Enoncés et corrections : Sandra Delaunay

Sujets de l'année 2008-2009

1 Partiel

Exercice 1

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que
$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
montrer qu'alors
$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2.$$
2. Soit le vecteur $\vec{x} = (1, -1)$, vérifier que $\vec{x}$ est un vecteur propre de A, et déterminer sa valeur propre.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A et calculer ses racines.
4. Déterminer un vecteur propre, $\vec{y}$, de A non colinéaire à $\vec{x}$ et exprimer la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base $(\vec{x}, \vec{y})$.

Correction ▼ [002611]

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x, y, z) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer les sous-espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Soient $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. Démontrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.
4. Calculer $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminer la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.
5. Déterminer les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.

Correction ▼ [002612]

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. Démontrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.

2. On suppose maintenant que $n = 4$.

   (a) Démontrer que pour tout $\vec{x} \in E, \vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.

   (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.

      i. Démontrer que F est stable par f.

      ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$, démontrer que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E.

   (c) Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

   (d) Calculer $\det f$ et $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (e) L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?

Correction ▼ [002613]

2 Examen

Exercice 4

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$

   (a) Déterminer les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.

   (b) Trouver D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et

$$A = D + N.$$

3. Soit le système différentiel suivant:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_3(t) \end{cases}$$

   Déterminer les solutions de $\mathcal{E}$.

Correction ▼ [002614]

Exercice 5

Questions préliminaires :

(a) Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ. Démontrer que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Énoncer le théorème de Hamilton-Cayley.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de A. Donner une base de vecteurs propres de A et diagonaliser A.
2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.
   (a) Démontrer que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.
   (b) En supposant que B est à valeurs propres réelles, déterminer les valeurs propres de B et leur multiplicité.
   (c) Écrire le polynôme caractéristique de B.
   (d) Déterminer B telle que $B^3 = A$.

Correction ▼ [002615]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit A une matrice 2×2 à coefficients réels.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On suppose $a + c = b + d = 1$ et $a - b \neq 1$.

1. Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, tels que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

On montre que $y_1 + y_2 = x_1 + x_2$.

On a

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

d'où $y_1 + y_2 = ax_1 + bx_2 + cx_1 + dx_2 = (a + c)x_1 + (b + d)x_2 = x_1 + x_2$.

2. *Soit le vecteur* $\vec{x} = (1, -1)$*, vérifions que* $\vec{x}$ *est un vecteur propre de A, et déterminons sa valeur propre.*

$$A.\vec{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ c - d \end{pmatrix},$$

or $c - d = (1 - a) - (1 - b) = -(a - b)$, car $a + b = c + d = 1$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ -(a - b) \end{pmatrix} = (a - b) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{x}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre $a - b$.

3. *Déterminons le polynôme caractéristique de A et calculons ses racines.*

Tout d'abord, compte tenu de l'hypothèse $a + b = c + d = 1$, nous écrirons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix}.$$

D'où

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & b \\ 1 - a & 1 - b - X \end{vmatrix} = (a - X)(1 - b - X) - b(1 - a) = X^2 - (a - b + 1)X + (a - b).$$

On sait, d'après la question précédente que $a - b$ est racine de ce polynôme, or, le produit des racines est égal à $a - b$ et la somme à $a - b + 1$, ainsi la seconde racine est égale é 1.

4. *Déterminons un vecteur propre,* $\vec{y}$*, de A non colinéaire à* $\vec{x}$ *et exprimons la matrice de l'endomorphisme défini par A dans la base* $(\vec{x}, \vec{y})$.

Un vecteur propre non colinéaire à $\vec{x}$ est vecteur propre pour la valeur propre 1. Ainsi, si on note $\vec{y} = (y_1, y_2)$, on a

$$A\vec{y} = \vec{y} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 1 - a & 1 - b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} ay_1 + by_2 & = y_1 \\ (1 - a)y_1 + (1 - b)y_2 & = y_2 \end{cases} \iff (a - 1)y_1 + by_2 = 0.$$

Le vecteur $\vec{y} = (b, 1 - a)$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E, si $\vec{u}$ est un vecteur de E on note (x, y, z) ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. Soit f une application linéaire de E dans lui-même, définie par

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - z \\ 2x + 2z \\ 4x - 2y + 4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1. *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.*

   On a $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$, $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$ et $f(\vec{e}_3) = (-1, 2, 4)$. D'où la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. *Déterminons les sous-espaces* $\ker f$ *et* $\operatorname{Im} f$.

   Le sous-espace vectoriel $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1)$, $f(\vec{e}_2)$ et $f(\vec{e}_3) = f(\vec{e}_1)$, c'est donc le plan vectoriel engendré par les vecteurs $f(\vec{e}_1) = (-1, 2, 4)$ et $f(\vec{e}_2) = (1, 0, -2)$ qui sont clairement linéairement indépendants.

   Pour le noyau, on a $\ker f = \{\vec{u} \in E,\ f(\vec{u}) = \vec{0}\}$, ainsi,

   $$\vec{u} = (x, y, z) \in \ker f \iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2(x + z) = 0 \\ 4x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

   C'est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{v} = (1, 0, -1)$.

3. Soient $\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{u}_2 = (1, 2, 0)$ et $\vec{u}_3 = (0, 1, 1)$. *Démontrons que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de E.*

   Pour cela nous allons vérifier que le déterminant de leurs coordonnées est non nul,

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

   Ainsi, les trois vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont linéairement indépendants, ils forment donc une base de E, car E est de dimension 3.

4. *Calculons $f(\vec{u}_1)$, $f(\vec{u}_2)$ et $f(\vec{u}_3)$ et déterminons la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.*

   On a $f(\vec{u}_1) = \vec{0}$,

   $$f(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} -1 + 2 \\ 2 \\ 4 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}_2.$$

   $$f(\vec{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{u}_3.$$

   Ainsi la matrice B de f dans la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ s'écrit

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. *Déterminons les valeurs propres de f et, pour chacune, un vecteur propre.*

   D'après la question précédente, les valeurs propres de f sont 0, 1 et 2, et les vecteurs propres sont $\vec{u}_1$ pour la valeur propre 0, $\vec{u}_2$ pour la valeur propre 1 et $\vec{u}_3$ pour la valeur propre 2.

Correction de l'exercice 3 ▲

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On cherche à déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n. On notera f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

1. *Démontrons que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.*

   Supposons qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$, on a alors

   $$\det(A^2) = (\det A)^2 = (-1)^n,$$

   ce qui implique n pair, car un carré est toujours positif.

2. On suppose maintenant que $n = 4$.

   (a) *Démontrons que pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} \neq 0$, les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.*
   Soit $\vec{x} \in E$, on suppose $\vec{x} \neq 0$, supposons qu'il existe des réels a, b tels que $a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0}$, on a alors

   $$a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \Longrightarrow f(a\vec{x} + bf(\vec{x})) = \vec{0} \Longrightarrow af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0},$$

   car $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Or,

   $$\begin{cases} a\vec{x} + bf(\vec{x}) = \vec{0} \\ af(\vec{x}) - b\vec{x} = \vec{0} \end{cases} \Longrightarrow (a^2 + b^2)\vec{x} = \vec{0},$$

   ce qui implique $a^2 + b^2 = 0$ car $\vec{x} \neq \vec{0}$, et, donc $a = b = 0$. Ce qui prouve que les vecteurs $\vec{x}$ et $f(\vec{x})$ sont linéairement indépendants.

   (b) Soit $\vec{x}_1 \neq 0$, on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$.

   i. *Démontrons que F est stable par f.*
   Soit $\vec{x} \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{x} = a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)$, d'où

   $$f(\vec{x}) = f(a\vec{x}_1 + bf(\vec{x}_1)) = af(\vec{x}_1) + bf^2(\vec{x}) = af(\vec{x}_1) - b\vec{x}_1 \in F.$$

   D'où la stabilité de F par f.

   ii. Soit $\vec{x}_2 \in E$, on suppose que $\vec{x}_2 \notin F$.
   Démontrons que $\mathcal{B} = (\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2))$ est une base de E. La dimension de E étant égale à 4, il suffit de démontrer que les vecteurs sont linéairement indépendants. Supposons qu'il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que

   $$a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) + a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) = \vec{0},$$

   on a alors,

   $$a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2) \in F,$$

   et, comme F est stable par f,

   $$f(a_2\vec{x}_2 + b_2 f(\vec{x}_2)) = a_2 f(\vec{x}_2) - b_2\vec{x}_2 \in F.$$

   Ce qui implique

   $$(a_2^2 + b_2^2)\vec{x}_2 \in F \quad \text{d'où} \quad a_2^2 + b_2^2 = 0$$

   car on a supposé $\vec{x}_2 \notin F$. On a donc $a_2 = b_2 = 0$ et, par conséquent, $a_1\vec{x}_1 + b_1 f(\vec{x}_1) = 0$, or les vecteurs $\vec{x}_1$ et $f(\vec{x}_1)$ sont linéairement indépendants, ce qui implique $a_1 = b_1 = 0$. D'où l'indépendance des vecteurs $\vec{x}_1, f(\vec{x}_1), \vec{x}_2, f(\vec{x}_2)$.

(c) *Ecrivons la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.*
On calcule les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$. On a $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_1)$, $f(f(\vec{x}_1)) = -\vec{x}_1$, $f(\vec{x}_2) = f(\vec{x}_2)$, $f(f(\vec{x}_2)) = -\vec{x}_2$. D'où la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) *Calculons* $\det f$ *et* $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$ *pour* $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a, en développant par blocs,

$$\det f = \det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

De même,

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = \det(\lambda I_4 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 + 1)^2.$$

(e) *L'endomorphisme f admet-il des valeurs propres réelles ?*
Les valeurs propres réelles de f sont les réels λ qui annulent $\det(\lambda \mathrm{id}_E - f)$, ce sont donc les réels λ tels que $\lambda^2 + 1 = 0$. Ainsi, f n'admet pas de valeurs propres réelles.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et A la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Donnons les valeurs de a et de b pour lesquelles la décomposition de Dunford de A est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cette décomposition de $A = D + N$ est sa décomposition de Dunford si et seulement si N est nilpotente (il est clair que D est diagonale) et si $ND = DN$.

Vérifions que N est nilpotente :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi la matrice N est bien nilpotente quelques soient les valeurs de a et b. Déterminons pour quelles valeurs de a et b les matrices commutent.

$$N.D = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$D.N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $ND = DN$ si et seulement si $b = 2b$, c'est-à-dire si $b = 0$. Le paramètre a peut prendre n'importe quelle valeur.

2. On suppose dans la suite que $b = 1$ et $a \neq 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) *Déterminons les sous espaces propres et les sous espaces caractéristiques de A.*
Commençons par déterminer les valeurs propres de A, ce qui est immédiat car A est sous forme triangulaire. Elle admet donc deux valeurs propres, 1 valeur propre double et 2 valeur propre simple. Notons E_1 et E_2 les sous-espaces propres de A.

$$E_1 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = \vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_1 \iff \begin{cases} x + ay &= x \\ y + z &= y \\ 2z &= z \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

L'espace E_1 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 0)$, ce sous-espace propre associé à la valeur propre double 1 est de dimension 1, la matrice n'est pas diagonalisable.

$$E_2 = \{\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ A\vec{u} = 2\vec{u}\}.$$

On a

$$\vec{u} \in E_2 \iff \begin{cases} x + ay &= 2x \\ y + z &= 2y \\ 2z &= 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= ay \\ y &= z \end{cases}$$

L'espace E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(a, 1, 1)$. La valeur propre 2 étant simple, le sous-espace caractéristique N_2 associé est égal à l'espace E_2.
Déterminons le sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1. On a
$N_1 = \ker(A - I)^2$. Calculons la matrice $(A - I)^2$.

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, le noyau de $(A - I)^2$ est le plan engendré par les vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$.

(b) *Déterminons D diagonalisable et N nilpotente telles que D commute avec N et*

$$A = D + N.$$

Notons $\vec{e}_3 = (a, 1, 1)$, dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, la matrice associée à l'endomorphisme représenté par A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M}.$$

Par construction, c'est la décomposition de Dunford de B et on a $A = PBP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $D = P\Delta P^{-1}$ et $N = PMP^{-1}$ vérifient, N nilpotente, D diagonalisable et $ND = DN$. Calculons les

$$D = P\Delta P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A - D.$$

Ainsi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = N + D = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Soit le système différentiel suivant:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x_1'(t) &= x_1(t) + 2x_2(t) \\ x_2'(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\ x_3'(t) &= 2x_3(t) \end{cases}$$

Déterminons les solutions de $\mathcal{E}$.

Remarquons que, si l'on note $X = (x_1, x_2, x_3)$, le système $\mathcal{E}$ s'écrit $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui correspond à la matrice A précédente avec $a = 2$ et $b = 1$. La solution générale du système s'écrit

$$X(t) = \exp(tA)V$$

où $V = (a, b, c)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs $X = PY$ est solution de $X' = AX \iff Y$ est solution de $Y' = \underbrace{P^{-1}AP}_{B}Y$. La solution générale du système $Y' = BY$ s'écrit $Y = \exp(tB)V$ où $V \in \mathbb{R}^3$. Calculons donc l'exponentielle de la matrice tB pour $t \in \mathbb{R}$. On a vu dans la question précédente que $B = \Delta + M$ avec $\Delta M = M\Delta$, ainsi

$$\begin{aligned} \exp(tB) &= \exp(t\Delta).\exp(tM) \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}.(I + tM) \quad \text{car } M^2 = O \\ &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La solution générale du système $\mathcal{E}$ s'écrit donc $X = P\exp(tB).V$ où $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. C'est-à-dire

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 2te^t & 2e^{2t} \\ 0 & e^t & e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

où encore

$$\begin{cases} x_1(t) &= (a + 2bt)e^t + 2ce^{2t} \\ x_2(t) &= be^t + ce^{2t} \\ x_3(t) &= ce^{2t} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Questions préliminaires :

(a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Soit λ une valeur propre de u et $\vec{x}$ un vecteur propre associé à λ.

Démontrons que $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

On a $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$, et, par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n(\vec{x}) = \lambda^n\vec{x}$. Notons $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_dX^d$, l'endomorphisme $P(u)$ vérifie

$$\begin{aligned} P(u)(\vec{x}) &= (a_0\mathrm{id}_E + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_du^d)(\vec{x}) \\ &= a_0\vec{x} + a_1\lambda\vec{x} + a_2\lambda^2\vec{x} + \cdots + a_d\lambda^d\vec{x} \\ &= P(\lambda)\vec{x} \end{aligned}$$

ce qui prouve que le vecteur $\vec{x}$ est vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ pour la valeur propre $P(\lambda)$.

(b) Théorème de Hamilton-Cayley. Soient E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E. Soit P le polynôme caractéristique de u, alors $P(u) = 0$ (le zéro étant celui de l'ensemble des endomorphisme de E)

Version matricielle : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice et P_A son polynôme caractéristique, alors $P_A(A) = 0$ (le zéro étant celui de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 9 \\ 9 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

1. *Déterminons les valeurs propres de A.*

   Pour cela calculons son polynôme caractéristique :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1 - X & 0 & 0 \\ -9 & 1 - X & 9 \\ 9 & 0 & -8 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^2(-8 - X).$$

   La matrice A admet deux valeurs propres, 1 valeur propre double et -8 valeur propre simple.

   Déterminons une base de vecteurs propres de A.

   Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a

$$A.\vec{u} = \vec{u} \iff \begin{cases} x &= x \\ -9x + y + 9z &= y \\ 9x - 8z &= z \end{cases} \iff x = z$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est un plan vectoriel dont les vecteurs $\vec{e}_1 = (0, 1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (1, 0, 1)$ forment une base.

Soit $\vec{u} = (x, y, z)$ un vecteur propre associé à la valeur propre -8, on a

$$A.\vec{u} = -8\vec{u} \iff \begin{cases} x & = -8x \\ -9x + y + 9z & = -8y \\ 9x - 8z & = -8z \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ z & = -y \end{cases}$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre -8 est une droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{e}_3 = (0, 1, -1)$.

Les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ci-dessus forment une base de E composée de vecteurs propres de A.

Diagonalisons A.

Dans cette base, la matrice s'écrit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ et on a $A = PDP^{-1}$ avec

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On cherche à déterminer une matrice B telle que $B^3 = A$.

   (a) *Démontrons que si λ est une valeur propre de B alors λ^3 est une valeur propre de A.*
   On considère le polynôme $P(X) = X^3$, on applique la question préliminaire a). Si λ est une valeur propre de B, alors $P(\lambda) = \lambda^3$ est une valeur propre de $A = P(B) = B^3$.

   (b) *Déterminons les valeurs propres de B et leur multiplicité.*
   Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de B (elles existent toujours dans $\mathbb{C}$) et $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ les vecteurs propres associés, alors ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de A pour les valeurs propres $\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$. Sachant que les valeurs propres de A sont 1,1 et -8, on a $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 1$ et $\lambda_3^3 = -8$. Ainsi les valeurs propres de B sont 1 de multiplicité 2 et -2 de multiplicité 1.

   (c) *Ecrivons le polynôme caractéristique de B.*
   Compte tenu de la question précédente, on a

   $$P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X).$$

   (d) *Déterminons B telle que $B^3 = A$.*
   On a $P_B(X) = (1 - X)^2(-2 - X) = -X^3 + 3X - 2$, or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_B(B) = 0$, c'est-à-dire $-B^3 + 3B - 2I = 0$, par conséquent

   $$A = B^3 = 3B - 2I.$$

   Ainsi, $B = 1/3(A + 2I)$, d'où,

   $$B = 1/3\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 9 \\ 9 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarque (Pour aller plus loin) : La solution B trouvée ci-dessus n'est pas l'unique matrice à coefficients réels vérifiant $B^3 = A$. Elle est l'unique solution si l'on impose à B d'être à valeurs propres réelles (ou d'être un polynôme en A).

Cependant, le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1 est de dimension 2. Sur ce plan, A agit comme l'identité. On peut choisir pour B un endomorphisme qui agit sur ce plan comme une rotation d'angle $\pm\frac{2\pi}{3}$ (dont le cube est l'identité). Dans la base de diagonalisation, une telle matrice s'écrirait :

$$B' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

En repassant dans la base canonique par le calcul $B = PB'P^{-1}$, on obtient une autre matrice réelle solution :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-3-\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-4+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$