Enoncés : A. Bodin, V. Mayer Corrections : A. Bodin

# Théorème de Stone-Weierstrass – Théorème d'Ascoli

## Théorème de Stone-Weierstrass

### Exercice 1

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_a^b f(t)t^n\,dt = 0.$$

Montrer que $f$ est la fonction nulle.

Indication ▼ Correction ▼ [002408]

### Exercice 2

Montrer qu'une fonction de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant une limite finie en $+\infty$ n'est pas limite uniforme de polynômes de $\mathbb{R}[x]$.

Indication ▼ [002409]

### Exercice 3

Soit $E$ un espace compact. Soit $f_i$, $i = 1,\dots,n$ une famille de $n$ éléments de $C(E,\mathbb{R})$ qui sépare les points de $E$. Montrer que $E$ est homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Indication ▼ Correction ▼ [002410]

### Exercice 4

Soient $X$ et $Y$ deux espaces métriques compacts. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies $f \in C(X\times Y,\mathbb{R})$ de la forme :

$$f(x,y) = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i(x)\cdot v_i(y), \quad \text{avec } u_i \in C(X,\mathbb{R}), v_i \in C(Y,\mathbb{R}), \lambda_i \in \mathbb{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que toute fonction de $C(X\times Y,\mathbb{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathcal{A}$.

Indication ▼ Correction ▼ [002411]

## Théorème d'Ascoli

### Exercice 5

1. Soit $k > 0$ et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions différentiables $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que $|f'(t)| \leqslant k$ pour tout $t \in ]a,b[$. Montrer que $\mathcal{F}$ est une famille équicontinue.
2. Si $L > 0$ et $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une suite d'applications $L$-lipschitziennes avec $\|f_n(0)\| = \sqrt{2}$, alors montrer que l'on peut extraire une sous-suite convergente de $(f_n)$.

Indication ▼ Correction ▼ [002412]

### Exercice 6

Soient $E, F$ des espaces normés et $(f_n)$ une suite d'applications de $E$ dans $F$ équicontinue en $a \in E$. Montrer que, si la suite $(f_n(a))$ converge vers $b$, alors $(f_n(x_n))$ converge également vers $b$, si $(x_n)$ est une suite de $E$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
L'équicontinuité est-elle nécessaire ici?

Indication ▼ Correction ▼ [002413]

**Exercice 7**

Soient $E, F$ des espaces normés et $(f_n)$ une suite d'applications équicontinues de $E$ dans $F$. Montrer que l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $F$, est un fermé.

Correction ▼ [002414]

**Exercice 8**

Soit $(E, d)$ un espace métrique et $\mathcal{H}$ une famille équicontinue d'applications de $E$ dans $\mathbb{R}$. Établir:

1. L'ensemble $A$ des $x \in E$ pour lesquels $\mathcal{H}(x)$ est borné est ouvert et fermé.
2. Si $E$ est compact et connexe et si $\mathcal{H}(x_0)$ est borné pour un point quelconque $x_0 \in E$, alors $\mathcal{H}$ est relativement compact dans $C(E, \mathbb{R})$.

Indication ▼ Correction ▼ [002415]

**Exercice 9**

On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergeant simplement vers $f \equiv 0$.
2. La suite $(f_n)$ est-elle relativement compacte dans $(C_b([0, \infty[), \|.\|_\infty)$, l'ensemble des fonctions continues et bornées ? Que dit le théorème d'Ascoli?

Indication ▼ Correction ▼ [002416]

**Exercice 10**

Soit $K : C([a, b]) \to C([a, b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t)\, dt$, $k \in C([a, b] \times [a, b])$, et soit $(f_n)$ une suite bornée de $X = (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

1. Rappeler pourquoi $k$ est uniformément continue.
2. En déduire l'équicontinuité de $(Kf_n)$.
3. Montrer que $(Kf_n)$ contient une sous-suite convergente dans $X$.

Correction ▼ [002417]

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Approcher $f$ par une suite de polynômes, et se rappeler que si l'intégrale d'une fonction positive et continue est nulle alors...

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

Raisonner par l'absurde.

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

Considérer l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \ldots, f_n)$.

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Appliquer le théorème de Stone-Weierstrass.

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

Pour la deuxième question :

1. Montrer que $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est équicontinue.
2. Montrer que $\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
3. Applique le théorème d'Acoli sur le compact $\bar{B}(0, R)$.
4. Utiliser le procédé diagonal de Cantor ($R = 1, 2, 3, \ldots$).

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Démarrer avec l'inégalité :

$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

Si $(f_n)$ n'est pas équicontinue le résultat peut être faux. Prendre $f_n(x) = (1 + x)^n$ et $x_n = \frac{1}{n}$.

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. Pour ouvert et fermé, écrire l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$ en un point $x$ (à fixer).
2. Ascoli...

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

1. Pour l'équicontinuité utiliser le théorème des accroissement finis. Pour la convergence simple montrer que pour $t$ fixé : $f_n(t) = \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n})$.
2. Montrer que $(f_n)$ ne converge par vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_\infty$ (c'est-à-dire il y a convergence simple mais pas convergence uniforme). Le théorème d'Acoli serait-il faux ?

**Correction de l'exercice 1 ▲**

Soit $P(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ alors par linéarité de l'intégrale et grâce à la relation de l'énoncé :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t)\, dt = 0.$$

La fonction $f$ est continue sur le compact $[a, b]$ donc par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers $f$. Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $P$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} |\int_a^b f(t)^2 dt| &= \left|\int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt\right| \\ &= \left|\int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_a^b |f| \end{aligned}$$

.

Mais $C = \int_a^b |f|$ est une constante (indépendante de $\varepsilon$ et $P$). Donc on vient de montrer que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leqslant \varepsilon C$ avec pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\int_a^b f^2 = 0$, or $f^2$ est une fonction continue et positive, son intégrale est nulle donc $f$ est la fonction nulle.

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ définie par $\Phi = (f_1, \ldots, f_n)$ alors $\Phi$ est continue car les $f_i$ sont continues. $\Phi$ est injective : en effet si $x \neq y$ alors comme $\{f_i\}$ sépare les points on a $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, par contraposition $\Phi$ est injective. Notons $F = \Phi(E)$ l'image directe de $E$. Alors $\Phi : E \to F$ est continue et bijective. Comme $E$ est compact alors $\Phi$ est un homéomorphisme. Donc $E$ est homéomorphe à $F$ qui est une partie de $\mathbb{R}^n$.

*Rappel :* Si $\Phi : E \to F$ est continue et bijective et $E$ est un espace compact alors $\Phi$ est un homéomorphisme. La preuve est simple : soit $K$ un ensemble fermé de $E$, comme $E$ est compact alors $K$ l'est aussi. Comme $\Phi$ est continue alors $\Phi(K)$ est un compact de $F$ donc un fermé. Mais en écrivant ceci à l'aide de l'application $\Phi^{-1}$ nous venons de montrer que pour tout fermé $K$ de $E$, l'image réciproque de $K$ par $\Phi^{-1}$ (qui est $(\Phi^{-1})^{-1}(K) = \Phi(K)$) est un fermé. Donc $\Phi^{-1}$ est continue. Donc $\Phi$ est un homéomorphisme.

**Correction de l'exercice 4 ▲**

On cherche à vérifier les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

Tout d'abord $X \times Y$ est compact, car c'est un produit d'espaces compacts.

Ensuite $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $C(X \times Y, \mathbb{R})$ : en effet pour $f, g \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

$$f + g \in \mathcal{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{A} \quad \text{et } f \times g \in \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ sépare les points : soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, soit $u \in C(X, \mathbb{R})$ tel que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (clairement une telle fonction existe !), soit $v$ la fonction sur $Y$ constante égale à 1. Alors $f$ définie par $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ est dans $\mathcal{A}$ et $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$ alors nécessairement $y_1 \neq y_2$ et on fait un raisonnement similaire.

Pour tout $(x, y) \in X \times Y$ il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$ : prendre la fonction $f$ constante égale à 1 qui est bien dans $\mathcal{A}$.

Par le théorème de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ est dense dans $C(X \times Y, \mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

**Correction de l'exercice 5 ▲**

1. Pour $f \in \mathcal{F}$, par le théorème des accroissements finis, pour tout $t_0, t \in [a,b]$ il existe $c \in ]t_0, t[$ tel que $|f(t) - f(t_0)| = |f'(c)||t - t_0|$. Donc $|f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0|$. Fixons $t_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, soit $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ alors
$$\forall t \in [a,b] \qquad |t - t_0| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(t_0)| \leqslant k|t - t_0| \leqslant \varepsilon.$$
Ce qui est exactement l'équicontinuité de $\mathcal{F}$ en $t_0$. Comme nous pouvons prendre pour $t_0$ n'importe quel point de $[a,b]$ alors $\mathcal{F}$ est équicontinue.

2. (a) Notons $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Pour $x_0, x \in \mathbb{R}^n$, $\|f_n(x) - f_n(x_0)\| \leqslant L\|x - x_0\|$. Donc en posant $\eta = \frac{\varepsilon}{L}$ comme ci-dessus on prouve l'équicontinuité de $\mathcal{H}$ en $x_0$, puis partout.

   (b) Notons $\mathcal{H}(x) = \{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Alors par hypothèse, $\mathcal{H}(0) \subset \bar{B}(0, \sqrt{2})$. Donc $\bar{\mathcal{H}}(0)$ est un fermé de $\bar{B}(0,\sqrt{2})$ qui est compact (nous somme dans $\mathbb{R}^n$), donc $\bar{\mathcal{H}}(0)$ est aussi compact, d'où $\mathcal{H}(0)$ relativement compact. Maintenant nous avons $\|f_n(x) - f_n(0)\| \leqslant L\|x - 0\|$. Donc $\|f_n(x)\| \leqslant L\|x\| + \sqrt{2}$. Donc pour $x$ fixé, $f_n(x) \in \bar{B}(0, L\|x\| + \sqrt{2})$ ce qui implique que $\mathcal{H}(x)$ est relativement compact.

   (c) Comme $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact on ne peut pas appliquer directement le théorème d'Ascoli. Soit $B_R = \bar{B}(0,R)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^n$. Notons $\mathcal{H}_R = \{f_{n|B_R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ la restriction de $\mathcal{H}$ à $B_R$. Alors par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{H}_R$ est relativement compact. Donc de la suite $(f_{n|B_R})_n$ on peut extraire une sous-suite convergente (sur $B_R$).

   (d) Pour $R = 1$ nous extrayons de $(f_n)_n$ une sous-suite $(f_{\phi_1(n)})_n$ qui converge sur $B_1$. Pour $R = 2$, nous extrayons de $(f_{\phi_1(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_2(n)})_n$ qui converge sur $B_2$. Puis par récurrence pour $R = N$, nous extrayons de $(f_{\phi_{N-1}(n)})_n$ une sous-suite $(f_{\phi_N(n)})_n$ qui converge sur $B_N$. Alors la suite $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge sur $\mathbb{R}^n$. C'est le procédé diagonal de Cantor. En effet soit $x \in \mathbb{R}^n$ et soit $N \geqslant \|x\|$. Alors $x \in B_N$ donc $(f_{\phi_N(n)}(x))_n$ converge vers $f(x)$, mais $(f_{\phi_n(n)})_{n \geqslant N}$ est extraite de $(f_{\phi_N(n)})_n$ donc $(f_{\phi_n(n)}(x))_n$ converge également vers $f(x)$. Nous venons de montrer que $(f_{\phi_n(n)})_n$ converge simplement vers $f$ sur tout $\mathbb{R}^n$.

---

**Correction de l'exercice 6 ▲**

1. (a) Soit $(x_n)$ une suite convergeant vers $a$, alors
$$|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b|.$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1$ tel que pour $n \geqslant N_1$ on ait $|f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2}$.

   (c) $(f_n)$ est équicontinue en $a$, donc il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $(|x - a| < \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{2})$.

   (d) Comme $x_n \to a$ alors il existe $N_2$ tel que pour $n \geqslant N_2$ on ait $|x_n - a| < \eta$.

   (e) Donc pour $n \geqslant \max(N_1, N_2)$ on a $|f_n(x_n) - b| \leqslant |f_n(x_n) - f_n(a)| + |f_n(a) - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $(f_n(x_n))$ converge vers $b$.

2. Soit des fonctions réelles définies par $f_n(x) = (1+x)^n$. Prenons $x_n = \frac{1}{n}$, alors $x_n \to a = 0$. Par contre $f_n(a) = f_n(0) = 1$ pour tout $n$. Mais $f_n(x_n) = f_n(\frac{1}{n}) = (1 + \frac{1}{n})^n$ converge vers $e$. L'équicontinuité est donc bien nécessaire.

---

**Correction de l'exercice 7 ▲**

Notons $G$ l'ensemble des $x \in E$, pour lesquels $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $F$. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $G$ qui converge vers $x \in E$. Il faut montrer $x \in G$, c'est-à-dire que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $F$. Écrivons pour $p, q, n \in \mathbb{N}$,
$$\|f_p(x) - f_q(x)\| \leqslant \|f_p(x) - f_p(x_n)\| + \|f_p(x_n) - f_q(x_n)\| + \|f_q(x_n) - f_q(x)\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $(f_n)$ est équicontinue en $x$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall y \in E \quad \|x - y\| < \eta \quad \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(y)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $x_n \to x$ il existe $N \geqslant 0$ tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc

$$\forall p, q \geqslant 0 \quad \|f_p(x_N) - f_p(x)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad \|f_q(x_N) - f_q(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Enfin $N$ étant fixé, $x_N \in G$, la suite $(f_n(x_N))_n$ est une suite de Cauchy, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour $p, q \geqslant N'$ on a,

$$\|f_p(x_N) - f_q(x_N)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le bilan de toute ces inégalités est donc

$$\forall p, q \geqslant N' \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n(x))_n$ est une suite de Cauchy, donc $x \in G$ et $G$ est fermé.

---

**Correction de l'exercice 8 ▲**

1. (a) Montrons que $A$ est ouvert. Soit $x \in A$, alors $\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\}$ est bornée, notons $M$ une borne. Écrivons l'équicontinuité pour $\varepsilon = 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad \forall y \in E \quad (\|x - y\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1).$$

Or si $|f(x) - f(y)| < 1$ alors $|f(y)| < |f(x)| + 1 \leqslant M + 1$. On a donc montré

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad \forall y \in E \quad (y \in B(x, \eta) \Rightarrow |f(y)| < M + 1).$$

Donc $B(x, \eta) \subset A$. Donc $A$ est ouvert.

(b) Montrons que $A$ est fermé. Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $x \in E$. On reprend $\varepsilon = 1$ et on obtient un $\eta$ par équicontinuité. Comme $x_n \to x$ alors il existe $N$ tel que $\|x_N - x\| < \eta$. Donc pour tout $f$ dans $\mathcal{H}$, $|f(x) - f(x_N)| < 1$ ; donc $|f(x)| < |f(x_N)| + 1$. Or $x_N \in A$, il existe $M$ tel $|f(x_N)|$ soit bornée par $M$ pour tout $f$ dans $\mathcal{H}$. Donc pour tout $f \in \mathcal{H}$, $|f(x)| < M + 1$. Donc $x \in A$. Donc $A$ est fermé.

2. $x_0 \in A$ donc $A$ est non vide, comme $A$ est ouvert et fermé et $E$ est connexe alors $A = E$. donc pour tout $x \in E$, $\mathcal{H}(x)$ est borné dans $\mathbb{R}$, donc $\overline{\mathcal{H}(x)}$ est un compact de $\mathbb{R}$. Par le théorème d'Ascoli, $\mathcal{H}$ étant équicontinue et $E$ étant compact alors $\bar{\mathcal{H}}$ est compact.

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

1. (a) Pour $t \geqslant 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin\sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\ &= \sin 2n\pi\sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\ &= \sin 2n\pi(1 + \frac{1}{2}\frac{t}{4n^2\pi^2} + o(\frac{1}{n^2})) \\ &= \sin(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o(\frac{1}{n})) \\ &= \sin(\frac{t}{4n\pi}) + o(\frac{1}{n}) \end{aligned}$$

Donc quand $n \to +\infty$ alors $f_n(t) \to 0$. Donc $(f_n)$ converge simplement vers 0.

(b) Pour $n \geqslant 1$,

$$|f_n'(t)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4n^2\pi^2}}\cos\sqrt{t+4n^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+4\pi^2}} \leqslant \frac{1}{4\pi}.$$

Pour $t \geqslant 0$ fixé et $\varepsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\varepsilon$, alors par l'inégalité des accroissement finis

$$\forall n \geqslant 1 \quad |t-t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leqslant \frac{1}{4\pi}|t-t'| < \varepsilon.$$

Donc $(f_n)$ est une famille équicontinue.

2. Notons $\mathcal{H} = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\mathcal{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathcal{H}(t)} = \mathcal{H}(t) \cup \{0\}$. Mais $(f_n)$ ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|.\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour $n$ impair, posons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin\sqrt{9n^2\pi^2} = \sin(3n\pi) = 0$. Pour $n$ pair, on pose $t_n = \frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2$ alors

$$f_n(t_n) = \sin\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 2n\pi^2 + 4n^2\pi^2} = \sin\sqrt{(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^2} = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1.$$

Donc pour tout $n$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathcal{H}$ soit relativement compact alors de la suite $(f_n)$ on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout $n$, $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.

Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

1. $k$ est continue sur le compact $[a,b] \times [a,b]$ donc est uniformément continue. Écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :

$$\forall \varepsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y, t \in [a,b] \qquad |x-y| < \eta \Rightarrow |k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon'.$$

2. Comme $(f_n)$ est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$. Fixons $x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de $k$, on obtient un $\eta > 0$ avec pour $|x-y| < \eta$, $|k(x,t) - k(y,t)| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M(b-a)}$.

Donc pour $|x-y| < \eta$,

$$\begin{aligned} |Kf_n(x) - Kf_n(y)| &\leqslant \int_a^b |k(x,t) - k(y,t)| \|f_n\|_\infty dt \\ &\leqslant M\int_a^b |k(x,t) - k(y,t)| dt \\ &\leqslant M\int_a^b \frac{\varepsilon}{M(b-a)} dt \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Ce qui est l'équicontinuité de $(Kf_n)$ en $x$. Comme ceci est valable quelque soit $x \in [a,b]$ alors $(Kf_n)$ est équicontinue.

3. Notons $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour $x$ donné $\mathcal{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x,t)f_n(t)dt| \leqslant M\int_a^b |k(x,t)|dt$ est bornée indépendamment de $n \in \mathbb{N}$. Donc $\overline{\mathcal{H}(x)}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$ donc un compact.

Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite $(Kf_n)$ on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathcal{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathcal{H}$.)

---