Enoncés : Stephan de Bièvre
Corrections : Johannes Huebschmann

Fonctions et topologie élémentaire de $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

1. Tracer le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$ et tracer les lignes de niveau de cette fonction.
2. Tracer les graphes des fonctions f et g définies par $f(x, y) = 25 - (x^2 + y^2)$ et $g(x, y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 25\}$.
3. Tracer le graphe de la courbe paramétrée $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x \cos x, x \sin x)$.
4. Peut-on représenter graphiquement de façon différente l'application de la question (3.)? Comment?
5. Décrire les surfaces de niveau de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \exp(x + y^2 - z^2)$.
6. Pourquoi ne peut-t-on pas naïvement représenter le graphe de l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = (-y, x),$$

sur une feuille de papier. Comment peut-on graphiquement représenter cette application?

Indication ▼ Correction ▼ [002616]

Exercice 2

Déterminer si chacune des parties suivantes du plan est ouverte ou fermée, ou ni l'une ni l'autre. Déterminer chaque fois l'intérieur et l'adhérence.

1. $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2y^2 > 1\}$,
2. $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y > 0\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002617]

Exercice 3

1. Soient $B_1 \subset \mathbb{R}^n$ et $B_2 \subset \mathbb{R}^m$ des boules ouvertes. Montrer que $B_1 \times B_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$ est un ouvert.
2. Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et B un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Indication ▼ Correction ▼ [002618]

Exercice 4

1. Soit (A_n) $(n \in \mathbb{N})$ une suite de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que la réunion des A_n est encore une partie ouverte? Et leur intersection?
2. Même question pour une famille de parties fermées.

Indication ▼ Correction ▼ [002619]

Exercice 5

Soit $A = \{(t, \sin \frac{1}{t}) \in \mathbb{R}^2; t > 0\}$. Montrer que A n'est ni ouvert ni fermé. Déterminer l'adhérence $\overline{A}$ de A.

Indication ▼ Correction ▼ [002620]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Utiliser le langage de la géométrie élémentaire, y compris les notions de surface de révolution, d'axe de révolution, de sommet d'un paraboloïde, de sommet d'un cône, de concavité vers le haut ou vers le bas, d'hélice, de spirale, etc.

Indication pour l'exercice 2 ▲

Exploiter les propriétés géométriques des parties du plan qui définissent A_1 et A_2. Par exemple, une courbe qui est définie comme étant l'image réciproque d'un point relativement à une fonction continue est une partie fermée du plan.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Raisonner à partir de la définition d'un ouvert dans le plan.

Indication pour l'exercice 4 ▲

Exploiter le fait que le complémentaire d'un ouvert est fermé et que le complémentaire d'un fermé est ouvert.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Distinguer la partie triviale de l'exercice de la partie non triviale. Dans cet exercice, le seul point délicat est pour le paramètre t proche de 0.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Le graphe est bien un paraboloïde de révolution ayant l'origine pour sommet, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le haut. Les lignes de niveau sont les cercles $x^2 + y^2 = z_0,\ z_0 = c$, $c > 0$ étant une constante; pour $c = 0$ c'est le somment, c.a.d. l'origine.

2. Le graphe de la fonction f est un paraboloïde de révolution ayant le point $(0, 0, 25)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2 + y^2 = 25 - z_0,\ z_0 = c$, $c < 25$ étant une constante qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 25$.

   Le graphe de la fonction g est un demi-cône de révolution ayant le point $(0, 0, 5)$ pour sommet et plafonné par le plan des x et y, d'axe de révolution l'axe des z, et dont la concavité tourne vers le bas. Les lignes des niveau sont les cercles $x^2 + y^2 = (5 - z_0)^2$, $z_0 = c$ étant une constante telle que $0 \leqslant c \leqslant 5$ qui dégénèrent en un point, le sommet, pour $c = 5$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (x, y, z), avec $f(x) = (y, z)$, le graphe en discussion est une hélice sur le cône de révolution $y2 + z^2 = x^2$.

4. Le support de cette courbe paramétrée est une spirale planaire qui rencontre l'origine et dont la pente à l'origine vaut zéro.

5. Pour que $f(x, y, z) = \exp(x + y^2 - z^2)$ soit constant il faut et il suffit que $x + y^2 - z^2$ soit constant. Les surfaces de niveau en discussion sont donc les surfaces $x + y^2 - z^2 = c$. Ce sont des paraboloïdes hyperboliques.

6. Le graphe de l'application f en discussion est une surface dans $\mathbb{R}^4$, et la dimension 4 est trop grande pour représenter, sur une feuille de papier, ce graphe plongé dans $\mathbb{R}^4$. L'application f est un champs de vecteurs dans le plan cependant. De façon générale, on peut représenter graphiquement le champ de vecteurs $X\colon U \to \mathbb{R}^2$ dans l'ouvert U du plan en dessinant, au point (u_1, u_2) de U, le vecteur $X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2))$.

   N.B. Quand on représente une surface dans l'espace de dimension 3 ordinaire par un dessin sur une feuille de papier, en vérité on ne dessine qu'une projection de l'espace de dimension 3 sur un plan.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La partie A_1 est ouverte. Car la courbe $x^2y^2 = 1$ a quatre branches, les deux branches de $xy = 1$ et les deux branches de $xy = -1$; ces quatre branches coupent le plan en cinq parties dont une contient l'origine. La courbe $x^2y^2 = 1$ étant une partie fermée, le complémentaire est un ouvert qui est réunion de cinq ouverts. La partie A_1 est la réunion des quatre parties qui ne contiennent pas l'origine. Puisque A_1 est ouvert, A_1 coïncide avec son intérieur. L'adhérence de A_1 est la réunion de A_1 avec les quatre branches de la courbe $x^2y^2 = 1$.

2. La partie A_2 est le demi-cercle de rayon 1 ayant l'origine pour centre constitué des angles $0 < \varphi < \pi$ en radians et ce n'est ni ouvert ni fermé. La partie A_2 n'est pas ouverte car aucun disque de rayon positif n'est dans A_2; elle n'est pas fermée car les points $(\pm 1, 0)$ sont des points d'adhérence qui n'appartiennent pas à A_2. L'adhérence de A_2 est la partie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geqslant 0\}$$

   du plan.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soient q_1 un point de B_1 et q_2 un point de B_2, soient d_1 resp. d_2 la distance de q_1 au bord de B_1 resp. la distance de q_2 au bord de B_2, et soit $0 < d \leqslant \min(d_1, d_2)$. Alors la boule ouverte dans $\mathbb{R}^{n+m}$ centrée en (q_1, q_2) et de rayon d est dans $B_1 \times B_2$.

2. Soient p un point de A, q un point de B, soit B_1 un disque ouvert dans A contenant p, et soit B_2 un intervalle ouvert dans B contenant q. D'après (1.), $B_1 \times B_2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ tel que $B_1 \times B_2 \subseteq A \times B$ et (p, q) appartient à $B_1 \times B_2$. Par conséquent, $A \times B$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. La réunion $\cup_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. En effet, soit q un point de $\cup_n A_n$. Alors il existe n_0 tel que q appartienne à A_{n_0}. Puisque A_{n_0} est ouvert, il existe un disque ouvert D dans A_{n_0} tel que q appartienne à D. Par conséquent, il existe un disque ouvert D dans $\cup_n A_n$ tel que q appartienne à D.

   L'intersection $\cap_n A_n$ d'une suite de parties ouvertes A_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement ouverte. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, l'intersection des intervalles ouverts $]-1/n, 1/n[$ est la partie $\{0\} \subseteq \mathbb{R}$ qui n'est pas ouverte.

2. La réunion $\cup_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ n'est pas nécessairement une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $C(\cup_n B_n)$ de $\cup_n B_n$ est l'intersection $\cap_n CB_n$ des complémentaires et c'est donc l'intersection d'une suite (CB_n) de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), n'est pas nécessairement une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. De même, l'intersection $\cap_n B_n$ d'une suite de parties fermées B_n de $\mathbb{R}^2$ est bien une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. Car le complémentaire $C(\cap_n B_n)$ de $\cap_n B_n$ est la réunion $\cup_n CB_n$ des complémentaires et c'est donc la réunion d'une suite (CB_n) de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ qui, d'après (1.), est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 5 ▲

La partie A du plan n'est pas ouverte puisqu'elle ne contient aucun disque ouvert. Cette partie A n'est pas fermée non plus: L'origine est un point d'adhérence: Quel que soit le disque ouvert B centré à l'origine, il existe un point de B qui appartient à A. Mais l'origine n'appartient pas à A d'où A n'est pas fermé. L'adhérence $\overline{A}$ de A est la réunion $A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Car quelle que soit la suite (x_n) de points de $A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ telle que cette suite converge dans le plan, la limite appartient à $A \cup (\{0\} \times [-1, 1])$.