Enoncés : Barbara Tumpach

# Structure d'espace vectoriel

*Le but de cette feuille d'exercices est de donner des exemples d'espaces vectoriels, et d'apprendre à tester l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs.*

**Exercice 1**

1. En utilisant les opérations d'addition + et de multiplication · de deux nombres, définir, pour chaque ensemble $E$ de la liste ci-dessous :

   une addition $\oplus : E \times E \to E$ ;
   une multiplication par un nombre réel $\odot : \mathbb{R} \times E \to E$.

   (a) $E = \mathbb{R}^n$ ;
   (b) $E$ = l'ensemble des trajectoires d'une particule ponctuelle dans l'espace $\mathbb{R}^3$ ;
   (c) $E$ = l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathcal{S}_1 : x - 2y + 3z = 0$;
   (d) $E$ = l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ du système d'équations.

   $$\mathcal{S}_2 : \begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ;$$

   (e) $E$ = l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + 2y' + 3y = 0$ ;
   (f) $E$ = l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que

   $$y''(x) \sin x + x^3 y'(x) + y(x) \log x = 0, \quad \forall x > 0;$$

   (g) $E$ = l'ensemble des fonctions $\Psi(t, x)$, à valeurs complexes, solutions de l'équation de Schrödinger :

   $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi(t, x) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x, t) + x^2\Psi(t, x)$$

   où $\hbar$ et $m$ sont des constantes ;
   (h) $E$ = l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels ;
   (i) $E$ = l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels ;
   (j) $E$ = l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3 ;
   (k) $E$ = l'ensemble des polynômes $P(x)$ à coefficients réels divisibles par $(x - 1)$ ;
   (l) $E$ = l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles ;
   (m) $E$ = l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$ à valeurs réelles et d'intégrale nulle ;
   (n) $E$ = l'ensemble des fonctions dérivables sur l'intervalle $]0, 1[$ à valeurs réelles ;
   (o) $E$ = l'ensemble des fonctions réelles qui s'annulent en $0 \in \mathbb{R}$.
   (p) $E$ = l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers 0 lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;

2. Pour les opérations d'addition $\oplus$ construites, montrer que $E$ possède un élément neutre (terme à définir), et que chaque élément de $E$ possède un inverse.

[002778]

**Exercice 2**

Qu'est-ce qui empêche de définir les mêmes opérations que dans l'exercice précédent sur les ensembles suivants ?

(a) $E$ = l'ensemble des solutions $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de l'équation $\mathcal{S}_3 : x - 2y + 3z = 3$ ;

(b) $E$ = l'ensemble des fonctions $y(x)$ telles que $y''(x) \sin x + x^3 y^2(x) + y(x) \log x = 0, \forall x > 0$ ;

(c) $E = \mathbb{N}$ ;

(d) $E = \mathbb{Z}$ ;

(e) $E = \mathbb{R}^+$ ;

(f) $E = \mathbb{Q}^n$ ;

(g) $E =$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres positifs ;

(h) $E$ = l'ensemble des fonctions réelles qui prennent la valeur 1 en 0 ;

(i) $E$ = l'ensemble des fonctions réelles qui tendent vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ;

[002779]

---

**Exercice 3**

Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\vec{v_1} = (1, 1, 0)$, $\vec{v_2} = (4, 1, 4)$ et $\vec{v_3} = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$, puis avec $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$.
2. La famille $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ est-elle libre ?

[002780]

---

**Exercice 4**

Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. $\vec{v_1} = (1, 0, 1)$, $\vec{v_2} = (0, 2, 2)$ et $\vec{v_3} = (3, 7, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. $\vec{v_1} = (1, 0, 0)$, $\vec{v_2} = (0, 1, 1)$ et $\vec{v_3} = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\vec{v_1} = (1, 2, 1, 2, 1)$, $\vec{v_2} = (2, 1, 2, 1, 2)$, $\vec{v_3} = (1, 0, 1, 1, 0)$ et $\vec{v_4} = (0, 1, 0, 0, 1)$ dans $\mathbb{R}^5$.
4. $\vec{v_1} = (2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $\vec{v_2} = (1, 1, 2, 1, 3, 1)$ et $\vec{v_3} = (0, -1, 0, 3, 6, 2)$ dans $\mathbb{R}^6$.
5. $\vec{v_1} = (2, 1, 3, -1, 4, -1)$, $\vec{v_2} = (-1, 1, -2, 2, -3, 3)$ et $\vec{v_3} = (1, 5, 0, 4, -1, 7)$ dans $\mathbb{R}^6$.

[002781]

---

**Exercice 5**

On suppose que $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ sont des vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^n$.

1. Les vecteurs $v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_4, \ldots, v_n - v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
2. Les vecteurs $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \ldots, v_n + v_1$ sont-ils linéairement indépendants ?
3. Les vecteurs $v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, v_1+v_2+v_3+v_4, \ldots, v_1+v_2+\cdots+v_n$ sont-ils linéairement indépendants?

[002782]

---