}{8})\right)}$ et

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

De même,

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\tfrac{\pi}{12} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Pour n naturel non nul, on pose $S_n = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$. $S_1 = e^{ia_1} + e^{-ia_1} = 2\cos a_1$ Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ alors

$$S_{n+1} = \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_{n+1})} = e^{ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)} + e^{-ia_{n+1}} \sum e^{i(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n)}$$

$$= 2\cos(a_{n+1}) S_n = 2^{n+1} \cos a_1 \ldots \cos a_{n+1}.$$

On a montré par récurrence que : $\forall n \geqslant 1,\ S_n = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$. Ensuite, pour $n \geqslant 1$, $\sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Re}(S_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n$ (et on obtient aussi $\sum \sin(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = \mathrm{Im}(S_n) = 0$).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum \cos(\pm a_1 \pm \ldots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \ldots \cos a_n.}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque a est dans $]0,\pi[$ alors, pour tout entier naturel non nul k, $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\pi[$ et donc $\sin\frac{a}{2^k} \neq 0$. De plus, puisque $\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right) = \sin\left(2\times\frac{a}{2^k}\right) = 2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{a}{2^k}\right)} = \frac{1}{2^n} \frac{\sin(a)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)\sin\left(\frac{a}{2^n}\right)} = \frac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}.$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) = \frac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}.}$$

2. $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) > 0$ car $\frac{a}{2^k}$ est dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. Puis

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{a}{2^k})\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{2^n \sin\frac{a}{2^n}}\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right) - \ln\left(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}}\right).$$

Maintenant, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos(\frac{a}{2^k})\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\ln(\frac{\sin a}{a}) - \ln(\frac{\sin\frac{a}{2^n}}{\frac{a}{2^n}})\right) = \ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).$$

$$\boxed{\forall a \in]0,\pi[,\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)=\ln\left(\frac{\sin a}{a}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{4\sin^2 x-3}=20 &\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x+1}+16.2^{1-4\cos^2 x}=20 \Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+16\times 2^{-4\cos^2 x}=0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}-10+\frac{16}{2^{4\cos^2 x}}=0 \Leftrightarrow (2^{4\cos^2 x})^2-10\times 2^{4\cos^2 x}+16=0\\
&\Leftrightarrow 2^{4\cos^2 x}=2 \text{ ou } 2^{4\cos^2 x}=8 \Leftrightarrow 4\cos^2 x=1 \text{ ou } 4\cos^2 x=3\\
&\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{1}{2} \text{ ou } \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\Leftrightarrow x\in\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Tout d'abord, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta \text{ et } \sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.}$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R}\setminus\left(\tfrac{\pi}{6}+\tfrac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\ \tan(3\theta)=\tfrac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.}$$

2. Soit $a\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1ère méthode.** a est bien sûr racine de l'équation proposée, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2} &\Leftrightarrow (3x-x^3)(1-3a^2)=(1-3x^2)(3a-a^3) \text{ (car } \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ne sont pas solution de l'équation)}\\
&\Leftrightarrow (x-a)((3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3)=0.
\end{aligned}$$

Le discriminant réduit du trinôme $(3a^2-1)x^2+8ax-a^2+3$ vaut :

$$\Delta'=16a^2-(3a^2-1)(-a^2+3)=3a^4+6a^2+3=(\sqrt{3}(a^2+1))^2>0.$$

L'équation proposée a donc trois racines réelles :

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{a, \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}, \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}\right\}.}$$

2ème méthode. Il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $a = \tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ tel que $x = \tan\theta$ (à savoir $\alpha = \arctan a$ et $\theta = \arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = \frac{3a-a^3}{1-3a^2} \Leftrightarrow \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan(3\theta) = \tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta \in 3\alpha + \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \alpha + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Ceci refournit les solutions $x = \tan\alpha = a$, puis

$$x = \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a} = \frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2} = \frac{4a+\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2},$$

et $x = \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{4a-\sqrt{3}(a^2+1)}{1-3a^2}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $x \notin \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$,

$$\tan(5x) = \frac{\mathrm{Im}((e^{ix})^5)}{\mathrm{Re}((e^{ix})^5)} = \frac{5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x}{\cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x} = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^5 x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right),\ \tan(5x) = \frac{5\tan x - 10\tan^3 x + \tan^5 x}{1 - 10\tan^2 x + 5\tan^4 x}.}$$

2. $9°$, $-27°$, $-63°$ et $81°$ vérifient $\tan(5\times 9°) = \tan(5\times(-27°)) = \tan(5\times(-63°)) = \tan(5\times 81°) = 1$. On résoud donc l'équation :

$$\tan(5x) = 1 \Leftrightarrow 5x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}\right).$$

Les solutions, exprimées en degrés et éléments de $]-90°, 90°[$, sont $-63°$, $-27°$, $9°$, $45°$ et $81°$. Ainsi, les cinq nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$, $\tan(45°)$ et $\tan(81°)$ sont deux à deux distincts et solutions de l'équation $\frac{5X-10X^3+X^5}{1-10X^2+5X^4} = 1$ qui s'écrit encore :

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = 0.$$

Le polynôme $X^5 - 5x^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1$ admet déjà $\tan(45°) = 1$ pour racine et on a

$$X^5 - 5X^4 - 10X^3 + 10X^2 + 5X - 1 = (X-1)(X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1).$$

Les quatre nombres $\tan(-63°)$, $\tan(-27°)$, $\tan(9°)$ et $\tan(81°)$ sont ainsi les racines du polynôme $X^4 - 4X^3 - 14X^2 - 4X + 1$. Ce dernier peut donc encore s'écrire $(X-\tan(9°))(X+\tan(27°))(X+\tan(63°))(X-\tan(81°))$. L'opposé du coefficient de X^3 à savoir 4 vaut donc également $\tan(9°) - \tan(27°) - \tan(63°) + \tan(81°)$ et on a montré que :

$$\boxed{\tan(9°) - \tan(27°) - \tan(63°) + \tan(81°) = 4.}$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour $x \in [0, \pi]$, posons $f(x) = \tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x)$.

$$\begin{aligned} f(x) \text{ existe} &\Leftrightarrow \tan x,\ \tan(2x),\ \tan(3x) \text{ et } \tan(4x) \text{ existent} \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(2x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(3x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(4x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right),\ \left(x \notin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right),\ \left(x \notin \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) \text{ et } \left(x \notin \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right) \\ &\Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right\}. \end{aligned}$$

f est définie et continue sur

$$\left[0, \frac{\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{8}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right].$$

Sur chacun des dix intervalles précédents, f est définie, continue et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. La restriction de f à chacun de ces dix intervalles est donc bijective de l'intervalle considéré sur l'intervalle image, ce qui montre déjà que l'équation proposée, que l'on note dorénavant (E), a au plus une solution par intervalle et donc au plus dix solutions dans $[0, \pi]$. Sur $I = \left[0, \frac{\pi}{8}\right[$ ou $I = \left]\frac{7\pi}{8}, \pi\right]$, puisque $f(0) = f(\pi) = 0$, (E) a exactement une solution dans I. Ensuite, dans l'expression de somme f, une et une seule des quatre fonctions est un infiniment grand en chacun des nombres considérés ci-dessus, à l'exception de $\frac{\pi}{2}$. En chacun de ces nombres, f est un infiniment grand. L'image par f de chacun des six intervalles ouverts n'ayant pas $\frac{\pi}{2}$ pour borne est donc $]-\infty, +\infty[$ et (E) admet exactement une solution dans chacun de ces intervalles d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ceci porte le total à $6 + 2 = 8$ solutions. En $\frac{\pi}{2}^-$, $\tan x$ et $\tan(3x)$ tendent vers $+\infty$ tandis que $\tan(2x)$ et $\tan(4x)$ tendent vers 0. f tend donc vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}^-$, et de même f tend vers $-\infty$ en $\frac{\pi}{2}^+$. L'image par f de chacun des deux derniers intervalles est donc encore une fois $]-\infty, +\infty[$. Finalement,

$$\boxed{(E) \text{ admet exactement dix solutions dans } [0, \pi].}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

1. D'après les formules d'Euler,

$$z + z^4 = e^{2i\pi/5} + e^{8i\pi/5} = e^{2i\pi/5} + e^{-2i\pi/5} = 2\cos\frac{2\pi}{5} = a.$$

   De même,

$$z^2 + z^3 = e^{4i\pi/5} + e^{6i\pi/5} = e^{4i\pi/5} + e^{-4i\pi/5} = 2\cos\frac{4\pi}{5} = b.$$

2. Puisque $z \neq 1$ et $z^5 = e^{2i\pi} = 1$,

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0.$$

3. $a+b=z+z^2+z^3+z^4=-1$ et $ab=(z+z^4)(z^2+z^3)=z^3+z^4+z^6+z^7=z+z^2+z^3+z^4=-1$. Donc,

$$a+b=-1 \text{ et } ab=-1.$$

Ainsi, a et b sont les solutions de l'équation $X^2+X-1=0$ à savoir les nombres $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Puisque $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{4\pi}{5}\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a $a>0$ et $b>0$. Finalement,

$$\boxed{\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

1. $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$ et une primitive de $x\mapsto\cos^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}\sin(2x))$.

2. D'après les formules d'Euler,

$$\begin{aligned}\cos^4 x&=\left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)+4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)+2\sin(2x)+3x)$.

3.

$$\begin{aligned}\sin^4 x&=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^4=\frac{1}{16}(e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix})\\&=\frac{1}{16}(2\cos(4x)-8\cos(2x)+6)=\frac{1}{8}(\cos(4x)-4\cos(2x)+3)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^4 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(\frac{1}{4}\sin(4x)-2\sin(2x)+3x)$.

4. $\cos^2 x\sin^2 x=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{8}(1-\cos(4x))$ et une primitive de la fonction $x\mapsto\cos^2 x\sin^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{8}(x-\frac{1}{4}\sin(4x))$.

5.

$$\begin{aligned}\sin^6 x&=\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6=-\frac{1}{64}(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\&=-\frac{1}{64}(2\cos(6x)-12\cos(4x)+30\cos(2x)-20)=\frac{1}{32}(-\cos(6x)+6\cos(4x)-15\cos(2x)+10)\end{aligned}$$

Donc, une primitive de la fonction $x\mapsto\sin^6 x$ est $x\mapsto\frac{1}{32}(-\frac{1}{6}\sin(6x)+\frac{3}{2}\sin(4x)-\frac{15}{2}\sin(2x)+10x)$.

6. $\cos x\sin^6 x=\sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos x\sin^6 x$ est $x\mapsto\frac{1}{7}\sin^7 x$.

7. $\cos^5 x\sin^2 x=\cos x(1-\sin^2 x)^2\sin^2 x=\sin' x\sin^2 x-2\sin' x\sin^4 x+\sin' x\sin^6 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos^5 x\sin^2 x$ est $x\mapsto\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{2}{5}\sin^5 x+\frac{1}{7}\sin^7 x$.

8. $\cos^3 x=\sin' x-\sin' x\sin^2 x$ et une primitive de $x\mapsto\cos^3 x$ est $x\mapsto\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x$.

Correction de l'exercice 15 ▲

1. Pour x réel , on a :

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^6 x &= \left(\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})\right)^4\left(\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})\right)^6\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix})(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix})\\ &= -\frac{1}{2^{10}}(e^{10ix}-2e^{8ix}-3e^{6ix}+8e^{4ix}+2e^{2ix}-12+2e^{-2ix}+8e^{-4ix}-3e^{-6ix}-2e^{-8ix}+e^{-10ix})\\ &= -\frac{1}{2^9}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\\ &= -\frac{1}{512}(\cos 10x-2\cos 8x-3\cos 6x+8\cos 4x+2\cos 2x-6)\end{aligned}$$

(Remarque. La fonction proposée était paire et l'absence de sinus était donc prévisible. Cette remarque guidait aussi les calculs intermédiaires : les coefficients de e^{-2ix}, e^{-4ix},... étaient les mêmes que ceux de e^{2ix}, e^{4ix},...) Par suite,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{512}\left(\left[\frac{\sin 10x}{10}-\frac{\sin 8x}{4}-\frac{\sin 6x}{2}+2\sin 4x+\sin 2x\right]_{\pi/6}^{\pi/3}-6\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})-\frac{1}{2}(0-0)+2(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})-\pi\right)\\ &= -\frac{1}{512}\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}-2\sqrt{3}-\pi\right)=\frac{9\sqrt{3}+4\pi}{2048}.\end{aligned}$$

2. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\cos^4 x \sin^7 x &= \cos^4 x \sin^6 x \sin x = \cos^4 x(1-\cos^2 x)^3 \sin x\\ &= \cos^4 x \sin x - 3\cos^6 x \sin x + 3\cos^8 x \sin x - \cos^{10} x \sin x.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}J &= \left[-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{3\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^9 x}{3}+\frac{\cos^{11} x}{11}\right]_{\pi/6}^{\pi/3}\\ &= -\frac{1}{5}\times\frac{1-9\sqrt{3}}{32}+\frac{3}{7}\times\frac{1-27\sqrt{3}}{128}-\frac{1}{3}\times\frac{1-81\sqrt{3}}{512}+\frac{1}{11}\times\frac{1-243\sqrt{3}}{2048}\\ &= \frac{1}{2^{11}\times 3\times 5\times 7\times 11}(-14784(1-9\sqrt{3})+7920(1-27\sqrt{3})-1540(1-81\sqrt{3})+105(1-243\sqrt{3}))\\ &= \frac{1}{2365440}(-8299+18441\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16 ▲

---

1. $\tan\frac{x}{2}$ existe si et seulement si $x \notin \pi+2\pi\mathbb{Z}$ et $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ existe si et seulement si $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Pour $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}.$$

2. **1 ère solution.** Pour tout réel x,

$$\sin(x-\frac{2\pi}{3})+\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\sin x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0,$$

2 ème solution.

$$\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin x+\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\mathrm{Im}(e^{i(x-\frac{2\pi}{3})}+e^{ix}+e^{i(x+\frac{2\pi}{3})})=\mathrm{Im}(e^{ix}(j^2+1+j))=0.$$

3. $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ et $\frac{2}{\cos(2x)}$ existent si et seulement si $\frac{\pi}{4}-x$, $\frac{\pi}{4}+x$ et $2x$ ne sont pas dans $\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$, ce qui équivaut à $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc, pour $x\notin\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)&=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\ \text{(pour } x \text{ vérifiant de plus } x\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})\\&=\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}+\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{\cos(2x)}\\&=\frac{2}{\cos(2x)}\ \text{(ce qui reste vrai pour } x\in\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

4. Pour $x\notin\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\tan x}-\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{2\cos(2x)}{\sin(2x)}=\frac{2}{\tan(2x)}.$$

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Pour tout réel x, $1-2k\cos x+k^2=(k-\cos x)^2+\sin^2 x\geqslant 0$. De plus,

$$1-2k\cos x+k^2=0\Rightarrow k-\cos x=\sin x=0\Rightarrow x\in\pi\mathbb{Z}\text{ et }k=\cos x\Rightarrow k\in\{-1,1\},$$

ce qui est exclu. Donc,

$$\forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \forall x\in\mathbb{R},\ 1-2k\cos x+k^2>0.$$

f_k est donc définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en vertu de théorèmes généraux, impaire et 2π-périodique. On l'étudie dorénavant sur $[0,\pi]$. Pour $x\in[0,\pi]$, on a :

$$\begin{aligned}f_k'(x)&=\cos x(1-2k\cos x+k^2)^{-1/2}-\frac{1}{2}\sin x(2k\sin x)(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(\cos x(1-2k\cos x+k^2)-k\sin^2 x)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(-k\cos^2 x+(1+k^2)\cos x-k)\\&=(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)(k-\cos x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_k'(x)=\frac{(k\cos x-1)(k-\cos x)}{(1-2k\cos x+k^2)^{3/2}}.}$$

r cas : $|k|<1$ et $k\neq 0$. (si $k=0$, $f_k(x)=\sin x$) Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k\cos x-1)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $\cos x-k$.

x	0		$\operatorname{Arccos} k$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	1	↘	0

(car $f_k(\arccos k)=\frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-2k^2+k^2}}=1$).

2ème cas : $k>1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)>0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $k\cos x-1$.

x	0		$\operatorname{Arccos}\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$\frac{1}{k}$	↘	0

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=\frac{1}{k}$).

3ème cas : $k<-1$. Pour tout réel x, $(1-2k\cos x+k^2)^{-3/2}(k-\cos x)<0$ et $f_k'(x)$ est du signe de $1-k\cos x$.

x	0		$\operatorname{Arccos}\frac{1}{k}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$-\frac{1}{k}$	↘	0

(car $f_k(\arccos\frac{1}{k})=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}{\sqrt{1-2+k^2}}=-\frac{1}{k}$).

2. Pour $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, posons $I_k=\int_0^\pi f_k(x)\,dx$.

   Si $k=0$, $I_k=\int_0^\pi \sin x\,dx=2$. Sinon,

$$I_k=\frac{1}{k}\int_0^\pi\frac{2k\sin x}{2\sqrt{1-2k\cos x+k^2}}\,dx=\frac{1}{k}\left[\sqrt{1-2k\cos x+k^2}\right]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{k}(\sqrt{1+2k+k^2}-\sqrt{1-2k+k^2})=\frac{1}{k}(|k+1|-|k-1|).$$

Plus précisément, si $k\in]-1,1[\setminus\{0\}$, $I_k=\frac{1}{k}((1+k)-(1-k))=2$, ce qui reste vrai pour $k=0$. Si $k>1$, $I_k=\frac{1}{k}((1+k)-(k-1))=\frac{2}{k}$, et enfin, si $k<-1$, $I_k=\frac{-2}{k}$. En résumé,

Si $k\in]-1,1[$, $I_k=2$ et si $k\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$, $I_k=\frac{2}{|k|}$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$. Posons $S_n=\sum_{k=0}^n\cos(kx)$ et $S_n'=\sum_{k=0}^n\sin(kx)$.

1ère solution.

$$S_n + iS'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos(kx) + i\sin(kx)) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k.$$

Maintenant, $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \in 2\pi\mathbb{Z}$. Donc,

1er cas. Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a immédiatement $S_n = n + 1$ et $S'_n = 0$.

2ème cas. Si x$\notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} S_n + iS'_n &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \frac{e^{i(n+1)x/2}}{e^{ix/2}} \frac{e^{-i(n+1)x/2} - e^{i(n+1)x/2}}{e^{-i(n+1)x/2} + e^{i(n+1)x/2}} = e^{inx/2} \frac{-2i\sin\frac{(n+1)x}{2}}{-2i\sin\frac{x}{2}} \\ &= e^{inx/2} \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \begin{cases} \frac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n+1 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin(kx) = \begin{cases} \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \text{ si } x \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 0 \text{ si } x \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

2ème solution.

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos(kx) = \sum_{k=0}^{n}(\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x) \\ &= \left(\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{-x}{2}\right) + \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{(2n-1)x}{2} - \sin\frac{(2n-3)x}{2}\right) \\ &+ \left(\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\right) \\ &= \sin\frac{(2n+1)x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2} \end{aligned}$$

et donc, si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,...

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx)$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$. On a :

$$S_n + S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) + \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1,$$

et

$$S_n - S'_n = \sum_{k=0}^{n}(\cos^2(kx) - \sin^2(kx)) = \sum_{k=0}^{n}\cos(2kx).$$

D'après 1), si $x \in \pi\mathbb{Z}$, on trouve immédiatement,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos^2(kx) = n + 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx) = 0,$$

et si $x \notin \pi\mathbb{Z}$,

$$S_n + S'_n = n + 1 \text{ et } S_n - S'_n = \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x},$$

de sorte que

$$S_n = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right) \text{ et } S'_n = \frac{1}{2}\left(n + 1 - \frac{\cos(nx)\sin(n+1)x}{\sin x}\right).$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx)\right) + i\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx)\right) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{ix})^k 1^{n-k}$$
$$= (1+e^{ix})^n = (e^{ix/2} + e^{-ix/2})^n e^{inx/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{nx}{2} + i\sin\frac{nx}{2}\right).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{nx}{2}\right) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sin(kx) = 2^n \cos^n\left(\tfrac{x}{2}\right)\sin\left(\tfrac{nx}{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

$$\begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\cos a + \cos b + \cos c) + i(\sin a + \sin b + \sin c) = 0 \Leftrightarrow e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0$$
$$\Rightarrow |e^{ia} + e^{ib}| = |-e^{ic}| = 1 \Leftrightarrow |e^{ia/2}e^{ib/2}(e^{i(a-b)/2} + e^{-i(a-b)/2})| = 1$$
$$\Leftrightarrow |\cos\frac{a-b}{2}| = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{2} \in \left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) \Leftrightarrow a - b \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \exists \varepsilon \in \{-1,1\}/\ b = a + \varepsilon\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

Par suite, nécessairement, $e^{ib} = je^{ia}$ ou $e^{ib} = j^2 e^{ia}$. Réciproquement, si $e^{ib} = je^{ia}$ ou encore $b = a + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j)e^{ia} = j^2 e^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a - \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi,$$

et si $e^{ib} = j^2 e^{ia}$ ou encore $b = a - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$e^{ia} + e^{ib} + e^{ic} = 0 \Leftrightarrow e^{ic} = -(e^{ia} + e^{ib}) = -(1+j^2)e^{ia} = je^{ia} \Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}/\ c = a + \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(a, a + \varepsilon\tfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, a - \varepsilon\tfrac{2\pi}{3} + 2k'\pi),\ a \in \mathbb{R},\ \varepsilon \in \{-1,1\},\ (k,k') \in \mathbb{Z}^2\}.}$$

Correction de l'exercice 20 ▲

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}) = 2(\cos^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{\pi}{8})$$
$$= 2\left((\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8})^2 - 2\cos^2\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= 2(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{2}$$

Correction de l'exercice 21 ▲

1.

$$\cos(3x) = \sin(2x) \Leftrightarrow \cos(3x) = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2k\pi) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi)$$
$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z}/\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{[0,2\pi]} = \left\{\tfrac{\pi}{10}, \tfrac{\pi}{2}, \tfrac{9\pi}{10}, \tfrac{13\pi}{10}, \tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{17\pi}{10}\right\}.}$$

2. $\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}((\cos x + i\sin x)^3) = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x.}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\cos(3x) = \sin(2x) &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3 - 2\sin x) = 0\\ &\Leftrightarrow \cos x(-4\sin^2 x - 2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow (\cos x = 0) \text{ ou } (4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0).\end{aligned}$$

D'après 1), l'équation $4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$ admet entre autre pour solutions $\frac{\pi}{10}$ et $\frac{13\pi}{10}$ (car, dans chacun des deux cas, $\cos x \neq 0$), ou encore, l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$ admet pour solutions les deux nombres **distincts** $X_1 = \sin\frac{\pi}{10}$ et $X_2 = \sin\frac{13\pi}{10}$, qui sont donc les deux solutions de cette équation. Puisque $X_1 > 0$ et que $X_2 < 0$, on obtient

$$X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

Donc, (puisque $\sin\frac{13\pi}{10} = -\sin\frac{3\pi}{10}$),

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{10} = \tfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ et } \sin\tfrac{3\pi}{10} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Ensuite, $\sin\frac{3\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{10}\right) = \cos\frac{\pi}{5}$, et donc

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{5} = \tfrac{1+\sqrt{5}}{4}.}$$

Puis

$$\boxed{\cos\tfrac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\tfrac{\pi}{10}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

et de même

$$\boxed{\sin\tfrac{\pi}{5} = \tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = \cos\tfrac{3\pi}{10}}.$$