Enoncés : M. Quéffelec, V. Mayer, T. Tahani, F. Sarkis
Corrections : F. Sarkis

Sous-variétés

Exercice 1

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda\}$.

1. Déterminez les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. Dessiner S_λ en fonction de λ.
2. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, soit $B(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$. Soit $x \in S_\lambda$, exprimer T_xS_λ à l'aide de B.

Correction ▼ [002547]

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $||x|| =< x, x >= \sum_{i=1}^n x_i^2$ où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire telle que $< u(x), y >=< x, u(y) >$ et soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n; < u(x), x >= 1\}$. Montrez que Q est une sous-variété et déterminez le plan tangent.

Correction ▼ [002548]

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\theta, \varphi) = (\cos\theta(1 + 1/2\cos\varphi), \sin\theta(1 + 1/2\cos\varphi), 1/2\sin\varphi)$ et soit $T = f(\mathbb{R}^2)$.

1. Soit R_θ la rotation d'angle θ autour de $(0z)$, et soit $C = \{(1 + 1/2\cos\varphi, 0, 1/2\sin\varphi); \varphi \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $f(\mathbb{R}^2) = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}} R_\theta(C)$. Dessiner T.
2. Montrer que $f(\theta, \varphi) = f(\theta_0, \varphi_0)$ si et seulement si il existe $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ et $\varphi = \varphi_0 + 2l\pi$.
3. Montrer que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, $f(U)$ est un ouvert de T.
4. Montrer que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

[002549]

Exercice 4

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ définie par $f(A) = det(A)$.

1. Montrer que $\lim_{\lambda\to 0} \frac{det(I+\lambda X)-1}{\lambda} = tr(X)$ (penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{Id_n}f(X)$.
2. En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)\frac{det(I+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$, pour A inversible, calculer $D_Af(X)$ lorsque A est inversible.
3. Montrer que $Sl_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 1$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in M_n(\mathbb{R}); tr(X) = 0\}$.

[002550]

Exercice 5

Soit E l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n. Soit $f : \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to E$ définie par $f(A) = {}^tAA$.

1. Montrer que $D_Af(X) = {}^tAX + {}^tXA$.

2. Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in E$ et $X = 1/2AS$. Montrer que $D_A f(X) = S$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n-1)/2$, dont l'espace tangent en Id est $\{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R});\ {}^tX = -X\}$.

[002551]

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $a \in E$ et $f : E \to E$ un difféomorphisme de classe C^1. On suppose que $f^n = Id$ et $f(a) = a$. On pose $A = D_a f$ et $u(x) = \sum_{p=1}^{n} A^{-p} f^p(x)$ pour $x \in E$.

1. Montrer que u est un difféomorphisme local en a tel que $u \circ f = A \circ u$.

2. Soit F l'ensemble des points fixes de f. Montrer que F est une sous-variété de E.

3. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (x, y + y^3 - x^2)$. Montrer que g est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$. En déduire que le point 2 n'est plus nécessairement vrai si on supprime l'hypothèse $f^n = Id$.

[002552]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Considérons $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - \lambda$. Alors F est de classe C^1, $JacF(x_1, x_2, x_3) = (2x_1, 2x_2, -2x_3)$ et $S_\lambda = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; F(x_1, x_2, x_3) = 0\}$. Si $\lambda \neq 0$, $\text{rang}(JacF(x_1, x_2, x_3)) = 1$ (le maximum possible) car sinon x_1, x_2, x_3 seraient tous nuls: impossible car $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = \lambda \neq 0$. Comme $(0, 0, 0) \notin S_\lambda, \forall a \in S_\lambda$, $\text{rang} JacF(a) = 1$ et donc S_λ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.
   Si $\lambda = 0$ $T_0(S_\lambda) = \{\text{vecteurs tangents à } S_n \text{ en } 0\}$. Alors $T_0 S_0$ est un cône et donc S_0 n'est pas une sous-variété.

2. Soientt $x, y \in \mathbb{R}^3$, $B(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$ et $x \in S_\lambda$. Si $\lambda \neq 0$, $JacF(x) = (2x_1, 2x_2, -2x3)$ et donc

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3; DF(x).u = 0\} = \{u = (u_1, u_2, u_3); (2x_1, 2x_2, -2x_3).\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0\} =$$

$$\{(u_1, u_2, u_3); 2x_1u_1 + 2x_2u_2 - 2x_3u_3 = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3); 2B(x, u) = 0\}$$

   d'où

$$T_x S_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^3; B(x, u) = 0\}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Cas de $\mathbb{R}^2$.

$$u = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse sur u implique que $u_{12} = u21$. Si $x = (x_1, x_2)$, on a

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

et

$$< u(x), x >= \sum_{i=1}^{2} u_i(x)x_i = (u_{11}x_1 + u_{12}x_2)x_1 + (u_{21}x_1 + u_{22}x_2)x_2 = u_{11}x_1^2 + u_{12}x_1x_2 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2.$$

Posons $f(x) =< u(x), x > -1$ alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{21}x_2 = 2u_{11}x_1 + 2u_{12}x_2$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2u_{22}x_2 + u_{12}x_1 + u_{21}x_1 = 2u_{21}x_1 + 2u_{22}x_2.$$

Calculons

$$Df(x).x = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(u_{11}x_1^2 + u_{12}x_2x_1 + u_{21}x_1x_2 + u_{22}x_2^2) = 2 < u(x), x > .$$

Si $x = (x_1, x_2) \in Q$ alors $< u(x), x >= 1 \neq 0$ et donc $Df(x)$ étant non nul, il est de rang au moins 1 et donc de rang maximal. Q est bien une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension 1.
Déterminons le plan tangent de Q.

$$T_x Q = \{y \in \mathbb{R}^2; Df(x)(y) = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)y_i = 0\} =$$

$$\{y \in \mathbb{R}^n; 2 < u(x), y >= 0\}.$$