# Université Lille 1 — UFR de Mathématiques Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

### L305 : ANALYSE COMPLEXE Responsable : Jean-François Burnol

Note : le texte pourrait (devrait) être rendu plus compréhensible par l'incorporation de figures appropriées ; leur mise en place a été reportée par l'auteur à une hypothétique date ultérieure et en attendant le lecteur est encouragé à utiliser les marges pour y dessiner lui-même ce qui lui paraîtra utile.

Il s'agit du polycopié (154 pages) d'un cours fait par l'auteur à l'automne 2005. On trouvera des exercices et des examens sur la page de l'auteur. De plus un autre polycopié, plus court, a été rédigé l'année suivante, et il est aussi disponible sur la page de l'auteur. Quelques sections du présent cours y furent reprises, ce qui donna lieu à quelques améliorations, non répercutées ici a posteriori.

#### Table des matières

1	Premiers pas	4
2	Dérivabilité au sens complexe, équations de Cauchy-Riemann	8
3	L'exponentielle complexe	12
4	Fonctions analytiques	15
5	Principe du prolongement analytique	21
6	Les fonctions holomorphes sont analytiques	26
7	Existence de primitives et Théorème de Cauchy-Goursat	29
8	Annexes  8.1 Différentiabilité	33 34 37 41
9	Le Logarithme complexe	43
<b>10</b>	Ouverts étoilés et primitives	50
11	Fonctions puissances et série binomiale	<b>52</b>

<b>12</b>	Intégrales le long de chemins	54
<b>13</b>	Critère d'holomorphie, limites uniformes	62
14	Intégrales à paramètre complexe	65
15	Annexes  15.1 Interversion de séries et d'intégrales	71 71 72 74 76 77
<b>16</b>	Singularités isolées, Pôles	<b>7</b> 9
<b>17</b>	De la Série Binomiale à la fonction Gamma (I)	85
18	Formule des Compléments, Produit infini pour sinus, Nombres de Bernoulli	- 87
19	De la Série Binomiale à la fonction Gamma (II)	91
<b>20</b>	Convergence de la Série Binomiale	94
<b>21</b>	Les intégrales Euleriennes	97
<b>22</b>	Preuve de la Formule des Compléments	102
<b>23</b>	La série hypergéométrique et un Théorème de Gauss	104
<b>2</b> 4	Annexes 24.1 Formule de Stirling	109 109 111 113
<b>25</b>	Formules de Cauchy (pour un disque)	117
<b>26</b>	Formule de la moyenne et Principe du maximum	119
<b>27</b>	Théorème de Liouville	121
<b>2</b> 8	Séries de Laurent et Résidus	123
<b>2</b> 9	Invariance par homotopie	126
<b>30</b>	Indices de lacets, variation de l'argument	131
<b>31</b>	Le théorème des résidus avec indices	134
<b>32</b>	Le théorème des résidus en version classique	136

<b>33</b>	3 Annexes	141
	33.1 Formules de Cauchy	141
	33.2 Théorème de convergence uniforme de Weierstrass	143
	33.3 Fonctions harmoniques	145
	33.4 Sur les cycles homologiquement triviaux	148
	33.5 Ouverts simplement connexes et Théorèmes de Riemann	152

#### PREMIER CHAPITRE

### 1 Premiers pas

Que vaut  $\log(-1)$ ? On peut imaginer que  $\log(-1) + \log(-1) = \log((-1)(-1)) = \log(1) = 0$  donc  $2\log(-1) = 0$  donc  $\log(-1) = 0$ . Plus généralement  $2\log(-r) = \log((-r)^2) = \log(r^2) = 2\log(r)$ , pour r > 0 et donc  $\log(-r) = \log(r)$ . D'ailleurs si l'on calcule alors  $\frac{d}{dx}\log(x)$  pour x < 0 on obtient par la règle de dérivation des fonctions composées :  $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{d}{dx}\log(-x) = \frac{1}{-x}\frac{d}{dx}(-x) = -\frac{1}{x}\times(-1) = +\frac{1}{x}$  ce qui paraît réconfortant puisque  $\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$  pour x > 0.

L'argument paraît convaincant. Mais on a aussi la formule  $\exp(\log(x)) = x$ , donc on devrait avoir  $\exp(\log(-1)) = -1$ . Mais avec notre définition je trouve  $\exp(\log(-1)) = \exp(0) = 1$ , et non pas -1.

Il y a un problème. Bien sûr on pourrait définir totalement arbitrairement  $\log(x)$  pour x < 0, le tout c'est de trouver une définition qui soit le plus compatible avec ce dont on a l'habitude. Essayons à partir de la formule de base pour définir le logarithme :

$$\log(x) = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t}$$

C'est clair que l'on a un problème si l'on veut faire x < 0 puisque l'intervalle allant de 1 à x passera par une singularité de l'intégrand  $\frac{1}{t}$ . On peut tenter de prendre comme formule une valeur principale à la Cauchy :

$$\log(x) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left( \int_1^{\epsilon} + \int_{-\epsilon}^x \right) \frac{dt}{t},$$

ce qui donne  $\lim_{\epsilon \to 0^+} (\log(\epsilon) + [\log|t|]_{-\epsilon}^x)$  soit tout simplement  $\log(|x|)$  (la valeur de l'intégrale ne dépend pas de  $\epsilon$ , dans ce cas particulier; cela s'explique par le fait que  $\frac{1}{t}$  est une fonction impaire). On retombe sur la valeur problématique  $\log(-1) = 0$ .

À ce stade, il faut avoir une inspiration de génie. La voici : lorsque l'on va de 1 à x < 0 on rencontre en 0 la singularité de  $\frac{1}{t}$ , mais c'est parce que l'on est confiné à l'axe réel. Alors

plongeons cet axe réel dans un plan dont il sera l'axe horizontal et suivons un chemin dans le plan allant de 1 à x < 0 sans passer par l'origine. On veut que  $\frac{1}{t}$  ait un sens le long de ce chemin, alors pour cela il n'y a pas d'autre choix que de considérer ce plan comme le plan des nombres complexes t = z = x + iy, et de calculer  $\frac{1}{t}$  au sens des nombres complexes, et de poser dt = dx + idy. Alors nous prendrons comme définition :

$$\log(-1) = \int_{1}^{-1} \frac{dz}{z} = \int_{1}^{-1} \frac{dx + idy}{x + iy} = \int_{1}^{-1} \frac{(x - iy)(dx + idy)}{x^2 + y^2} ,$$

avec  $z = \gamma(u) = x(u) + iy(u)$ ,  $0 \le u \le 1$ ,  $\gamma(0) = 1$ ,  $\gamma(1) = -1$  et la condition cruciale :  $\forall u \ \gamma(u) \ne 0$ . Nous avons paramétré le chemin menant de 1 à -1 par le nombre réel  $u \in [0, 1]$  (dans votre tête imaginez ce [0, 1] comme vivant sur une autre copie de  $\mathbf{R}$  que celle plongée dans  $\mathbf{C}$ , sinon cela risque de créer un terrible embrouillamini), et le chemin lui-même, par définition, est une certaine fonction dérivable  $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C}$ .

Notre notation  $\int_1^{-1}$  n'est pas bonne. Elle devrait refléter le fait que nous avons choisi un chemin  $\gamma$ . On écrira donc dorénavant  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ . Dans la dernière intégrale à droite on remplace x par x(u), dx par x'(u)du, etc. . . , et l'on arrive à la définition :

$$\log(-1) = \int_{\gamma} \frac{dz}{z} := \int_{0}^{1} \frac{(x(u) - iy(u))(x'(u) + iy'(u))}{x(u)^{2} + y(u)^{2}} du$$

J'ai abrégé  $x(\gamma(u)) = \text{Re}(\gamma(u))$  en x(u) et idem pour  $y(u) = \text{Im}(\gamma(u))$ . Dans l'équation ci-dessus la dernière expression est la définition de  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$ . On s'est ramené à l'intégrale d'une fonction (un peu compliquée, à valeurs complexes) sur l'intervalle réel [0,1]. En ce qui concerne le symbole  $\log(-1)$  on s'attend à ce qu'il dépende du chemin choisi, donc on devrait peut-être le noter  $\log_{\gamma}(-1)$  par exemple.

Tout cela est bien, mais qu'est-ce que cela donne concrètement? Par exemple on peut prendre  $\gamma(u) = \cos(\pi u) + i\sin(\pi u)$  qui va de +1 à -1 par le demi-cercle de rayon 1 dans le demi-plan supérieur. On obtient alors :

$$\log(-1) = \int_0^1 ((\cos(\pi u) - i\sin(\pi u))(-\pi\sin(\pi u) + i\pi\cos(\pi u))) du$$
$$= i\pi \int_0^1 ((\cos(\pi u) - i\sin(\pi u))(+i\sin(\pi u) + \cos(\pi u))) du = i\pi$$

Bon,  $\log(-1)$  vaut  $i\pi$  en fin de compte! enfin, non. Voyons ce qui passe avec le chemin  $\gamma(u) = \cos(\pi u) - i\sin(\pi u)$ , qui passe lui par le demi-plan inférieur. Je vous invite à faire le

calcul. Vous trouverez  $\log(-1) = -i\pi$  et non plus  $+i\pi$ . Remarquez que la réponse ancienne 0 qui vient de la valeur principale au sens de Cauchy est la moyenne entre  $+i\pi$  et  $-i\pi$  ce qui n'est pas un hasard, mais en fait tout cela commence à devenir assez embrouillé; alors, vraiment, c'est 0 ou  $+i\pi$  ou  $-i\pi$ ?

C'est le moment d'énoncer un théorème que nous n'avons pas encore les moyens de prouver mais que nous établirons plus tard :

Théorème 1 Si le chemin dérivable  $\gamma:[0,1] \to \mathbb{C}$  va de +1 à -1, ne passe pas par 0, et reste toujours dans le demi-plan supérieur  $\operatorname{Im}(z) \geq 0$ , alors l'intégrale  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  vaut  $+\pi i$ . Elle ne dépend pas du chemin (restant dans le demi-plan supérieur). Si le chemin reste dans le demi-plan inférieur alors l'intégrale vaut toujours  $-\pi i$ . Dans le cas général la valeur de l'intégrale est toujours de la forme  $\pi i + k(\gamma)2\pi i$  avec un certain  $k(\gamma)$  qui est un nombre entier relatif  $(k(\gamma) \in \mathbb{Z})$ . Ce  $k(\gamma)$  ne change pas lorsque l'on déforme le chemin sans jamais le faire passer par l'origine; plus encore si deux chemins ont le même k c'est que l'on peut déformer continûment (sans jamais passer par zéro!) le premier de manière à le faire coïncider avec le second.

Remarquez que le fait que  $\pi i \neq -\pi i$  prouve, compte tenu de ce qu'affirme le théorème qu'il est impossible de déformer dans le plan le demi-cercle supérieur en le demi-cercle inférieur sans qu'à un moment l'un des chemins intermédiaires ne passe par l'origine (et tout en maintenant les extrémités fixes, si on pouvait bouger les extrémités alors certainement on pourrait déformer l'un en l'autre sans passer par l'origine du plan). C'est là quelque chose qui paraît intuitivement évident, mais qui n'admet pas de démonstration mathématiquement rigoureuse « gratuite ». En fait ce genre de question est à l'origine de la « Topologie algébrique », une discipline mathématique dont les débuts se trouvent dans les travaux de Riemann sur l'Analyse Complexe. Plus tard nous évoquerons un autre théorème de Topologie du plan, le Théorème de Jordan, dont la démonstration serait encore plus difficile, et que nous admettrons.

Pour en revenir au théorème une version plus complète nous dirait que si un chemin part de 1 et aboutit en  $z_0$  alors  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  peut prendre une infinité de valeurs distinctes, mais deux quelconques parmi elles diffèrent toujours par un multiple entier relatif de  $2\pi i$ . Autrement

dit  $\log(z_0)$  n'est défini qu'à  $2\pi i$  près. À vrai dire si l'on impose  $z_0 \notin ]-\infty,0]$  et aussi si l'on oblige le chemin à éviter  $]-\infty,0]$  alors l'intégrale donne un résultat qui est indépendant du chemin choisi; on l'appelle la détermination principale du logarithme et on la notera  $\operatorname{Log}(z_0)$ .

Donc le problème avec la preuve que  $\log(-1) = 0$  car  $2\log(-1) = \log((-1)^2) = \log(1) = 0$  c'est qu'en fait  $\log(1)$  lui-même n'est défini qu'à  $2\pi i$  près, et donc lorsque l'on divise par 2 on prouve que  $\log(-1)$  vaut 0 certes, mais seulement à  $\frac{1}{2}2\pi i = \pi i$  près. Donc cela ne contredit pas les valeurs  $\pi i + k2\pi i$  données par les intégrales.

On pourrait penser que le problème est lié à l'emploi de la formule  $\log(z_1) + \log(z_2) = \log(z_1 z_2)$  mais cette formule est tout-à-fait valable à  $2\pi i \mathbf{Z}$  près. Donc on peut écrire  $2\log(-1) = 0$  à condition de comprendre cela à  $2\pi i \mathbf{Z}$  près.

Comme nous le verrons en ce qui concerne la détermination principale Log(z), la formule  $\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2) = \text{Log}(z_1z_2)$  n'est effectivement pas toujours valable (elle est valable si et seulement si  $|\text{Im}(\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2))| < \pi$ ). Mais elle est toujours valable modulo  $2\pi i$ .

Avec les nombres réels, la fonction logarithme, historiquement comme logiquement, vient avant la fonction exponentielle. Le logarithme est cette découverte géniale dont les anciens de l'Antiquité ne disposaient pas, à savoir que l'on peut transformer des multiplications en des additions. Il est lié à la géométrie de l'hyperbole, mais le plus simple maintenant est de le définir par  $\log(1) = 0$ ,  $\log'(x) = \frac{1}{x}$ . Ensuite on prouve  $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ ,  $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x\to +\infty} \log(x) = +\infty$ , et l'on définit  $\exp: \mathbf{R} \to ]0, +\infty[$  comme sa fonction réciproque (grâce au théorème des valeurs intermédiaires). On prouve  $\exp(t+u) = \exp(t) \exp(u)$ , et :

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \exp'(t) = \exp(t)$$

Nous avons vu qu'il y a des difficultés avec le logarithme de nombres réels négatifs, difficultés qui sont partiellement résolues en passant aux nombres complexes. Après tout trouver  $\log(x)$  c'est résoudre l'équation  $\exp(z) = x$ , donc on progressera peut-être à condition de disposer d'une fonction « exponentielle complexe ». Notons la provisoirement E(z).

On veut  $E(x) = e^x$  pour  $x \in \mathbf{R}$ , et on va imposer aussi

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E'(z) = E(z)$$

Ici il faut faire une pause importante.

# 2 Dérivabilité au sens complexe, équations de Cauchy-Riemann

Définition 1 (dérivabilité et holomorphie) Une fonction  $f: U \to \mathbb{C}$  sur un ouvert du plan complexe est dite dérivable au sens complexe au point  $z_0 \in U$  si la limite

$$f'(z_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe. La fonction f est dite holomorphe sur U si elle dérivable au sens complexe en tout point de U, et elle est dite holomorphe sur un ensemble A si il existe un ouvert V contenant A sur lequel f est définie et holomorphe. Une fonction holomorphe sur C tout entier est dite fonction entière.

Par exemple, la fonction f(z)=z est holomorphe sur  ${\bf C}$ , et f'(z)=1. La fonction  $f(z)=z^2$  est une fonction entière et f'(z)=2z. En effet  $f(z_0+h)=f(z_0)+h(2z_0+h)$ , d'où le résultat. Vous démontrerez que les résultats habituels sur (f+g)', (fg)', (f/g)', et  $(g\circ f)'$  valent pour les fonctions dérivables d'une variable complexe<sup>1</sup>. En particulier par récurrence sur  $n\in {\bf N}, n>0$ , on obtient  $\frac{d}{dz}z^n=nz^{n-1}$  et d'ailleurs cela vaut aussi pour  $n\in {\bf Z}$  (pour n=0, on considère que la formule veut dire 0, même en z=0). Remarque : pour des raisons qui seront explicitées en une autre occasion on préfère habituellemnt la notation  $\frac{\partial}{\partial z}$  à  $\frac{d}{dz}$ .

La fonction f(z) de la variable complexe z = x + iy peut (doit) aussi être vue comme une fonction des deux variables réelles x et y. On écrira d'ailleurs souvent

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y),$$
  $u = \text{Re}f, v = \text{Im}f$ 

<sup>1.</sup> prouver aussi  $(g \circ f)'(t) = g'(f(t))f'(t)$  pour  $f: I \to \mathbb{C}$  une fonction dérivable sur un intervalle réel, et g une fonction holomorphe sur f(I).

<sup>2.</sup> on s'efforce en général de réserver certaines lettres  $(x, y, u, v, t, p, q, \sigma, \tau...)$  pour les réels et d'autres pour les complexes  $(z, w, s, \xi, \zeta...)$ , mais il est impossible d'être totalement systématique en la matière.

Dans le calcul de f'(z), prenons h réel : alors on est en train d'évaluer la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy)$ , donc

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} f(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

Tacitement on a utilisé le fait que la partie réelle (respectivement, imaginaire) d'une limite est la limite des parties réelles (respectivement, imaginaires), donc l'existence de  $f'(z_0)$  implique l'existence des dérivées partielles par rapport à x des fonctions u et v (au point  $(x_0, y_0)$ ).

Dans le calcul de f'(z), prenons h imaginaire pur :  $h=ik,\ k\in\mathbf{R},\ k\to 0$ . Alors (pourquoi?) on est en train d'évaluer la dérivée partielle  $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy)$ , donc

$$f'(z_0) = \frac{1}{i} \left. \frac{\partial}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} f(x+iy) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

En comparant les deux expressions pour  $f'(z_0)$  on obtient le théorème suivant :

Théorème 2 (Équations de Cauchy-Riemann) Pour qu'une fonction f soit dérivable au sens complexe au point  $z_0 = x_0 + iy_0$  il est nécessaire que les fonctions u = Re f et v = Im f admettent en ce point des dérivées partielles  $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$  et que les Équations de Cauchy-Riemann soient satisfaites :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Afin d'obtenir une condition nécessaire et suffisante il faut faire appel à la notion de différentiabilité d'une fontion (à valeurs réelles ou complexes) de plusieurs variables réelles (ici, deux). Nous allons prouver en effet :

**Théorème 3** Pour qu'une fonction f soit dérivable au sens complexe au point  $z_0 = x_0 + iy_0$  il est nécessaire et suffisant qu'elle soit différentiable au point  $z_0$  et que les Équations de

Cauchy-Riemann soient satisfaites:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Rappelons cette notion de différentiabilité en un point  $(x_0, y_0)$  d'une fonction F(x, y) de deux variables réelles (ici f(x+iy), ou u(x,y), ou v(x,y)). On dit que F est différentiable au point  $(x_0, y_0)$  si l'on peut trouver deux nombres A et B (complexes éventuellement si F est elle-même à valeurs complexes) et une fonction  $\epsilon(h_1, h_2)$  définie pour  $0 < \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \le \delta$   $(h_1$  et  $h_2$  réels) avec  $\delta > 0$  suffisamment petit, tels que  $\delta$ 

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F(x_0, y_0) + Ah_1 + Bh_2 + \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \cdot \epsilon(h_1, h_2)$$
et 
$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0, 0)} \epsilon(h_1, h_2) = 0$$

En prenant  $h_2 = 0$  et  $h_1 \to 0$  on en déduit que  $F(x, y_0)$  est dérivable au point  $x = x_0$  et que cette dérivée vaut A. De plus en prenant  $h_1 = 0$  on constate que  $F(x_0, y)$  est dérivable au point  $y = y_0$  et que cette dérivée vaut B:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = A$$
  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = B$ 

Je signale cependant que l'on montre en Cours de Calcul Différentiel que la seule existence de ces dérivées partielles n'est pas suffisante pour que F soit différentiable au point  $(x_0, y_0)$ : l'existence est nécessaire, pas suffisante (je rappellerai très bientôt une condition suffisante).

On remarquera que notre h dans la définition de la dérivabilité au sens complexe correspond à ce qui ici est  $h_1 + ih_2$  et  $\sqrt{h_1^2 + h_2^2} = |h|$ . Si f(z) est une fonction définie dans un voisinage de  $z_0$  alors l'existence de  $f'(z_0)$  équivaut (prouvez-le!) exactement à dire qu'il existe  $C \in \mathbb{C}$  et une fonction  $\alpha(h)$  définie pour  $0 < |h| \le \delta$ ,  $\delta > 0$ , tels que :

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + Ch + h\alpha(h) \qquad \lim_{h \to 0} \alpha(h) = 0$$

La constante C est d'ailleurs  $f'(z_0)$ . En posant  $h = h_1 + ih_2$ , A = C, B = iC,  $\epsilon(h_1, h_2) = \frac{h}{|h|}\alpha(h_1+ih_2)$  on trouve donc immédiatement que f(x+iy) est différentiable au point  $(x_0, y_0)$  comme fonction de deux variables réelles avec  $A = f'(z_0)$ ,  $B = if'(z_0)$ .

<sup>3.</sup> comme  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h_1|+|h_2|) \le \sqrt{(h_1^2+h_2^2)} \le |h_1|+|h_2|$  on peut aussi dans la formule utiliser  $|h_1|+|h_2|$  en lieu et place de  $\sqrt{(h_1^2+h_2^2)}$ .

Réciproquement si F(x,y) = f(x+iy) est différentiable et si il existe C tel que A = C, B = iC, ce qui équivaut à exiger B = iA alors en posant  $\alpha(h_1 + ih_2) = \frac{|h|}{h}\epsilon(h_1, h_2)$ ,  $h = h_1 + ih_2$ , on obtient tout aussi immédiatement que f(z) est dérivable au sens complexe au point  $z_0 = x_0 + iy_0$ , avec  $f'(z_0) = A = -iB$ .

Enfin, on remarque que la condition B = iA (lorsque l'on suppose F(x, y) = f(x + iy) différentiable au point  $(x_0, y_0)$ ) s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) ,$$

ce qui, compte tenu de f = u + iv, n'est qu'une autre façon d'écrire le système des deux équations de Cauchy-Riemann. Le théorème 3 est donc démontré.

Comme la différentiabilité en un seul point est une notion assez inintéressante, il est utile de disposer du théorème suivant (démonstration en annexe) du cours de calcul différentiel : si la fonction F(x,y) admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tous les points d'un ouvert U, et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues du couple (x,y) de cet ouvert U, alors la fonction F est différentiable en tout point (x,y) de l'ouvert U. Cela nous permet donc d'énoncer la proposition suivante :

**Théorème 4** Si la fonction f(z) définie sur un ouvert U du plan complexe  $\mathbf{C}$  admet en tout point de cet ouvert des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues sur l'ouvert U et si les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \; \frac{\partial f}{\partial x}$$

(ou de manière équivalente  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ ) sont satisfaites, alors la fonction f est une fonction holomorphe sur l'ouvert U.

Remarque : cela est assez surprenant, mais on montrera plus tard que si f est holomorphe alors la fonction f' est automatiquement continue (en fait, infiniment différentiable) donc le théorème précédent caractérise exactement les fonctions holomorphes sur un ouvert U.

#### 3 L'exponentielle complexe

Revenons-en au problème de trouver une fontion entière E(z) qui jouera le rôle de fonction exponentielle pour les nombres complexes. Bien sûr vous connaissez déjà une approche, elle est enseignée dès la première année : il s'agit d'utiliser pour les nombres complexes la formule

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

connue pour les nombres réels. Cela est effectivement très important et d'ailleurs nous allons y revenir plus tard. Mais pour le moment nous préférons (après notre étude dans la section précédente de la dérivabilité au sens complexe) prendre comme point de départ la recherche d'une fonction holomorphe dans tout le plan complexe (fonction entière) telle que

(1) 
$$E(0) = 1 \text{ et } \forall z \in \mathbf{C} \quad E'(z) = E(z) .$$

Commençons par établir grâce à l'équation différentielle quelques propriétés de E. D'abord :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E(-z) \cdot E(z) = 1$$

En effet avec f(z) = E(-z)E(z) on calcule f'(z) = -E'(-z)E(z) + E(-z)E'(z) = -E(-z)E(z) + E(-z)E(z) = 0. Donc (pourquoi?) f est constante, d'où l'égalité. En particulier on a

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad E(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad E(z)^{-1} = E(-z)$$

Établissons maintenant :

$$\forall z, w \in \mathbf{C} \quad E(z+w) = E(z)E(w)$$

Pour la preuve on fixe w et on considère la fonction entière f(z) = E(z+w)E(-z). On calcule sa dérivée et on trouve zéro. Donc f(z) = f(0) = E(w) d'où la formule.

Ainsi E(x+iy) = E(x)E(iy) et il suffit de déterminer les deux fonctions d'une variable réelle E(x) et E(iy).

La fonction d'une variable réelle e(x) = E(x) vérifie e(0) = 1 et e'(x) = e(x), c'est donc que  $e(x) = e^x = \exp(x)$  (en effet la dérivée de  $\exp(-x)e(x)$  vaut  $-\exp(-x)e(x) + \exp(-x)e'(x) = 0$ , donc  $\exp(-x)e(x) = \exp(0)e(0) = 1$  donc  $e(x) = \exp(x)$ ).

La fonction d'une variable réelle g(y) = E(iy) est dérivable et vérifie g'(y) = iE'(iy) = ig(y), donc elle est aussi deux fois dérivable et  $g''(y) = ig'(y) = i^2g(y) = -g(y)$ :

$$\forall y \in \mathbf{R} \quad g''(y) = -g(y)$$

Or par un théorème connu (démonstration en annexe) les seules fonctions d'une variable réelle avec cette propriété sont les combinaisons linéaires  $C_1 \cos(y) + C_2 \sin(y)$ . Comme g(0) = 1 on a  $C_1 = 1$ . Comme g'(0) = i on a  $C_2 = i$ . Donc  $E(iy) = g(y) = \cos(y) + i \sin(y)$ .

En conclusion nous avons prouvé : si il existe une fonction entière E(z) vérifiant (1) alors elle est nécessairement donnée par la formule

(2) 
$$E(z) = E(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

Prenons la formule (2) comme la définition de E(z). La fonction ainsi définie est-elle une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$ ? En tout cas elle admet des dérivées partielles qui sont des fonctions continues du couple (x, y):

$$\frac{\partial}{\partial x}E(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = E(x+iy)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}E(x+iy) = e^x(-\sin(y) + i\cos(y)) = i E(x+iy)$$

La condition de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial y}E = i \cdot \frac{\partial}{\partial x}E$$

est donc satisfaite avec des dérivées partielles continues en le couple (x,y). Par le théorème 4, la fonction  $e^x(\cos(y) + i\sin(y))$  est bien une fonction holomorphe de la variable complexe z = x + iy, sur tout le plan complexe. De plus on a  $E'(z) = \frac{\partial}{\partial x} E(x + iy) = E(z)$ , et E(0) = 1, ce qui prouve que E est bien solution de (1). La formule d'addition E(z + w) = E(z)E(w) (que l'on pourrait maintenant montrer en utilisant les formules d'addition trigonométriques) et le fait que pour z réel on retrouve l'exponentielle réelle classique nous incite à noter dorénavant E(z) sous les formes  $e^z$  ou  $\exp(z)$ . En particulier on obtient pour z imaginaire pur l'une des plus belles formules des mathématiques :

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

Cette formule, ainsi que la notation  $e^z$  pour la fonction exponentielle, sont dues à Leonhard Euler. Comme cas particulier on a

$$e^{i\pi}=-1$$
,

aussi celèbre en Mathématiques que  $E=mc^2$  l'est en Physique. Donc effectivement on a bien le droit de considérer que  $\log(-1)=i\pi$ . Attention cependant que

$$e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = +1$$
,

donc plus généralement  $e^{i\pi+k2\pi i}=-1$  pour tout  $k\in\mathbf{Z}$  et les valeurs possibles pour  $\log(-1)$  comprennent en tout cas  $i\pi+2\pi i\mathbf{Z}$ .

Y-en-a-t-il d'autres? La fonction  $\exp: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$  est un morphisme du groupe additif  $(\mathbf{C}, +)$  vers le groupe multiplicatif  $(\mathbf{C}^*, \times)$ , et il s'agit de trouver son noyau, c'est-à-dire les z avec  $e^z = 1$ .

Il est utile de remarquer d'abord que  $e^{\bar{z}}=e^{x-iy}=e^x(\cos(y)-i\sin(y))=\overline{\exp(z)}$  et ainsi que  $|e^z|^2=\exp(z)\overline{\exp(z)}=\exp(z)\exp(\bar{z})=\exp(z+\bar{z})=\exp(2\mathrm{Re}(z))$  d'où :

$$\forall z \in \mathbf{C} \quad |e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$$

Donc si  $e^z = 1$  alors  $e^{\operatorname{Re}(z)} = 1$  et donc  $\operatorname{Re}(z) = 0$ . Alors z = iy et  $\cos(y) = 1$  et  $\sin(y) = 0$  donc y est un multiple entier de  $2\pi$ . Donc  $2\pi i\mathbf{Z}$  est le noyau du morphisme de groupe  $\exp: \mathbf{C} \to \mathbf{C}^*$ .

Surjectivité : si l'on veut résoudre  $e^w = z$ , on commence par dire que nécessairement  $e^{\operatorname{Re}(w)} = |z|$ , donc on est obligé de prendre  $\operatorname{Re}(w) = \log(|z|)$ . Cela étant fait l'équation devient équivalente à  $e^{i\operatorname{Im}(w)} = \frac{z}{|z|}$ . Donc il s'agit de voir si l'on peut trouver un nombre réel  $\theta = \operatorname{Im}(w)$  tel que  $e^{i\theta}$  soit le nombre complexe de module  $1: X + iY = \frac{z}{|z|}$ , autrement dit tel que  $\cos(\theta) = X$ ,  $\sin(\theta) = Y$ . La possibilité de trouver un tel  $\theta \in \mathbf{R}$  pour tout X et Y tels que  $X^2 + Y^2 = 1$  est une chose que vous avez appris (en théorie) à faire lors de vos premiers cours sur les fonctions continues et dérivables  $^4$ . Ultimement c'est pour cela que les mathématiciens ont introduit la notion de continuité, le théorème des valeurs intermédiaires, et les développements en séries. Cela dit, si X = -1, prenez  $\theta = \pi$ . Si

<sup>4.</sup> en espérant que ces cours ne s'intitulaient pas « Initiation » mais bien « Fondements ».

 $-1 < X \le 1$  alors l'unique solution avec  $|\theta| < \pi$  est donnée par la formule :

$$\theta = 2 \operatorname{Arctg}\left(\frac{Y}{1+X}\right) ,$$

ce que je vous invite à vérifier (et à en trouver une preuve (ou, plutôt, interprétation) géométrique). Lorsque X > 0 on peut prendre simplement

$$\theta = \operatorname{Arctg} \frac{Y}{X} = \operatorname{Arcsin}(Y)$$
,

ce qui donne un résultat dans ]  $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ [.

Comme le morphisme exp :  $(\mathbf{C}, +) \to (\mathbf{C}^*, \times)$  est surjectif avec noyau  $2\pi i \mathbf{Z}$  on a établi que pour tout nombre complexe z NON NUL, il y a une infinité de valeurs possibles pour  $\log(z)$ , ce sont les solutions de l'équation  $e^w = z$ , et deux quelconques parmi elles diffèrent par un multiple entier de  $2\pi i$ . La paternité de ce résultat majeur en Mathématiques revient à Leonhard Euler. <sup>5</sup>

#### 4 Fonctions analytiques

Une série entière (à ne pas confondre avec fonction entière) est une série du type  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Je rappelle, sans le démontrer à nouveau, que l'on associe à une telle série (à coefficients  $a_n$  réels ou complexes) un rayon de convergence  $R \in [0, +\infty]$ , qui vaut 0 si la série ne converge que pour z = 0,  $+\infty$  si elle converge pour tout z, et  $R \in ]0, \infty[$  si elle converge pour |z| < R et diverge pour |z| > R. On peut aussi caractériser R par :

$$|z| < R \implies \lim |a_n z^n| = 0$$
 
$$|z| > R \implies |a_n z^n| \text{ n'est pas born\'e lorsque } n \to \infty$$

Rappelons enfin que la série converge absolument pour |z| < R, et uniformément (normalement en fait) pour  $|z| \le R' < R$ .

On peut associer à une série entière  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  sa série dérivée  $D(S)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ , et c'est un très bon exercice de montrer que S et D(S) ont exactement le même rayon de convergence. Dans cette section nous allons

<sup>5.</sup> Leonhard Euler, 1707-1783. Sans doute le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Des précisions biographiques seront données au Chapitre III de ce cours.

établir le lien entre cette notion formelle de dérivée et la véritable dérivée au sens de la dérivation d'une fonction de la variable complexe, lorsque le rayon de convergence est non nul. Signalons cependant que l'opération  $S \to D(S)$  indépendamment de toute notion de convergence a les propriétés formelles que l'on attend d'une dérivée, c'est-à-dire la formule de Leibniz : D(ST) = D(S)T + SD(T) mais pour cela il nous faudrait définir le produit formel de deux séries (formelles, c'est-à-dire en dehors de toute notion de convergence, et z étant traité comme un symbole désincarné, comme X avec les polynômes P(X), etc...) et cela nous entraînerait trop loin.

Énonçons donc sans plus attendre le théorème fondamental:

**Théorème 5** Soit  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence R non  $nul^6$ . Dans le disque  $D(0,R) = \{|z| < R\}$  la fonction S(z) est une fonction dérivable au sens complexe et  $S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ . La fonction S(z) est donc (par récurrence) infiniment dérivable au sens complexe. De plus pour tout  $z_0$  dans ce disque ouvert, la série de Taylor  $S(z_0) + S'(z_0)h + \frac{1}{2}S''(z_0)h^2 + \dots$  est convergente et représente  $S(z_0 + h)$  pour  $|h| < R - |z_0|$ :

$$\forall z_0, h, |z_0| + |h| < R \implies S(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(z_0)}{m!} h^m$$

En particulier le rayon de convergence de la série de Taylor en  $z_0$  est au moins égal à  $R - |z_0|$ .

Pour la preuve j'utiliserai le très important théorème sur les séries doubles (énoncé et démonstration en annexe). On a, pour  $|z_0| + |h| < R$  (donc  $|z_0 + h| < R$ ):

$$S(z_0 + h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 + h)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} h^m$$

Examinons si la série double est absolument convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{m=n} |a_n| \binom{n}{m} |z_0|^{n-m} |h|^m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z_0| + |h|)^n < +\infty$$

<sup>6.</sup> si  $R = +\infty$ , alors dans ce qui suit, on utilise des conventions du genre  $+\infty - C = +\infty$  pour tout nombre réel C

car  $|z_0|+|h| < R$ . Donc c'est ok, on peut permuter et, toutes les séries écrites étant garanties absolument convergentes <sup>7</sup>, on a

$$S(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} \right) h^m ,$$

ce qui est de la forme

$$S(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z_0) h^m ,$$

avec

$$c_m(z_0) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \binom{n}{m} z_0^{n-m} = \frac{1}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1) \cdots (n-m+1) z_0^{n-m}.$$

On reconnaît dans cette dernière somme infinie le résultat  $D^m(S)$  de l'action m fois sur S de la dérivation formelle D. Le résultat final est donc :

$$S(z_0 + h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (D^m(S))(z_0) h^m ,$$

avec une série que nous savons absolument convergente pour  $|h| < R - |z_0|$ . Nous écrivons alors, pour  $0 < |h| < R - |z_0|$ :

$$\frac{S(z_0+h)-S(z_0)}{h}=D(S)(z_0)+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m!}(D^m(S))(z_0)h^{m-1}.$$

Notons r(h) le dernier terme, dont nous voulons montrer qu'il tend vers zéro lorsque h tend vers 0. Nous pouvons mettre en facteur h, de sorte que

$$r(h) = h \sum_{m=2}^{\infty} d_m h^{m-2} = h \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+2} h^k$$

avec des coefficients  $d_m$  qu'il est inutile d'expliciter, la seule chose que nous avons besoin de savoir c'est que la série est absolument convergente pour  $0 < |h| < R - |z_0|$ . Choisissons  $\delta$  avec  $0 < \delta < R - |z_0|$  et <sup>8</sup> restreignons nous à  $0 < |h| \le \delta$ . Alors

$$|r(h)| \le |h| \sum_{k=0}^{\infty} |d_{k+2}| \delta^k = C|h|$$

pour une certaine constante  $C < \infty$ , indépendante de h. Il en découle immédiatement  $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$  et donc au final :

$$\lim_{h \to 0} \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h} = D(S)(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

<sup>7.</sup> la série intérieure est garantie absolument convergente avec le terme  $h^m$  inclus, mais on peut le mettre en facteur de tous les autres, et il suffit d'utiliser un  $h \neq 0$  pour pouvoir donc affirmer que la série mise entre parenthèse qui ne dépend que de  $z_0$  (et de  $m \in \mathbb{N}$ ) est absolument convergente.

<sup>8.</sup> donc  $\delta < \infty$  même si  $R = +\infty$ .

Ceci prouve que S(z) est dérivable au sens complexe au point  $z_0$  et que  $S'(z_0) = D(S)(z_0)$ . Ce qui a été montré pour S est alors appliqué à la série D(S) qui a le même rayon de convergence. Il en résulte que D(S) est elle aussi holomorphe sur le disque ouvert D(0,R) et que  $D(S)' = D(D(S)) = D^2(S)$  ( $D^2$  est juste une notation pour  $D \circ D$ ). Par récurrence nous en déduisons que S est infiniment dérivable au sens complexe et que  $S^{(m)} = D^m(S)$  pour tout  $m \in \mathbb{N}$  (par convention  $S^{(0)} = S$  et  $D^0(S) = S$ ). Nous pouvons alors réécrire la formule pour  $S(z_0 + h)$  comme une série de Taylor  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(z_0)}{m!} h^m$  et le théorème est entièrement démontré.

En particulier considérons la série exponentielle :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Elle a un rayon de convergence infini et définit donc une fonction holomorphe sur tout le plan complexe. Le théorème nous dit que nous pouvons calculer sa dérivée en dérivant terme à terme, ce qui donne F'(z) = F(z)! Comme F(0) = 1 c'est donc que cette fonction est l'exponentielle complexe que nous avions précédemment définie par la formule  $E(z) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ . En effet nous avions montré que toute fonction holomorphe vérifiant l'équation différentielle E' = E et prenant la valeur 1 en z = 0 était nécessairement de cette forme. Remarque : comme notre théorème nous a permis de dire que F(z) est holomorphe, cela prouve d'une deuxième façon, qui ne fait pas appel aux équations de Cauchy-Riemann, que la fonction  $e^x(\cos(y) + i\sin(y))$  est holomorphe. La formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$$

est suffisamment remarquable pour que je vous invite à bien la contempler et à vous en imprégner. À gauche on a une symétrie  $x \leftrightarrow iy$  ce qui incite à se poser la question si l'on n'a pas aussi, par hasard :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+iy)^n}{n!} = e^{iy}\cos(-ix) + ie^{iy}\sin(-ix) ?$$

Compte tenu de  $e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$ , et en réunissant les termes en  $\cos(y)$  et  $\sin(y)$ , on voit que cela est compatible avec la formule précédente si l'on a  $e^x = \cos(-ix) + i\sin(-ix)$ . Mais effectivement si l'on part de la formule  $\cos(x) = (e^{ix} + e^{-ix})/2$  on est amené naturellement à définir  $\cos(z)$  pour z complexe par cette même formule, d'où  $\cos(ix) = (e^{-x} + e^x)/2 = \cosh(x)$ 

et de même  $\sin(z) = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ , donc  $\sin(-ix) = (e^x - e^{-x})/2i = -i \operatorname{sh}(x)$ , et alors  $\cos(-ix) + i \sin(-ix) = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x) = e^x$ , ok, ça marche. Autrement dit on définit cos, sin, et aussi ch et sh par les mêmes formules pour z complexe avec l'exponentielle que dans le cas réel. On notera qu'avec ces définitions :

$$ch(z) = \cos(iz) \qquad sh(z) = -i\sin(iz) \qquad \sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$$
$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad ch^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1$$

et l'on passe de l'une des deux formules à l'autre via  $z \leftrightarrow iz$ . 9

Il y a une façon directe intéressante de montrer que la solution de E'=E prenant la valeur 1 en 0 est nécessairement  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ : il s'agit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange à la fonction d'une variable réelle  $t\mapsto E(tz)$ ,  $0\le t\le 1$ . Je laisse cela en exercice. Cependant une fois cela fait il reste à montrer que la solution unique trouvée  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  est bien holomorphe. On peut le faire en vérifiant les équations de Cauchy-Riemann : on montre que l'on peut permuter les dérivées partielles et le signe somme. Ou encore on utilise le théorème des séries doubles pour montrer directement la formule d'addition ce qui permet ensuite de se ramener à dériver en 0 seulement. Je laisse cela en exercice. Le théorème 5 nous a donné de toute façon la réponse ultime sur le problème de dériver une série entière convergente. Il est logique à ce stade d'introduire la définition suivante :

**Définition 2 (fonctions analytiques)** On dit qu'une fonction f(z) définie sur un ouvert U du plan complexe  $\mathbf{C}$  est analytique sur U si en tout point  $z_0$ , il existe un  $\delta(z_0) > 0$  et des nombres complexes  $c_n(z_0)$  tels que pour  $|z - z_0| < \delta(z_0)$  on a  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z - z_0)^n$ .

Nous avons vu par le théorème 5 que la somme d'une série entière est holomorphe, même infiniment dérivable au sens complexe, et qu'elle peut être développée en série de Taylor convergente en tout point de son disque de convergence et cela nous permet donc d'affirmer que la somme S(z) d'une série entière de rayon de convergence R > 0 est analytique dans

<sup>9.</sup> Par pitié, familiarisez vous suffisamment avec ces quelques fonctions, les plus basiques de toute l'Analyse Mathématique, pour éviter d'écrire aux examens des choses incroyablement fausses du genre  $|\cos(z)| \leq \cos(R)$  pour  $|z| \leq R$ . Ayez constamment présent à l'esprit le fait que sin par exemple se comporte totalement différemment sur l'axe réel (périodique, bornée) et sur l'axe imaginaire (exponentiellement croissante car  $\sin(iy) = i \operatorname{sh}(y)$ ).

son disque de convergence. Il en sera de même de toutes ses dérivées puisque celles-ci sont aussi des sommes de séries entières. Ainsi :

Théorème 6 Toute fonction analytique est holomorphe, et même elle est infiniment dérivable au sens complexe; de plus toutes ses fonctions dérivées sont aussi des fonctions analytiques.

La *Théorie de Cauchy* va nous amener plus tard dans ce chapitre à deux théorèmes fondamentaux :

- 1. toute fonction holomorphe est une fonction analytique. En particulier toute fonction holomorphe est automatiquement infiniment dérivable au sens complexe,
- 2. le rayon de convergence R de la série de Taylor au point z<sub>0</sub> d'une fonction holomorphe f sur un ouvert U est au moins égal à la distance de z<sub>0</sub> au complémentaire de U. Autrement dit, le disque ouvert D(z<sub>0</sub>, R) sur lequel converge cette série de Taylor contient le plus grand disque ouvert centré en z<sub>0</sub> et contenu entièrement dans U. <sup>10</sup>

Le point 2 montre que le  $\delta(z_0)$  de la définition d'une fonction analytique peut être pris égal au rayon du plus grand disque ouvert centré en  $z_0$  et inclus dans U, mais il est totalement impossible d'établir cela sans dans le même temps démontrer les théorèmes de Cauchy. Plus précisément il y aurait tout de même une simplification si l'on voulait établir le point 2 pour les fonctions analytiques seulement, car nous savons déjà que la fonction analytique est infiniment dérivable, alors que pour la fonction holomorphe générale f(z) on ne sait même pas a priori que f'(z) est une fonction continue. D'ailleurs nous allons d'abord démontrer les théorèmes de Cauchy pour les fonctions holomorphes dont on suppose que la dérivée est une fonction continue; ce n'est que dans un deuxième temps, grâce à une méthode de Goursat, que nous donnerons une approche ne faisant aucune hypothèse sur la fonction dérivée f' si ce n'est son existence. Tout cela peut paraître un petit peu académique puisqu'en fin de compte les fonctions holomorphes sont infiniment dérivables, mais c'est aussi l'élégance des Mathématiques de chercher les hypothèses minimales.  $^{11}$ 

<sup>10.</sup> ce disque de convergence peut contenir des points en dehors de U, d'où l'idée d'utiliser cela pour prolonger la fonction en dehors de U. Mais si deux disques associés à deux points distincts  $z_0$  et  $z_1$  s'intersectent en dehors de U il n'est pas toujours vrai que dans cette intersection les deux séries de Taylor donneront le même résultat. C'est même souvent faux. Cependant si U est convexe, c'est bon. Cette affirmation fera un bon exercice lorsque nous en aurons dit un peu plus sur cette idée de « prolongement analytique ».

<sup>11.</sup> il ne faut pas confondre cela avec l'idée d'une structuration linéaire des Mathématiques, couche par

#### 5 Principe du prolongement analytique

Revenons à la somme  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  d'une série entière de rayon de convergence R > 0. Dans la démonstration du théorème 5 on y a fait remarquer, en notant D l'opérateur de dérivation formelle (qui est aussi par le théorème la dérivation au sens concret, véritable), la formule :

$$D^{m}(S)(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n} n(n-1) \cdots (n-m+1) z^{n-m}$$
.

Pour z = 0 seul le terme initial avec n = m contribue et cela donne  $D^m(S)(0) = a_m m!$ . Comme l'on a prouvé pour tout  $z : D^m(S)(z) = S^{(m)}(z)$ , cela donne :

$$a_m = \frac{S^{(m)}(0)}{m!}$$

Remarque : certes dans la preuve du théorème 5 on a prouvé en particulier la formule

$$\forall h, |h| < R \implies S(h) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{S^{(m)}(0)}{m!} h^m$$

cependant si vous lisez attentivement la preuve vous verrez que la formule

$$a_m = \frac{S^{(m)}(0)}{m!}$$

n'y était pas encore établie, d'où la nécessité de l'argument ci-dessus. Autrement dit nous ne savions pas encore que deux séries donnant la même fonction ont nécessairement exactement les mêmes coefficients. <sup>12</sup>

Vous avez déjà étudié les séries entières lors des deux premières années, alors vous savez qu'un moyen plus simple d'établir l'unicité des coefficients est le suivant : en fait il s'agit de montrer que si l'un au moins des coefficient  $a_n$  est non nul alors la fonction  $S(z) = \sum_{n=0} a_n z^n$  ne peut pas être identiquement nulle. La preuve est très simple : soit  $n_0$  le plus petit indice avec  $a_n \neq 0$ , alors  $S(z) = a_{n_0} z^{n_0} (1 + z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{n_0+k+1}}{a_{n_0}} z^k)$ . Prenons  $0 < \delta < R$ . Alors :  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n_0+k+1}| \delta^k = C < \infty$ . Donc :

$$0 < |z| \le \delta \implies \left| \frac{S(z)}{a_{n_0} z^{n_0}} - 1 \right| \le |z| \cdot C$$

couche empilées dans un ordre implacable l'une au-dessus des autres. Une araignée qui parcourt sa toile le fait avec élégance et ne confond pas le lieu où elle se trouve avec le chemin qui l'y a conduit. Elle a même intérêt à essayer plusieurs chemins pour se rendre au même lieu.

<sup>12.</sup> d'ailleurs il aurait fallu utiliser deux notations distinctes pour la série formelle  $T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et sa somme S(z), et au lieu de D(S) il aurait fallu écrire D(T), puisque la dérivation formelle fait appel explicitement aux coefficients de la série.

Pour |z| suffisamment petit le terme de droite est inférieur à  $\frac{1}{2}$ , et cela interdit à S(z) de prendre la valeur zéro. Donc non seulement la fonction S ne peut pas être identiquement nulle, elle ne peut en fait, dans un voisinage suffisamment petit de  $z_0 = 0$ , ne s'annuler qu'au plus une seule fois, en  $z_0 = 0$  mais pas ailleurs. Évidemment si elle ne s'annule pas en  $z_0$  elle ne s'annule en aucun point d'un voisinage ouvert suffisamment petit, mais cela on le savait déjà simplement en invoquant la continuité de S(z) comme fonction de z (comme elle est dérivable, elle est continue). Reécrivons une partie de ce que nous avons appris sous la forme d'un théorème :

**Théorème 7** Si une fonction analytique s'annule en un point  $z_0$  alors

- soit elle s'annule identiquement dans un voisinage de  $z_0$ ,
- soit il existe un voisinage suffisamment petit de  $z_0$  dans lequel la fonction n'a pas d'autre zéro que  $z_0$ .

**Définition 3 (multiplicité d'un zéro)** Soit f une fonction analytique définie dans un voisinage d'un point  $z_0$ . On pose  $m(f;z_0) = +\infty$  si f est identiquement nulle dans un voisinage de  $z_0$ , et sinon  $m(f;z_0)$  est le plus petit indice d'un coefficient non nul de la série de Taylor de f en  $z_0$ . On dit que  $m(f;z_0)$  est la multiplicité de  $z_0$  comme zéro de f (évidemment  $m(f;z_0) = 0$  veut dire exactement que  $z_0$  n'est pas un zéro de f).

On en arrive maintenant à une propriété fondamentale des fonctions analytiques, que l'on exprimera sous différentes formes, et qui s'appellent d'une manière collective le « Principe du Prolongement Analytique », ou encore le Théorème d'Unicité Analytique. Pour l'exprimer nous avons besoin d'un rappel de Topologie :

**Définition 4 (ouverts connexes)** Un ouvert U du plan complexe  $\mathbb{C}$  est dit connexe si lorsque l'on a deux points quelconques  $z_0$  et  $z_1$  de U on peut les relier par un chemin continu  $\gamma:[0,1]\to\mathbb{C}$ ,  $\gamma(0)=z_0$ ,  $\gamma(1)=z_1$  restant toujours dans U ( $\gamma([0,1])\subset U$ ). Si V est ouvert de  $\mathbb{C}$  et  $z_0\in V$ , la composante connexe de V contenant  $z_0$  est l'ensemble des points  $z_1$  de V que l'on peut relier par un chemin continu à  $z_0$  tout en restant dans V. <sup>13</sup> Un domaine (ou une région) est, par définition, un ouvert connexe (non vide...) du plan complexe.

<sup>13.</sup> prouvez que cet ensemble est ouvert et que les composantes connexes sont les classes d'équivalence de la relation d'équivalence «  $z_0 \sim z_1$  si l'on peut relier  $z_0$  à  $z_1$  par un chemin continu dans V ».

Théorème 8 (Principe du Prolongement Analytique) Si une fonction f analytique sur un ouvert connexe U du plan complexe  $\mathbb{C}$  est identiquement nulle sur un disque ouvert non vide  $D(z_0,r)$  inclus dans U alors elle identiquement nulle sur U. Ou encore : si deux fonctions analytiques f et g sur un domaine (= ouvert connexe) U prennent les mêmes valeurs sur un certain disque non vide dans U alors elles prennent partout les mêmes valeurs. Encore plus fort : si l'ensemble des points d'un domaine U où deux fonctions analytiques f et g sur U prennent les mêmes valeurs possède un point d'accumulation dans U alors en fait les deux fonctions f et g prennent partout dans U les mêmes valeurs. Ce sont, en fait, les mêmes fonctions.

Il serait plus adapté dans ce contexte de parler de Théorème d'Unicité Analytique, car je n'ai pas l'intention de discuter de manière plus approfondie l'idée d'un « prolongement » analytique.

Comme exemple d'application du théorème si deux fonctions entières coïncident sur l'intervalle réel [0,1] alors elles sont partout égales! Donc la fonction  $e^z$  est l'unique fonction entière égale à  $e^x$  pour  $0 \le x \le 1$ : on a utilisé l'équation différentielle E'(z) = E(z) pour la construire, mais il n'y a de toute façon pas d'autre prolongement possible de  $e^x$  comme fonction analytique en dehors de l'axe réel.

Je rappelle qu'un point d'accumulation d'un ensemble A est un point z (pas nécessairement dans A!) tel que pour tout  $\delta > 0$  on peut trouver  $z' \in A$  avec  $0 < |z - z'| \le \delta$ . Notez bien la condition  $z' \ne z$ . Une façon équivalente est de dire que l'on peut trouver une suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de A, deux à deux distincts, avec  $z = \lim z_n$ . <sup>14</sup> Je rappelle aussi qu'un point appartenant à A est dit isolé dans A si il n'est pas un point d'accumulation de A. Cela équivaut à dire qu'il existe un disque ouvert non vide centré en z qui n'intersecte A qu'en  $\{z\}$ .

Venons-en à la démonstration du théorème. Il suffit de prouver la dernière affirmation qui est la plus forte. On considère F = f - g et on est ramené à prouver que les zéros

<sup>14.</sup> cela équivaut encore à dire que l'on peut trouver des  $z_n \in A$  avec  $z = \lim z_n$ , les  $z_n$  étant tous distincts de z. Un sous-ensemble de  $\mathbf{C}$  est fermé si et seulement si il contient tous ses points d'accumulation. Plus généralement le plus petit fermé contenant A est l'union de A et de ses points d'accumulation. Un point de A peut être ou ne pas être un point d'accumulation.

d'une fonction analytique F sur U, non identiquement nulle, ne peuvent avoir aucun point d'accumulation dans U (ouvert connexe). Raisonnons par l'absurde. Supposons  $F(z_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $\lim z_n = w$  avec  $w \in U$ , les  $z_n$  étant tous distincts de w. Par continuité de la fonction F on a F(w) = 0. Par le Théorème 7 on peut affirmer que F est nécessairement identiquement nulle dans un voisinage suffisamment petit W de w.

Soit  $z \in U$  quelconque et soit  $\gamma : [0,1] \to U$  un chemin continu avec  $\gamma(0) = w$ ,  $\gamma(1) = z$ . Par continuité de  $\gamma$  pour t > 0 suffisamment petit on a  $\gamma(t) \in W$  et on a choisi W de sorte que F est identiquement nulle sur W. On peut donc définir un ensemble non-vide

$$B = \{t \in [0,1], il \text{ existe un voisinage de } \gamma(t) \text{ sur lequel } F \text{ est identiquement nulle}\}$$

et poser  $\tau = \sup B$  puisque  $B \subset [0,1]$  est non vide.

On aura  $0 < \tau \le 1$ . On peut alors (par l'une des propriétés caractérisant une borne supérieure) écrire  $\tau = \lim t_n$  avec une suite croissante (au sens large) d'éléments  $t_n$  de B. Soit  $w' = \gamma(\tau)$ . Par continuité de  $\gamma$  et de F, on a  $F(w') = F(\gamma(\tau)) = \lim F(\gamma(t_n)) = 0$ . Donc w' est un zéro de F. Supposons par extraordinaire que l'un des  $t_n$  soit tel que  $\gamma(t_n) = w'$ . Alors w' possède un voisinage sur lequel F est identiquement nulle, par la définition même de B (donc dans ce cas on a aussi  $\tau \in B$ ). Sinon, c'est que  $w' \neq \gamma(t_n)$  pour TOUS les n. Comme  $\lim \gamma(t_n) = w'$  et que  $\gamma(t_n) \neq w'$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tout voisinage de w' contient des points distincts de w' en lesquels F s'annule. Par le théorème 7 nous pouvons alors affirmer que F est identiquement nulle dans un certain voisinage de w'. Donc en fait  $\tau \in B$  dans ce cas aussi. Donc dans tous les cas  $\tau \in B$  et ainsi il existe un voisinage ouvert W' de w' dans U sur lequel F est identiquement nulle.

Pour conclure, supposons  $\tau < 1$ . Par continuité de  $\gamma$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t \in [0,1]$  avec  $\tau \leq t \leq \tau + \delta$  on a  $\gamma(t) \in W'$ . Donc W' est aussi un voisinage ouvert de  $\gamma(t)$  pour de tels t et donc par définition de B, tous ces t sont dans B. Ceci est impossible puisque  $\tau = \sup B$ . L'hypothèse  $\tau < 1$  a mené à une contradiction, donc  $\tau = 1$ . On sait aussi  $\tau \in B$  donc  $1 \in B$  et F est identiquement nulle dans un voisinage de  $z = \gamma(1)$ . En particulier F est nulle en z!

Mais z était arbitraire dans U donc F est partout nulle! <sup>15</sup>

À titre d'exemple assez foudroyant d'application du Théorème d'Unicité Analytique, supposons que l'on ait une fonction entière f(z) avec  $f(\frac{1}{n}) = e^{1/n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ . Alors  $\forall z \in \mathbb{C}$   $f(z) = \exp(z)$ ! En effet les deux fonctions analytiques f(z) et  $\exp(z)$  coïncident en les points  $\frac{1}{n}$  qui possèdent un point d'accumulation (à savoir,  $0 = \lim \frac{1}{n}$ ). Donc, par unicité analytique, et compte tenu du fait que  $\mathbb{C}$  est évidemment connexe, on a  $f(z) = \exp(z)$  partout. ATTENTION! si l'on prend par exemple comme ouvert (connexe) le demiplan  $U = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ , alors il est possible de trouver d'autres fonctions f analytiques sur f qui vérifient  $f(\frac{1}{n}) = e^{1/n}$  pour tout f en f had f

Théorème 9 (Théorème des zéros isolés) Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe U. Si f n'est pas identiquement nulle alors les zéros de f forment un ensemble A qui est fermé dans U et dont tous les points sont isolés dans A (on dit que A est un ensemble fermé (dans U!) discret). L'intersection de A avec un compact  $K \subset U$  quelconque est de cardinalité finie.

Preuve : comme U est connexe et que f n'est pas identiquement nulle, l'ensemble de ses zéros A ne peut avoir aucun point d'accumulation dans U, par le Théorème d'Unicité Analytique. En particulier les points de A sont isolés (dans A). De plus l'image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé donc  $A = f^{-1}(\{0\})$  est fermé (dans U pas forcément dans  $\mathbf{C}$  si  $U \neq \mathbf{C}!!$ ). Enfin la propriété caractéristique d'un compact c'est que toute suite de points possède une suite-extraite convergente. Si  $K \cap A$  était de

<sup>15.</sup> une démonstration un peu plus sophistiquée consiste à prouver que l'ensemble des  $z \in U$  tels que F est identiquement nulle dans un voisinage de z, est à la fois ouvert et fermé dans U, et d'utiliser la caractérisation suivante des ensembles topologiques connexes : ce sont les ensembles tels que leurs seuls sous-ensembles à la fois ouvert et fermé pour la topologie induite sont l'ensemble vide et l'ensemble tout entier. Je vous laisse décider si j'ai bien fait d'opter pour une autre preuve. Remarque : il est très facile de faire une démonstration fausse du principe du prolongement analytique!

<sup>16.</sup> on peut prendre  $f(z) = (1 + \sin(\frac{\pi}{z})) \exp(z)$ , et f est même holomorphe sur  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

cardinalité infinie, on pourrait construire une suite  $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$  de points deux-à-deux distincts dans  $K\cap A$ . Toute limite d'une suite-extraite serait alors un point d'accumulation de A. Mais A ne possède pas de point d'accumulation dans U, donc certainement pas non plus dans K qui est un sous-ensemble de U. Le théorème est démontré.

## 6 Les fonctions holomorphes sont analytiques

Nous allons montrer le Théorème Majeur de ce Chapitre.

Théorème 10 (Cauchy : analyticité des fonctions holomorphes) Soit f une fonction holomorphe sur un disque ouvert  $D(z_0, R)$ . Alors il existe des nombres complexes  $c_n \in \mathbb{C}$  tels que :

$$z \in D(z_0, R) \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n h^n$   $(h=z-z_0)$  est donc au moins égal à R. Plus généralement soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. Alors

- 1. f est une fonction analytique et en particulier elle est infiniment dérivable au sens complexe,
- 2. sur tout disque ouvert  $D(z_0, R)$  inclus entièrement dans U la fonction f est la somme de sa série de Taylor en  $z_0$ .

Pour la preuve nous allons, comme Cauchy, faire une hypothèse supplémentaire : à savoir que la fonction dérivée f' est continue. Ensuite nous verrons comment on peut se passer de cette hypothèse. Il est donc un petit peu exagéré d'attribuer au seul Cauchy la paternité de ce théorème. Le joli argument permettant de se dispenser de l'hypothèse de continuité de f' a été contribué en 1904 par Goursat, plusieurs décennies après que la théorie ait été construite par Cauchy, Riemann, Weierstrass.

Il suffit de montrer l'existence de la représentation  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  dans  $D(z_0, R)$  (puisque, compte tenu de notre étude précédente des fonctions analytiques, les autres affirmations du théorème en résultent) et clairement on peut tout aussi bien suppo-

ser  $z_0 = 0$ . Notre preuve <sup>17</sup> va reposer sur un Théorème (dit « de Dirichlet ») de la théorie des séries de Fourier (démonstration en annexe) :  $soit g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique dérivable, et  $c_n(g)$  pour  $n \in \mathbf{Z}$  ses coefficients de Fourier :  $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt$ . On a:

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad g(t) = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \le n \le N} c_n(g)e^{int}.$$

Nous appliquons ce « Théorème de Dirichlet » <sup>18</sup> aux fonctions  $g_r(t) = f(re^{it})$ , 0 < r < R,  $t \in \mathbf{R}$ . Elles sont de classe  $C^1$  et  $2\pi$ -périodiques. On posera donc pour  $n \in \mathbf{Z}$ :

$$c_n(r) = c_n(g_r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$$
.

Calculons la dérivée de  $c_n(r)$  par rapport à  $r: {}^{19}$ 

$$c'_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(re^{it})e^{it}e^{-int}dt$$
,

et intégrons alors par parties :

$$c'_{n}(r) = \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{1}{ri} f(re^{it}) e^{-int} \right]_{0}^{2\pi} + \frac{in}{ri} \int_{0}^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt \right) = \frac{n}{r} c_{n}(r)$$

En effet le terme entre crochets disparaît par  $2\pi$ -périodicité. Au final nous obtenons :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \ \forall r \in ]0, R[ \qquad c'_n(r) = \frac{n}{r}c_n(r)$$

Ces équations différentielles sont aisément résolues : la dérivée de  $r^{-n}c_n(r)$  est  $-nr^{-n-1}c_n(r)+r^{-n}\frac{n}{r}c_n(r)=0$ , donc  $r^{-n}c_n(r)$  est une constante, que nous noterons  $c_n$ :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \ \exists c_n \in \mathbf{C} \ \forall r \in ]0, R[ \qquad c_n(r) = c_n r^n$$

Nous avons presque fini. Choisissons  $\delta > 0$  avec  $\delta < R$  et notons  $M = \sup_{|z| \le \delta} |f(z)|$  qui est fini, car f est continue sur le compact  $\{|z| \le \delta\}$ . Alors :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \qquad c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt \implies \forall r \in ]0, \delta] \quad |c_n(r)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M dt = M$$

<sup>17.</sup> c'est une méthode parmi d'autres. Celle-ci est bien adaptée aussi à notre discussion future des « séries de Laurent », et de toute façon il faut bien faire un jour ou l'autre la remarque du lien entre les séries entières et les séries de Fourier.

<sup>18.</sup> le vrai théorème de Dirichlet a des hypothèses différentes, voir l'annexe.

<sup>19.</sup> expliquez pourquoi on a le droit de dériver sous le signe somme.

Donc,  $\forall n \in \mathbf{Z} \ \forall r \in ]0, \delta] \ |c_n| \leq Mr^{-n}$ . Supposons maintenant n < 0 et passons à la limite pour  $r \to 0^+$ . On obtient :

$$\forall n < 0 \quad c_n = 0 \quad \text{et donc aussi} \quad \forall r \in ]0, R[ \qquad c_n(r) = 0.$$

En invoquant le théorème de Dirichlet on obtient alors :

$$\forall r \in ]0, R[ \quad \forall t \in \mathbf{R} \qquad f(re^{it}) = \lim_{N \to \infty} \sum_{0 \le n \le N} c_n r^n e^{int} = \lim_{N \to \infty} \sum_{0 \le n \le N} c_n \cdot (re^{it})^n$$

et donc, finalement,

$$0 < |z| < R \implies f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

La série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  a donc un rayon de convergence au moins égal à R puisqu'elle converge pour des z avec |z| arbitrairement proches de R. En ce qui concerne la validité de la formule au point z=0, il suffit maintenant de dire que la fonction f(z) comme la somme de la série S(z) sont des fonctions continues pour |z| < R, et comme elles coïncident partout sauf peut-être en 0 elles coïncident aussi en z=0. Le Théorème de Cauchy est donc démontré (sous l'hypothèse de continuité de la fonction dérivée  $f'^{20}$ ): en effet nous avons établi que f est la somme d'une série entière dans D(0,R), le fait que cette série entière soit infiniment dérivable et qu'elle soit sa propre série de Taylor à l'origine sont des points que nous avons établis précédemment dans notre étude des fonctions analytiques.

On extrait de la preuve des formules intéressantes pour les dérivées successives de f en 0 puisque nécessairement  $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ :

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad \forall r \in ]0, R[ \qquad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int} dt$$

En particulier, pour n = 0 cela donne

$$\forall r \in ]0, R[ \qquad f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt$$

et donc:

**Théorème 11 (de la moyenne)** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U. En tout point  $z_0$  de U,  $f(z_0)$  est égal à la moyenne des valeurs de f prises sur le cercle de

<sup>20.</sup> l'hypothèse de continuité de f' a été utile pour justifier la dérivation par rapport à r de  $c_n(r)$  sous le signe d'intégration et pour intégrer par parties; elle n'était pas nécessaire pour le « théorème de Dirichlet » car la preuve donnée en annexe ne demande pas la continuité de la fonction dérivée.

centre  $z_0$  et de rayon r, pour tout r tel que le disque fermé  $\{|z-z_0| \le r\}$  soit inclus dans U. <sup>21</sup>

# 7 Existence de primitives et Théorème de Cauchy-Goursat

Comment faire lorsque l'on ne dispose plus de l'hypothèse de continuité pour la fonction dérivée f'? Voici une idée : supposons que l'on puisse trouver une primitive de f, c'est-àdire, une fonction g holomorphe avec g' = f. Alors cette fonction g a une dérivée continue (f est continue, puisque dérivable!), donc le théorème de la section précédente s'applique à g. Ainsi g est analytique, et donc ses dérivées successives f et f' aussi! Donc f' est continue, et la section précédente s'applique intégralement à f.

Alors, cherchons g avec g' = f. Il se trouve que sur un ouvert U quelconque, cela n'est pas toujours possible : par exemple il n'existe pas de fonction holomorphe sur  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  avec  $g'(z) = \frac{1}{z}$ . On en reparlera avec moult détails plus tard. Mais il se trouve qu'il n'y a pas de problème lorsque U est un disque ouvert et c'est bien le cas d'un disque  $D(z_0, R)$  qui nous intéresse ici. On pourra d'emblée supposer  $z_0 = 0$  sans perte de généralité et l'objectif est donc de prouver :

Théorème 12 (Existence d'une primitive) Soit R > 0 et soit f une fonction holomorphe sur D(0,R). Alors il existe une fonction holomorphe g sur D(0,R) telle que f soit la fonction dérivée de g.

Preuve : On va construire g de sorte que g(0) = 0. Soit z = x + iy dans le disque ouvert. Nécessairement, si g existe :

$$g(x) = \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x f(t)dt$$
$$g(x+iy) - g(x) = \int_0^y ig'(x+iu)du = i\int_0^y f(x+iu)du$$

Donc, en combinant, on est amené à adopter la définition suivante :

$$g(x+iy) = \int_0^x f(t)dt + i \int_0^y f(x+iu)du$$

<sup>21.</sup> justifier le fait que si le disque fermé  $\{|z-z_0| \le r\}$  est inclus dans U alors il existe r' > r tel que le disque ouvert  $D(z_0, r')$  est inclus dans U.

Mais comment montrer que cette fonction est holomorphe? Il est facile  $^{22}$  de calculer la dérivée partielle par rapport à y:

$$\frac{\partial}{\partial y}g(x+iy) = if(x+iy)$$

Mais comment faire pour  $\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy)$ ? Si l'on pouvait permuter  $\frac{\partial}{\partial x}$  et  $\int_0^y$  on pourrait ensuite utiliser Cauchy-Riemann pour f, c'est-à-dire remplacer  $\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}$  par  $\int_0^y -i\frac{\partial}{\partial y}$ , et après un tout petit calcul cela donnerait comme voulu  $\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy)=f(x+iy)$ . Ainsi la fonction g aurait des dérivées partielles continues vérifiant les équations de Cauchy-Riemann! Mais pour permuter  $\frac{\partial}{\partial x}$  et le signe  $\int_0^y$  dans une intégrale  $\int_0^y F(x,u)du$  dépendant d'un paramètre x il faut des hypothèses, par exemple la continuité de la fonction  $\frac{\partial}{\partial x}F(x,u)$  par rapport au couple (x, u). Mais justement nous ne disposons pas d'une telle hypothèse. <sup>23</sup>

Reprenons à zéro en échangeant les rôles de x et de y. Si g existe avec g' = f:

$$g(iy) = \int_0^y ig'(iu)du = i \int_0^y f(iu)du$$
$$g(x+iy) - g(iy) = \int_0^x g'(t+iy)dt = \int_0^x f(t+iy)dt$$

ce qui amène à definir une fonction (notée k pour éviter les confusions avec le g déjà défini) :

$$k(x+iy) = i \int_0^y f(iu)du + \int_0^x f(t+iy)dt$$

Pour cette fonction k il est facile de calculer la dérivée partielle par rapport à x:

$$\frac{\partial}{\partial x}k(x+iy) = f(x+iy)$$

Si nous savions que les deux fonctions q et k étaient en fait la même fonction alors nous pourrions affirmer:

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy) = f(x+iy)$$
$$\frac{\partial}{\partial y}g(x+iy) = if(x+iy)$$

La fonction g aurait ainsi des dérivées partielles continues et celles-ci vérifieraient les équations de Cauchy-Riemann. Par le Théorème 4 cela prouverait que g est holomorphe avec de plus  $g' = \frac{\partial}{\partial x}g = f$ . Le théorème d'existence d'une primitive serait alors établi.

<sup>22.</sup> je rappelle que pour toute fonction continue A(y), on a  $\frac{d}{dy} \int_0^y A(u) du = A(y)$ . 23. même les théorèmes plus puissants que l'on apprend dans le cours sur l'intégrale de Lebesgue ne suffiraient pas ici pour justifier la permutation de  $\frac{\partial}{\partial x}$  et de  $\int_0^y$ .

Le fait que k=g est cas particulier  $^{24}$  du Théorème de Cauchy-Goursat :

**Théorème 13 (de Cauchy-Goursat)** Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U et soit  $\mathcal{R} = \{x_0 \le x \le x_1, y_0 \le y \le y_1\}$  un rectangle inclus dans U. Alors

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz = 0$$

Ici, avant de donner dans le chapitre suivant les définitions générales pour les intégrales le long d'un chemin  $\gamma$ , ou sur le bord  $\partial\Omega$  d'un domaine, on utilisera les symboles  $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z)dz$  comme une simple notation condensée pour représenter, par définition :

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x+iy_0)dx + i \int_{y_0}^{y_1} f(x_1+iy)dy - \int_{x_0}^{x_1} f(x+iy_1)dx - i \int_{y_0}^{y_1} f(x_0+iy)dy$$

Supposons que l'on choisisse un point (X,Y) dans le rectangle  $\mathcal{R}$  et que l'on considère ainsi les 4 sous-rectangles  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$ ,  $\mathcal{R}_3$ ,  $\mathcal{R}_4$  aux bords parallèles aux axes ayant chacun le point (X,Y) parmi leurs sommets. Pour être spécifique on prend  $(X,Y) = (\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2})$ . Je vous laisse vérifier alors que l'on a :

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz = \sum_{1 < j < 4} \int_{\partial \mathcal{R}_j} f(z)dz$$

pour n'importe quelle fonction f (pourvu que les intégrales aient un sens et vérifient les règles de Chasles usuelles  $\int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\gamma} = \int_{\alpha}^{\gamma}$ ). Donc :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right| \le \sum_{1 \le j \le 4} \left| \int_{\partial \mathcal{R}_j} f(z) dz \right|$$

et il existe donc l'un des sous-rectangles  $\mathcal{R}_j$ , on le notera  $\mathcal{R}^{(1)}$ , tel que

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(1)}} f(z) dz \right| \ge \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right|$$

On construit ainsi une suite de rectangles emboîtés  $\mathcal{R}=\mathcal{R}^{(0)}\supset\mathcal{R}^{(1)}\supset\mathcal{R}^{(2)}\supset\dots$  avec

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j+1)}} f(z) dz \right| \ge \frac{1}{4} \left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right|$$

<sup>24.</sup> c'est un cas particulier car dans le théorème qui suit on ne se restreint pas à U égal à un disque; par contre en ce qui concerne les cas x<0 ou y<0 il faut faire un peu d'algèbre avec  $\int_0^x=-\int_x^0, \int_0^y=-\int_y^0,$  pour se ramener au théorème qui suit où l'on a  $x_0\leq x_1$  et  $y_0\leq y_1$ .

et donc, par récurrence :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right| \ge \frac{1}{4^j} \left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right|$$

Notons  $(X_j, Y_j)$  les coordonnées du point inférieur gauche du rectangle  $\mathcal{R}^{(j)}$  (en particulier  $(X_0, Y_0) = (x_0, y_0)$ ). Alors par construction  $X_{j+1} - X_j$  vaut 0 ou  $\frac{x_1 - x_0}{2^{j+1}}$  et aussi  $Y_{j+1} - Y_j$  vaut 0 ou  $\frac{y_1 - y_0}{2^{j+1}}$ . La suite  $(X_j)$  est croissante et majorée par  $x_1$  donc convergente, et la suite  $(Y_j)$  est croissante et majorée par  $y_1$  donc convergente. Soit  $X_\infty$  et  $Y_\infty$  les limites et  $z_\infty = X_\infty + iY_\infty$ . Chaque rectangle  $\mathcal{R}^{(j)}$  est fermé et tous les points  $(X_k, Y_k)$ ,  $k \geq j$  sont dedans, donc aussi leur limite  $(X_\infty, Y_\infty)$ . Puisque la largeur de  $\mathcal{R}^{(j)}$  est exactement  $\frac{x_1 - x_0}{2^j}$  et sa hauteur  $\frac{y_1 - y_0}{2^j}$  il en résulte que pour tout point z se trouvant sur son bord on a l'inégalité :

$$|z - z_{\infty}| \le \frac{D}{2^{j}}$$
 avec  $D = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$ 

La fonction f est dérivable au sens complexe au point  $z_{\infty}$ . On peut donc pour tout  $\epsilon > 0$  trouver  $\delta > 0$  tel que pour  $|z - z_{\infty}| \le \delta$  on a  $|f(z) - f(z_{\infty}) - f'(z_{\infty})(z - z_{\infty})| \le \epsilon |z - z_{\infty}|$ . Donc, pour  $\epsilon > 0$  fixé et pour tout j suffisamment grand, on aura, pour tous les z sur le bord du rectangle  $\mathcal{R}^{(j)}$ :

$$|f(z) - f(z_{\infty}) - f'(z_{\infty})(z - z_{\infty})| \le \epsilon \frac{D}{2i}$$

puis, en notant  $P = 2|x_1 - x_0| + 2|y_1 - y_0|$  le périmètre de  $\mathcal{R}$ , et donc  $\frac{P}{2^j}$  le périmètre de  $\mathcal{R}^{(j)}$ , on peut affirmer, pour tout j suffisamment grand :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} \left( f(z) - f(z_{\infty}) - f'(z_{\infty})(z - z_{\infty}) \right) dz \right| \le \epsilon \frac{P}{2^{j}} \frac{D}{2^{j}} = \epsilon \frac{PD}{4^{j}}$$

C'est là où l'on fait la remarque simplificatrice :

$$\int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} dz = 0 \quad \text{et aussi} \quad \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} z \cdot dz = 0 ,$$

cela vaut pour n'importe quel rectangle et je vous le laisse à vérifier, c'est très simple. Donc d'une part pour tout j:

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right| \ge \frac{1}{4^j} \left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right|$$

et d'autre part pour tout j suffisamment grand :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^{(j)}} f(z) dz \right| \le \epsilon \frac{PD}{4^j}$$

En combinant les deux on obtient :

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right| \le \epsilon PD$$

Mais  $\epsilon > 0$  est arbitraire. Donc, on peut conclure, on a  $\left| \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz \right| = 0$  ce qui donne (finalement):

$$\int_{\partial \mathcal{P}} f(z)dz = 0$$

Le Théorème de Cauchy-Goursat est démontré, et avec lui aussi celui de l'existence d'une primitive pour toute fonction holomorphe sur un disque et donc aussi le Théorème d'analyticité des fonctions holomorphes en toute généralité. On peut donc conclure là ce Chapitre.

#### 8 Annexes

#### 8.1 Différentiabilité

**Théorème 14** Si la fonction (à valeurs réelles ou complexes) F(x,y) admet des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tous les points d'un ouvert U du plan, et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues du couple (x,y) de cet ouvert U, alors la fonction F est différentiable en tout point (x,y) de l'ouvert U.

Pour la preuve notons  $A(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$  et  $B(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$  les dérivées partielles de F, dont on suppose qu'elles existent en tout point de U et sont des fonctions continues du couple (x,y). Soit  $(x_0,y_0)$  un point de l'ouvert U. Notons  $A_0 = A(x_0,y_0)$  et  $B_0 = B(x_0,y_0)$ . Il existe  $\delta_0 > 0$  tel que U contienne le rectangle  $\mathcal{R}(\delta_0) = \{|x - x_0| \le \delta_0, |y - y_0| \le \delta_0\}$ . Soit  $(x,y) \in \mathcal{R}(\delta_0)$ , écrivons :

$$F(x,y) - F(x_0, y_0)$$

$$= F(x,y) - F(x_0, y) + F(x_0, y) - F(x_0, y_0)$$

$$= \int_{x_0}^x A(t, y) dt + \int_{y_0}^y B(x_0, u) du$$

$$= (x - x_0) A_0 + \int_{x_0}^x (A(t, y) - A_0) dt + (y - y_0) B_0 + \int_{y_0}^y (B(x_0, u) - B_0) du$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Par continuité des fonctions A et B il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout couple (x', y') dans  $\mathcal{R}(\delta)$  on ait  $|A(x', y') - A_0| \le \epsilon$ ,  $|B(x', y') - B_0| \le \epsilon$ . Donc:

$$(x,y) \in \mathcal{R}(\delta) \implies |F(x,y) - F(x_0,y_0) - A_0 \cdot (x - x_0) - B_0 \cdot (y - y_0)| \le \epsilon |x - x_0| + \epsilon |y - y_0|$$

On aura remarqué que les points (t, y),  $t \in |[x_0, x]|$ , et  $(x_0, u)$ ,  $u \in |[y_0, y]|$ , sont tous dans  $\mathcal{R}(\delta)$  lorsque (x, y) y est. <sup>25</sup> Autrement dit en posant, pour  $(h_1, h_2) \neq (0, 0)$ :

$$\epsilon(h_1, h_2) = \frac{F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - F(x_0, y_0) - A_0 \cdot h_1 - B_0 \cdot h_2}{|h_1| + |h_2|},$$

on a:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad 0 < \max(|h_1|, |h_2|) \le \delta \implies |\epsilon(h_1, h_2)| \le \epsilon$$

c'est-à-dire  $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \epsilon(h_1,h_2) = 0$ . Donc (par définition) F est différentiable au point  $(x_0,y_0)$ , la preuve est complète.

#### 8.2 Séries doubles

Une série double est d'abord une expression formelle  $\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m}$  avec des nombres complexes  $a_{n,m}$  indexés par  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ . Dans un premier temps nous ferons l'hypothèse : <sup>26</sup>

$$\forall (n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \quad a_{n,m} > 0$$

Dans ce cas considérons l'ensemble  $\mathcal{A} \subset [0, +\infty[$  des nombres réels de la forme  $S(B) := \sum_{(n,m)\in B} a_{n,m}$  avec  $B \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  de cardinalité finie. Alors, par définition :

$$\sum_{n,m>0} a_{n,m} = \sup(\mathcal{A})$$

Il s'agit donc d'un élément de  $[0, +\infty[\cup\{+\infty\}]$ . La série est dite *convergente* si cet élément n'est pas  $+\infty$ .

Théorème 15 Que la série de terme général positif ou nul  $a_{n,m}$  soit convergente ou divergente on a toujours :

$$\sum_{n,m\geq 0} a_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k\\n,m>0}} a_{n,m}$$

<sup>25.</sup> notation :  $|[a, b]| = [\min(a, b), \max(a, b)].$ 

<sup>26.</sup> dans ce cas spécial on pourrait autoriser  $a_{n,m} = +\infty$ . Cela serait utile si l'on voulait discuter des séries triples! mais bon, on en restera là ici.

On notera que chacune des séries simples est à termes positifs, a ainsi des sommes partielles croissantes et donc possède une limite dans  $[0, +\infty]$ . <sup>27</sup>

Soit  $B\subset {\bf N}\times {\bf N}$  de cardinalité finie. Alors pour N et M suffisamment grand  $B\subset \{0,\dots,N\}\times \{0,\dots,M\}$  donc

$$S(B) = \sum_{\substack{(n,m)\in B}} a_{n,m} \le \sum_{\substack{0 \le n \le N\\0 \le m \le M}} a_{n,m}$$

On a donc:

$$\begin{split} &\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) \geq \sum_{n=0}^{N} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) \geq \sum_{n=0}^{N} \left( \sum_{m=0}^{M} a_{n,m} \right) \geq S(B) \\ &\sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right) \geq \sum_{m=0}^{M} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right) \geq \sum_{m=0}^{M} \left( \sum_{n=0}^{N} a_{n,m} \right) \geq S(B) \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 0}} a_{n,m} \geq \sum_{k=0}^{N+M} \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m \geq 0}} a_{n,m} = \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq M}} a_{n,m} \geq \sum_{\substack{0 \leq n \leq N \\ 0 \leq m \leq M}} a_{n,m} \geq S(B) \end{split}$$

Donc chacune des trois séries considérées majore chacun des S(B), c'est-à-dire majore le sous-ensemble  $\mathcal{A}$  de  $[0, +\infty[$ . Par définition de  $\sup(\mathcal{A})$  cela implique que chacune des trois séries majore  $\sup(\mathcal{A})$ .

De plus pour tout N fini, fixé, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} \left( \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} a_{n,m} = \lim_{M \to \infty} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{N} a_{n,m} \; ,$$

et, comme limite d'éléments de  $\mathcal{A}$  cela est majoré par  $\sup(\mathcal{A})$ . Donc la limite pour  $N \to \infty$  est aussi majorée par  $\sup(\mathcal{A})$ .

On raisonne de même avec

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \right) = \lim_{M \to \infty} \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m}$$

$$= \lim_{M \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m}$$

$$= \lim_{M \to \infty} \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} a_{n,m} \le \sup(\mathcal{A})$$

<sup>27.</sup> certaines des séries simples intérieures peuvent valoir  $+\infty$ . Examiner par exemple la situation avec  $a_{n,m} = 1$  pour tout (n,m)!

Et c'est encore plus immédiat pour les sommes triangulaires. Bref, chacune des trois séries minore  $\sup(A)$ . Elles sont donc chacune égale à  $\sup(A)$  d'où le théorème.

Prenons le cas général de séries doubles à termes complexes  $u_{n,m}$ . La série double  $\sum_{n,m\geq 0} u_{n,m} \text{ est dite } absolument \ convergente \ \text{si}$ 

$$\sum_{n,m>0} |u_{n,m}| < \infty$$

Par le théorème précédent il suffit pour cela que  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right) < \infty$ , ou que  $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}|\right) < \infty$ , ou encore que  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k\\n,m>0}} |u_{n,m}| < \infty$ .

Supposons que l'une de (donc toutes) ces conditions soit vérifiée. Alors pour chaque n fixé on a  $\sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}| < \infty$  (sinon la série double ne pourrait pas être finie...) et pour m fixé on a  $\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n,m}| < \infty$ , et donc les séries simples  $\sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}$  sont chacunes absolument convergentes, donc convergentes. Et comme :

$$\forall n \quad \left| \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |u_{n,m}|$$

la série  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$  avec terme général  $S_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m}$  est elle aussi absolument convergente. Idem avec  $\sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m}\right)$  et aussi avec  $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k\\n,m\geq 0}}^{n+m=k} u_{n,m}$ . On peut donc définir trois nombres complexes :

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) \quad Y = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right) \quad Z = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k\\n,m \ge 0}} u_{n,m}$$

Théorème 16 Soit  $\sum_{n,m\in\mathbb{N}^2} u_{n,m}$  une série double de nombres complexes. Si elle est absolument convergente alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,m} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{n+m=k \ n,m>0}} u_{n,m} ,$$

toutes les séries apparaissant ici étant absolument convergentes. La valeur commune pourra être notée  $\sum\limits_{\substack{n\geq 0\\m\geq 0}}u_{n,m}$  (la notation ne précise pas dans quel ordre on est censé sommer, mais le théorème nous dit justement que le résultat ne dépend pas de l'ordre).

Pour la preuve il est clair que l'on peut considérer séparément les parties réelles et imaginaires. Il suffit ainsi de démontrer le théorème sous l'hypothèse  $\forall n, m \ u_{n,m} \in \mathbf{R}$ .

Définissons:

$$a_{n,m} = |u_{n,m}|$$
  $b_{n,m} = |u_{n,m}| - u_{n,m}$ 

Comme  $0 \le b_{n,m} \le 2a_{n,m}$  la série double de terme général  $b_{n,m}$  est elle-aussi convergente. En écrivant

$$u_{n,m} = a_{n,m} - b_{n,m}$$

l'égalité X = Y = Z résulte des égalités analogues pour la série double de terme général positif ou nul  $a_{n,m}$  et de celles pour la série double de terme général positif ou nul  $b_{n,m}$ .

### 8.3 Théorème de Dirichlet

Théorème 17 Soit  $g: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$  une fonction  $2\pi$ -périodique, partout dérivable. Soit  $c_n(g)$  pour  $n \in \mathbf{Z}$  ses coefficients de Fourier:

$$\forall n \in \mathbf{Z} \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt \;,$$

alors

$$\forall t_0 \in \mathbf{R} \quad g(t_0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N < n < N} c_n(g)e^{int_0}.$$

Comme la fonction g est supposée dérivable, elle est continue, et donc elle est intégrable au sens de Riemann  $^{28}$ , ce qui donne un sens aux coefficients de Fourier  $c_n(g)$ . Le premier théorème de ce type avec une preuve rigoureuse est dû à Dirichlet. Mais ici on devrait parler de Théorème de Dirichlet-Riemann : la preuve utilise de manière essentielle un important « Lemme de Riemann », dont nous donnerons l'énoncé le moment venu.

Dans les livres d'enseignement un théorème est souvent énoncé, sous le nom de « Théorème de Dirichlet », avec comme hypothèse pour g d'être de classe  $C^1$  par morceaux (et aux éventuels points de discontinuité de g, en nombre fini, le théorème dit que la limite de la série de Fourier en  $t_0$  est  $\frac{g(t_0^+)+g(t_0^-)}{2}$ ). Les hypothèses de Dirichlet étaient : nombre fini de discontinuités de première espèce et nombre fini de maxima et de minima locaux, et ce n'est pas la même chose que  $C^1$  par morceaux! Chez Dirichlet il n'y a pas d'hypothèse de dérivabilité. <sup>29</sup> Jordan a prouvé un théorème plus général que celui de Dirichlet ; son hypothèse est : la fonction est à variation bornée <sup>30</sup> et cela contient comme cas particulier le cas des fonctions de classe  $C^1$ , ou de classe  $C^1$  par morceaux. Les conditions de Dirichlet et de Jordan (sur  $[-\pi,\pi]$  tout entier ou un intervalle ouvert  $I \subset [-\pi,\pi]$ )

<sup>28.</sup> une présentation de l'intégrale de Riemann est disponible sur le site de l'auteur.

<sup>29.</sup> je signale tout de même par acquit de conscience que par un théorème célèbre de Lebesgue une fonction monotone, ou à variation bornée, est presque partout dérivable.

<sup>30.</sup> voir le cours sur les fonctions de variations bornées sur le site de l'auteur

sont des conditions qui garantissent la convergence de la série de Fourier en tout point (en tout point de l'intervalle I). En ce qui concerne l'hypothèse de dérivabilité on peut la faire en un unique point  $t_0$ : si g est intégrable au sens de Riemann (ou de Lebesgue), et si  $g'(t_0)$  existe, alors la série de Fourier converge au point  $t_0$  vers  $g(t_0)$ . En effet on peut vérifier que la preuve que nous allons donner ici du théorème 17 s'adapte à ce cas. Donc la condition de dérivabilité permet de donner un critère suffisant pour la convergence en un point donné  $t_0$ , alors que la condition du théorème de Dirichlet-Jordan est suffisante pour la convergence en tous les points d'un intervalle ouvert. C'est donc, me semble-t-il, un (léger) contresens que d'associer le nom de Dirichlet à la condition de dérivabilité comme condition suffisante de convergence d'une série de Fourier.

Si k est une fonction  $2\pi$ -périodique intégrable au sens de Riemann ou de Lebesgue alors  $\int_a^{a+2\pi} k(u) du$  ne dépend pas de a. En effet  $\int_a^{a+2\pi} = \int_a^0 + \int_0^{2\pi} + \int_{2\pi}^{2\pi+a} = \int_a^0 + \int_0^{2\pi} + \int_0^a = \int_0^{2\pi}$ , en utilisant les relations de Chasles et  $\int_{2\pi}^{2\pi+a} = \int_0^a \operatorname{par} 2\pi$ -périodicité.

Fixons  $t_0$  et considérons la fonction  $k(t) = g(t_0 + t)$ , alors  $c_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{-t_0 + 2\pi} k(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{-t_0 + 2\pi} g(t_0 + t) e^{-int} dt = e^{int_0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(u) e^{-inu} du = e^{int_0} c_n(g)$ . Donc si le théorème est connu pour k en 0, alors  $g(t_0) = k(0) = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \le n \le N} c_n(k) = \lim_{N \to \infty} \sum_{-N \le n \le N} c_n(g) e^{int_0}$ .

Quitte à remplacer g par k on est ramené au cas  $t_0 = 0$ . On va utiliser l'existence de g'(0), la dérivabilité aux autres points sera superflue (on utilisera aussi la continuité de g sur  $[-\pi, \pi]$ , mais la preuve pourrait s'étendre aux g supposées seulement Riemann-intégrables, voire Lebesgue-intégrables). On a :  $^{31}$ 

$$S_N := \sum_{-N \le n \le N} c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sum_{-N \le n \le N} e^{int} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} ((g(t) + g(-t)) \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt$$

Dans le cas particulier où la fonction g est la constante 1, alors les  $c_n(g)$  sont tous nuls, sauf  $c_0 = 1$ , donc pour  $g \equiv 1$  on doit trouver  $S_N = 1$ . Ainsi :

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2 \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt ,$$

et, à nouveau dans le cas général :

$$S_N - g(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{g(t) + g(-t) - 2g(0)}{\sin(\frac{t}{2})} \sin((N + \frac{1}{2})t) dt$$

Par dérivabilité en 0 de g, on a :

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0) + g(-t) - g(0)}{t} = g'(0) - g'(0) = 0 ,$$

<sup>31.</sup> je laisse en exercice le calcul de la somme géométrique  $\sum_{-N \le n \le N} e^{int} = \sum_{-N \le n \le N} q^n$ ,  $q = e^{it}$ .

donc la fonction continue G définie sur  $]0,\pi]$  par :

$$G(t) := \frac{g(t) + g(-t) - 2g(0)}{\sin(\frac{t}{2})}$$

a une limite  $^{32}$  à droite en t=0. Cette limite est nulle, mais nous n'allons pas faire usage de ce point, son existence seule nous suffit, car elle nous permet d'étendre par continuité G en t=0 et donc de la considérer comme une fonction continue sur  $[0,\pi]$ .  $^{33}$ 

Il suffit donc à ce stade pour pouvoir affirmer  $\lim_{N\to+\infty} S_N = g(0)$  de disposer du :

Théorème 18 (Lemme de Riemann)  $Soit -\infty < a < b < \infty$  et soit  $G : [a,b] \to \mathbb{C}$  une fonction continue, ou plus généralement intégrable au sens de Riemann. On a alors :

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b \sin(\lambda t) G(t) \, dt = 0 \qquad et \qquad \lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b \cos(\lambda t) G(t) \, dt = 0$$

L'idée clé est que si pour tout  $\epsilon > 0$  on peut trouver une fonction K (dépendant de  $\epsilon$ !) pour laquelle le Lemme est vrai et telle que  $\int_a^b \left| G(t) - K(t) \right| dt < \epsilon$  alors le Lemme est vrai pour G. En effet

$$\left| \int_{a}^{b} \sin(\lambda t) G(t) dt \right| \leq \left| \int_{a}^{b} \sin(\lambda t) (G(t) - K(t)) dt \right| + \left| \int_{a}^{b} \sin(\lambda t) K(t) dt \right|$$
$$\leq \epsilon + \left| \int_{a}^{b} \sin(\lambda t) K(t) dt \right|$$

Comme le Lemme est vrai pour K il existe  $\Lambda$  tel que pour  $|\lambda| \ge \Lambda$  le dernier terme est aussi majoré par  $\epsilon$ . Donc

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \Lambda \quad |\lambda| \ge \Lambda \implies \left| \int_a^b \sin(\lambda t) G(t) \, dt \right| \le 2\epsilon$$

On procède de même avec cos à la place de sin.

<sup>32.</sup> je rappelle que  $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ .

<sup>33.</sup> vous remarquerez que cela veut dire en particulier qu'à la place de l'existence de g'(0) on peut utiliser l'hypothèse plus faible de l'existence de dérivées à droite et à gauche. On peut affaiblir cela encore en l'hypothèse de la propriété de Lipschitz (ou même la propriété de Hölder) en 0. De plus, sous ces hypothèses, on n'a pas besoin de la continuité de g en 0 mais seulement de l'existence de limites à droite  $g(0^+)$  et à gauche  $g(0^-)$  et la preuve établirait dans ce cas la convergence vers  $(g(0^+)+g(0^-))/2$ . Signalons aussi qu'en utilisant la validité du Lemme de Riemann pour les fonctions Riemann ou même Lebesgue intégrables, on obtient des énoncés tels que : si g est intégrable (au sens de Riemann ou, plus généralement, au sens de Lebesgue), et  $si g'(t_0)$  existe, alors la série de Fourier de g au point  $t_0$  est convergente de limite  $g(t_0)$ .

On dispose de deux catégories de fonctions K pour lesquelles le Lemme est facilement prouvé : les fonctions de classe  $C^1$  (intégration par parties), et les fonctions en escalier, qui sont combinaisons linéaires finies de fonctions  $K_{c,d}(x) = \begin{cases} 1 & x \in [c,d] \\ 0 & x \notin [c,d] \end{cases}$ : le calcul direct pour ces dernières est immédiat. En fait ces deux catégories conviennent : toute fonction G intégrable au sens de Riemann, ou même intégrable au sens de Lebesgue, peut être approchée par une telle K à epsilon près au sens suivant :  $\int_a^b |G - K| \, dt < \epsilon$ . Ce théorème d'approximation  $^{34}$  n'est pas une broutille pour l'intégrale de Lebesgue, mais pour l'intégrale de Riemann il est plus à portée de main, car on n'a qu'à rappeler que l'on peut prendre comme définition  $^{35}$  de l'intégrabilité au sens de Riemann la chose suivante : une fonction G à valeurs réelles est intégrable au sens de Riemann si et seulement si on peut pour tout  $\epsilon > 0$  trouver deux fonctions en escalier  $K_1$  et  $K_2$  avec  $K_1 \le G \le K_2$  et  $\int_a^b (K_2 - K_1) \, dt \le \epsilon$ .

Alors, pour un G général on écrit G = Re(G) + iIm(G), on prend un  $K_1$  pour Re(G) avec  $\frac{1}{2}\epsilon$ , et un  $K_1'$  pour Im(G) avec  $\frac{1}{2}\epsilon$ , et ensuite avec  $K = K_1 + iK_1'$  on a  $\int_a^b |G - K| \, dt < \epsilon$ .

Dans le cas particulier des fonctions G continues, à valeurs réelles, l'uniforme continuité permet de justifier (exercice!) l'existence de  $K_1$  et  $K_2$  avec une propriété plus forte :  $K_1 \leq G \leq K_2$  et  $\forall t \ K_2(t) - K_1(t) \leq \frac{1}{b-a} \epsilon$ . Ces inégalités valables pour tout t impliquent l'inégalité  $\int_a^b (K_2 - K_1) \, dt \leq \epsilon$ . C'est d'ailleurs essentiellement par cet argument que l'on établit que les fonctions continues sont intégrables au sens de Riemann.

Bref, nous avons démontré le Lemme de Riemann pour les fonctions Riemann-intégrables, avec un argument plus explicite encore pour les fonctions continues (via l'uniforme continuité). Donc nous avons démontré le « Théorème de Dirichlet » en particulier pour les fonctions  $2\pi$ -périodiques et partout dérivables.

Pour en revenir à notre discussion du Lemme de Riemann, on a par ordre croissant de généralité, pour G à valeurs réelles sur un intervalle [a, b]:

1. G est continue (donc uniformément continue) : alors pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $K_1$  et  $K_2$  en escalier avec  $\forall t \ K_1(t) \leq G(t) \leq K_2(t)$  et  $\forall t \ K_2(t) - K_1(t) \leq \frac{1}{b-a}\epsilon$ . <sup>36</sup>

<sup>34.</sup> des raisonnements simples montrent que si l'on sait faire avec des K en escalier, on sait faire avec des K de classe  $C^1$ , et vice-versa.

<sup>35.</sup> et si ce n'est pas une définition, c'est une caractérisation que l'on établit lorsque l'on explique la théorie de Riemann. Voir le fichier sur Riemann du site de l'auteur

<sup>36.</sup> les fonctions avec cette propriété sont appelées fonctions réglées. On prouve qu'une fonction est réglée

- 2. G est intégrable au sens de Riemann : alors pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver  $K_1$  et  $K_2$  en escalier avec  $\forall t \ K_1(t) \leq G(t) \leq K_2(t)$  et  $\int_a^b (K_2(t) K_1(t)) dt \leq \epsilon$ . <sup>37</sup>
- 3. G est intégrable au sens de Lebesgue : alors pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut trouver K en escalier avec  $\int_a^b \left| G(t) K(t) \right| dt \le \epsilon$ .

Le dernier point nécessite de la part des Professeurs courageux qui veulent l'établir une discussion précise et assez approfondie de l'intégrale de Lebesgue. Je n'en dis pas plus ici. <sup>38</sup>

Le Lemme de Riemann vaut donc aussi pour les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, et dans ce contexte il s'appelle Lemme de Riemann-Lebesgue, et il est alors aussi valable pour un intervalle de longueur infini <sup>39</sup>. Il prend donc la forme suivante :

$$si \, \int_{\mathbf{R}} |f(t)| \, dt < \infty \ alors \, \lim_{|\lambda| \to \infty} \int_{\mathbf{R}} f(t) \cos_{\sin}(\lambda t) \, dt = 0.$$

Exercice : la fonction log n'est pas intégrable au sens de Riemann sur ]0,1] puisqu'elle n'est pas bornée. Cependant elle est intégrable au sens de Lebesgue (puisque  $\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{1} |\log(t)| dt = 1 < \infty$ ). Prouver

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^1 \log(t) \cos(\lambda t) dt = 0$$

sans faire appel au lemme de Riemann-Lebesgue (ind. : intégrer par parties  $\int_{\ell}^{1}$ .)

## 8.4 L'équation différentielle y'' + y = 0

**Théorème 19** Soit  $f: I \to \mathbf{C}$  une fonction à valeurs réelles ou complexes sur un intervalle ouvert  $I \subset \mathbf{R}$ . Si

$$\forall x \in I \quad f''(x) = -f(x) \; ,$$

alors il existe deux constantes (uniques, réelles si f est à valeurs réelles) A et B dans C telles que :

$$\forall x \in I \quad f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$$

si et seulement si elle admet en tout point une limite à droite et une limite à gauche (ce qui confirme que les fonctions continues sont réglées). Voir la présentation de l'intégrale de Riemann sur le site de l'auteur.

<sup>37.</sup> cette propriété caractérise l'intégrabilité au sens de Riemann.

<sup>38.</sup> ne pas confondre la classe des fonctions en escalier avec la classe plus grande des fonctions dites étagées ou simples qui sont par définition les fonctions mesurables ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

<sup>39.</sup> avec l'intégrale de Lebesgue on n'est plus limité à un intervalle d'intégration de longueur finie. Je rappelle qu'en théorie de Riemann les intégrales sur des intervalles infinis sont dites généralisées, ou impropres, ce sont des limites d'intégrales sur des intervalles de longueurs finies, il n'y a pas de définition directe. C'est aussi le cas pour les fonctions non bornées sur un intervalle de longueur finie. La théorie de Riemann est une théorie de l'intégration de fonctions bornées sur un intervalle borné.

Pour la preuve je vais supposer  $I = \mathbf{R}$  et je vous laisse faire pour un intervalle ouvert quelconque. Les coefficients A et B sont uniques puisque l'on doit avoir f(0) = A, f'(0) = B.

Certainement f est continue puisque par hypothèse f est deux fois dérivable. Comme f'' = -f, f est de classe  $C^2$  (évidemment en itérant on voit qu'elle est en réalité infiniment dérivable). On a la formule (cas particulier de la formule de Taylor avec reste intégral de Lagrange) :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x - t)f''(t) dt.$$

On ne va pas appliquer cette formule à f mais plutôt à  $g(x) = f(x) - A\cos(x) - B\sin(x)$  avec A = f(0) et B = f'(0). En effet cette fonction g vérifie elle aussi l'équation g'' = -g et de plus g(0) = 0, g'(0) = 0. Donc :

$$g(x) = \int_0^x (x - t)g''(t) dt = -\int_0^x (x - t)g(t) dt$$

Notons  $M(x) = \sup\{|g(t)| \mid |t| \leq |x|\}$ . Par continuité de g on a  $M(x) < \infty$  pour tout x. La fonction M est paire. Elle est croissante sur  $[0, \infty[$ . On écrit :

$$|g(x)| \le \left| \int_0^x |x - t| M(x) dt \right| = M(x) \int_0^{|x|} u du = \frac{1}{2} M(x) x^2$$

Si  $|y| \le |x|$  alors  $|g(y)| \le \frac{1}{2}M(y)y^2 \le \frac{1}{2}M(x)x^2$ . Donc en passant au sup, on trouve :

$$\forall x \qquad M(x) \le \frac{1}{2}M(x)x^2$$

Prenons en particulier x=1. On obtient  $M(1) \leq \frac{1}{2}M(1)$ . Donc M(1)=0. Donc g est identiquement nulle sur l'intervalle [-1,+1]. Mais alors g(1)=g'(1)=0. On peut alors appliquer ce qui précède à  $g_1(x)=g(1+x)$ , puis à  $g_2(x)=g(2+x)$ , etc..., et montrer par récurrence que g est identiquement nulle sur [n-1,n+1]. Donc g est identiquement nulle sur  $[-1,\infty[$ . On fait de même pour  $]-\infty,+1]$  (ou on applique ce qui précède à g(-x)). Donc g est identiquement nulle et  $f(x)=A\cos(x)+B\sin(x)$  ce qu'il fallait démontrer.

Université Lille 1 — UFR de Mathématiques

Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable: Jean-François Burnol

Note : pour ce chapitre aussi on recommande fortement au lecteur de dessiner dans la marge les figures utiles à la compréhension du texte.

DEUXIÈME CHAPITRE

Dans le premier chapitre nous avons défini les notions d'holomorphie (une fonction

définie sur un ouvert du plan complexe est holomorphe si elle est dérivable au sens complexe

en tout point) et d'analyticité (une fonction est analytique si en tout point  $z_0$  il existe

un disque ouvert non vide  $D(z_0, r)$  centré en ce point sur lequel la fonction est la somme

d'une série entière en la variable  $h = z - z_0$ ), et nous avons prouvé l'équivalence de ces deux

notions. Donc à l'avenir j'emploierai l'un ou l'autre des deux termes, et si l'un semblera

être employé plus souvent cela ne sera que l'effet du hasard.

Le premier chapitre a fait émerger de manière explicite ou implicite un nombre impor-

tant de sujets d'approfondissement, et l'ordre dans lequel nous allons les explorer ici et

plus tard, sur plusieurs chapitres encore, n'est pas un ordre a priori, d'autres agencements

auraient pu tout aussi bien convenir. Mais on ne peut pas tout faire simultanément.

Le Logarithme complexe 9

Revenons au problème de construire un logarithme complexe. Notons provisoirement

 $\log(z)$  une fonction g holomorphe vérifiant  $g'(z)=\frac{1}{z}$  et g(1)=0. Pour commencer on

prendra comme ouvert de définition le disque D de centre 1 et de rayon 1. On sait, par

un théorème du chapitre précédent, que dans un disque toute fonction analytique admet une primitive. Donc une telle g définie sur D existe par ce théorème. Elle est donnée par la somme d'une série entière dans D:

$$g(1+h) = c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + \dots$$

et l'on veut donc :

$$c_1 + 2c_2h + 3c_3h^2 + \dots = g'(1+h) = \frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \dots$$

ce qui équivant <sup>40</sup> à  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = -\frac{1}{2}$ ,  $c_3 = +\frac{1}{3}$ , etc...

Donc on retrouve la série bien connue:

$$\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots$$

dont le rayon de convergence est, en fait, exactement 1. Il est très intéressant d'examiner la question de la convergence de la série sur le cercle |h| = 1, nous y reviendrons dans un prochain chapitre. La représentation que nous avons obtenue :

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

est jolie, mais ne fonctionne que pour |z-1| < 1 (nous verrons qu'elle fonctionne aussi pour z avec |z-1| = 1, sauf z=0) alors que nous savons qu'il existe une fonction logarithme  $\log(t)$  pour  $0 < t < \infty$ .

Lorsque nous avons prouvé dans le chapitre précédent que dans un disque toute fonction analytique f admettait une primitive g nous avons défini g en intégrant f le long d'un segment horizontal et d'un segment vertical. Ce qui a marché dans un disque marche tout aussi bien dans un demi-plan tel que le demi-plan  $U = \{z = x + iy \mid x > 0\}$ . Supposons donné une fonction f holomorphe sur U et posons :

(3) 
$$g(x+iy) = \int_1^x f(t)dt + i \int_0^y f(x+iu)du$$

Par construction on a  $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy)=if(x+iy)$ . De plus par le théorème de Cauchy-Goursat pour le rectangle de sommets 1, x, x+iy, 1+iy, on a aussi :

$$g(x+iy) = i \int_0^y f(1+iu)du + \int_1^x f(t+iy)dy$$
,

<sup>40.</sup> par unicité des coefficients d'une série entière convergente.

et donc  $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy)=f(x+iy)$ . Mais en fait on peut se passer du théorème de Cauchy-Goursat puisque l'on sait (maintenant) que toute fonction holomorphe f admet des dérivées partielles continues, et il est donc licite d'écrire  $\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y f(x+iu)du=\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}f(x+iu)du$  (en vertu d'un théorème de deuxième année sur la dérivation des intégrales à un paramètre avec, ici, x comme paramètre; voir l'annexe pour ce théorème, déjà utilisé d'ailleurs dans le premier chapitre). En utilisant les équations de Cauchy-Riemann pour f il vient alors  $\int_0^y \frac{\partial}{\partial x} f(x+iu)du = \int_0^y -i\frac{\partial}{\partial u} f(x+iu)du = -i(f(x+iy)-f(x))$ . Donc

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \int_1^x f(t)dt + i \int_0^y f(x+iu)du \right) = f(x) + f(x+iy) - f(x) = f(x+iy)$$

Ainsi la fonction g définie par l'équation (3) est telle que  $\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = f(x+iy)$  et  $\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = if(x+iy)$ . Elle admet donc des dérivées partielles continues en le couple (x,y) et ces dérivées partielles vérifient les équations de Cauchy-Riemann : donc g est holomorphe. De plus  $g' = \frac{\partial}{\partial x}g = f$ . Et aussi g(1) = 0. Donc g est une primitive holomorphe de f. C'est la seule s'annulant en 1.

Utilisons maintenant ce qui précède dans le cas particulier  $f(z) = \frac{1}{z}$ . Cela donne explicitement :

$$g(x+iy) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t} dt + i \int_{0}^{y} \frac{1}{x+iu} du = \log(x) + i \int_{0}^{y} \frac{x-iu}{x^{2}+u^{2}} du$$

$$= \log(x) + i \left[ \operatorname{Arctg}(\frac{u}{x}) - i \frac{1}{2} \log(x^{2}+u^{2}) \right]_{0}^{y}$$

$$= \log(x) + i \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x}) + \frac{1}{2} (\log(x^{2}+y^{2}) - \log(x^{2}))$$

$$= \frac{1}{2} \log(x^{2}+y^{2}) + i \operatorname{Arctg}(\frac{y}{x})$$

Pour y = 0 on retrouve  $g(x) = \log(x)$  comme il se doit. Notre résultat est particulièrement simple si l'on remarque qu'il s'écrit sous la forme :

$$g(z) = \log(r) + i\theta$$

avec r et  $\theta$  les coordonnées polaires de  $z=x+iy, \ x>0$ , qui sont définies par  $x=r\cos(\theta)$ ,  $y=r\sin(\theta)$ . Cela ne détermine  $\theta$  que modulo  $2\pi$  et  $\theta=\mathrm{Arctg}(\frac{y}{x})$  est celui qui vérifie  $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ . Conséquence intéressante de  $g(z)=\log(r)+i\theta$ :

$$\exp(g(z)) = re^{i\theta} = x + iy = z$$

On aurait pu le dire à l'avance via le Théorème d'Unicité Analytique <sup>41</sup> appliqué aux fonctions  $\exp(g(z))$  et z qu'on savait identiques au moins pour  $z=x,\,0< x<\infty$ , donc partout identiques dans l'ouvert connexe U. Parmi toutes les solutions possibles à l'équation  $\exp(w)=z$ , notre g(z) est précisée de manière unique comme étant la solution dont la partie imaginaire est dans  $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$ , puisque les autres solutions ont leurs parties imaginaires qui en différent par un multiple entier de  $2\pi$ .

On dit que g(z) est la **détermination principale** du logarithme. Dorénavant nous utiliserons la notation Log(z) pour désigner cette fonction précise. En fait nous allons dépasser le plan U pour définir Log(z) dans l'ouvert  $\Omega = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  par la formule :

(4) 
$$\operatorname{Log}(z) = \log(r) + i\theta, \quad -\pi < \theta < \pi$$

Pour voir que cette fonction  $\operatorname{Log}(z)$  est bien holomorphe dans  $\Omega$  et est la primitive (unique car  $\Omega$  est connexe) de  $\frac{1}{z}$  s'annulant en 1, on peut procéder ainsi : dans le demi-plan U, on sait déjà que c'est bon. Dans le demi-plan supérieur  $z=x+iy,\,y>0$ , on remarque que notre fonction Log ainsi définie est telle que  $\operatorname{Log}(z)=i\frac{\pi}{2}+\operatorname{Log}(\frac{z}{i})=i\frac{\pi}{2}+g(\frac{z}{i})$ , avec  $\frac{z}{i}\in U$ . Donc effectivement Log est holomorphe dans ce demi-plan et  $\operatorname{Log}'(z)=g'(\frac{z}{i})\frac{1}{i}=\frac{1}{z}$ . De même dans le demi-plan inférieur  $\operatorname{Log}(z)=-i\frac{\pi}{2}+\operatorname{Log}(iz)$  et ici c'est iz qui est dans U.

Nous pouvons aussi nous assurer de l'existence d'une telle primitive g pour toute fonction holomorphe f sur  $\Omega$  (pas seulement pour  $f(z) = \frac{1}{z}$ ) par le raisonnement suivant : au lieu de construire g en intégrant f le long du segment horizontal [1,x] puis du segment vertical [x,x+iy], comme nous avons fait sur U, nous construisons g en intégrant f d'abord le long de la verticale [1,1+iy] puis le long de l'horizontale allant de 1+iy à x+iy. Vous noterez que le théorème de Cauchy-Goursat ne peut plus être invoqué pour justifier ensuite l'existence et le calcul des deux dérivées partielles de  $g^{42}$  mais que cela n'est pas grave car notre argument de dérivation sous le signe somme (licite puisque nous savons que f a des dérivées partielles continues) s'applique. Donc le cas concret que nous avons ici avec

<sup>41.</sup> l'appellation standard est « principe du prolongement analytique ».

<sup>42.</sup> mais si! certes le rectangle de sommets 1, x, x + iy, 1 + iy n'est plus une option si x < 0 mais on peut utiliser d'autres rectangles. Réfléchissez-v.

 $f(z) = \frac{1}{z}$  cela donne la formule :

(5) 
$$\operatorname{Log}(x+iy) = i \int_0^y \frac{1}{1+iu} du + \int_1^x \frac{1}{t+iy} dt$$

Cette formule est valable pour tout  $x+iy \in \Omega$ . Voyons ce que cela donne, si l'on fait le calcul (avec nos bonnes vieilles fonctions Arctg et  $\log(x)$ , x > 0):

$$\begin{aligned} \text{Log}(x+iy) &= \int_0^y \frac{i+u}{1+u^2} du + \int_1^x \frac{t-iy}{t^2+y^2} dt \\ &= \left[ i \operatorname{Arctg}(u) + \frac{1}{2} \log(1+u^2) \right]_0^y + \left[ \frac{1}{2} \log(t^2+y^2) - i \operatorname{Arctg}(\frac{t}{y}) \right]_1^x \\ &= i \operatorname{Arctg}(y) + \frac{1}{2} \log(1+y^2) \\ &+ \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) - i \operatorname{Arctg}(\frac{x}{y}) - \frac{1}{2} \log(1+y^2) + i \operatorname{Arctg}(\frac{1}{y}) \\ &= \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + i \left( \operatorname{Arctg}(y) - \operatorname{Arctg}(\frac{x}{y}) + \operatorname{Arctg}(\frac{1}{y}) \right) \end{aligned}$$

Le résultat semble extrêmement bizarre! Il est correct pour tant. Il faut préciser que pour mener à bien ce calcul on a dû supposer  $y \neq 0$ . Supposons y > 0. Alors  $\operatorname{Arctg}(y) + \operatorname{Arctg}(\frac{1}{y})$  vaut exactement (pour quoi?)  $\frac{\pi}{2}$  et la formule signifie donc :

$$Log(x+iy) = log(r) + i(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{x}{y})),$$

ce qui est correct car en fait pour y > 0 on a :

$$Log(x + iy) = log(r) + i\theta, \qquad 0 < \theta < \pi$$

et  $\operatorname{tg}(\theta - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta - \frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = -\frac{x}{y}$ , donc effectivement, puisque  $-\frac{\pi}{2} < \theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ , on a  $\theta - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arctg}(-\frac{x}{y}) = -\operatorname{Arctg}(\frac{x}{y})$  et  $\theta = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg}(\frac{x}{y})$ . Je vous laisse vérifier que la formule marche aussi pour y < 0.

Néanmoins le résultat est décevant car nous voudrions une formule explicite valable partout dans  $\Omega$ , que y soit positif, nul ou négatif. La formule intégrale (5) est partout valable sur  $\Omega$  mais elle n'est pas explicite. Pour obtenir une formule valable et explicite, nous pouvons faire un raisonnement géométrique. Supposons y>0, considérons les points  $A=(r,0),\ O=(0,0),\ {\rm et}\ B=(x,y).$  Le triangle AOB est isocèle, et donc si l'on note  $\alpha$  l'angle (non orienté) au sommet A on a  $2\alpha+\theta=\pi$ . Donc  $\frac{1}{2}\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$  et  ${\rm tg}(\frac{1}{2}\theta)={\rm ctg}(\alpha)=$ 

$$\frac{r-x}{y} = \frac{r^2 - x^2}{(r+x)y} = \frac{y}{r+x}$$
, d'où :

$$\theta = 2 \operatorname{Arctg} \left( \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

En faisant attention aux signes, on constate que cela vaut aussi pour y < 0 (et pour y = 0 évidemment). Finalement, une formule partout valable dans  $\Omega$  est :

(6) 
$$\operatorname{Log}(x+iy) = \log(r) + i\theta = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i \operatorname{2Arctg}\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

On n'a pas épuisé tout ce qu'il y avait à dire. Supposons que g(z) soit une fonction holomorphe dans  $\Omega$  telle que g(1) = 0 et  $\exp(g(z)) = z$ . Alors je prétends que g(z) = Log(z) partout. En effet, la différence g(z) - Log(z) ne peut prendre que des valeurs dans  $2\pi i \mathbf{Z}$ . Les parties réelles sont donc identiques et les parties imaginaires ne peuvent différer que par des multiple de  $2\pi$ . Notons F(z) = Im(g(z) - Log(z)) et appliquons le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction continue réelle  $t \mapsto f(t) = F(1 + t(z - 1))$ , pour z fixé et  $0 \le t \le 1$ . Si  $f(1) \ne f(0) = 0$  il y aura des valeurs intermédiaires non-multiples entiers de  $2\pi$  (par exemple  $\pi$  si f(1) > 0 ou  $-\pi$  si f(1) < 0). Donc f(1) = 0. Ainsi g(z) = Log(z) pour tout  $z \in \Omega$ .

Enfin, examinons la question de  $\text{Log}(z_1z_2)$ . Si  $z_1$  et  $z_2$  sont dans  $\Omega$  leur produit peut être dans  $]-\infty,0[$ . Nous faisons un choix et décidons que  $\text{Log}(-t)=\log(t)+i\pi$  pour  $0 < t < \infty$ . La fonction Log est donc définie sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Mais elle n'est holomorphe que sur  $\Omega$  (elle n'est pas continue aux points de l'axe réel négatif). Autrement dit, la définition est :

$$z \neq 0 \implies \operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\theta$$
, avec  $-\pi < \theta \le +\pi$ 

Alors comme  $\exp(\text{Log}(z_1) + \text{Log}(z_2)) = \exp(\text{Log}(z_1)) \exp(\text{Log}(z_2)) = z_1 z_2$ , on a :

$$Log(z_1) + Log(z_2) = Log(z_1z_2) + i \ 2\pi k(z_1, z_2), \quad k(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}$$

et  $k(z_1, z_2) = 0$  si et seulement si <sup>43</sup> Im(Log( $z_1$ ) + Log( $z_2$ ))  $\in$ ] -  $\pi$ , + $\pi$ ]. On raisonne de même avec Log( $z_1/z_2$ ). En conclusion :

Théorème 20 On définit la détermination principale du logarithme comme étant la fonction Log(z) sur  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  donnée par :

$$\operatorname{Log}(z) = \log(r) + i \; \theta, \quad \operatorname{pour} z = re^{i\theta}, r > 0, -\pi < \theta \le +\pi$$

<sup>43.</sup> les valeurs possibles pour k sont -1, 0, et +1.

Sur l'ouvert  $\Omega = \mathbb{C}\setminus ]-\infty,0]$  la fonction Log est holomorphe et est la primitive de  $\frac{1}{z}$  s'annulant en z=1. De plus la fonction Log est l'unique fonction holomorphe sur  $\Omega$  s'annulant en 1 et vérifiant  $\exp(\operatorname{Log}(z))=z$  pour tout  $z\in\Omega$ . On a

$$|\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2))| < \pi \implies \operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$$
  
 $|\operatorname{Im}(\operatorname{Log}(z_1) - \operatorname{Log}(z_2))| < \pi \implies \operatorname{Log}(\frac{z_1}{z_2}) = \operatorname{Log}(z_1) - \operatorname{Log}(z_2)$ 

 $On \ a:$ 

$$x > 0 \implies \operatorname{Log}(x+iy) = \frac{1}{2}\operatorname{log}(x^2+y^2) + i\operatorname{Arctg}(\frac{y}{x})$$

$$z \in \Omega \implies \operatorname{Log}(x+iy) = \frac{1}{2}\operatorname{log}(x^2+y^2) + i\operatorname{Arctg}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$|h| < 1 \implies \operatorname{Log}(1+h) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{h^n}{n}$$

La fonction Log est aussi l'unique fonction holomorphe sur  $\Omega$  qui coïncide avec le logarithme népérien sur l'axe réel positif. Elle est discontinue le long de l'axe réel négatif :

$$\begin{array}{ccc} r>0 \implies & \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathrm{Log}(-r+i\epsilon) = \mathrm{log}(r) + i\pi \\ & \lim_{\epsilon \to 0^+} \mathrm{Log}(-r-i\epsilon) = \mathrm{log}(r) - i\pi \end{array}$$

Il ne faudrait pas accorder, dans ces questions de logarithmes complexes, une place privilégiée quelconque à l'axe réel négatif : toute demi-droite partant de l'origine peut jouer un rôle analogue. Par exemple, considérons la fonction  $f(z) = \text{Log}(iz) - i\frac{\pi}{2}$ . Cette fonction est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus i[0, +\infty[$ , a comme dérivée  $\frac{1}{z}$  et s'annule en z = 1. Elle vérifie, en fait :

$$f(z) = \log(r) + i\alpha$$
,  $z = re^{i\alpha}$ ,  $-\frac{3\pi}{2} < \alpha \le +\frac{\pi}{2}$ 

Ou encore, on considère  $\operatorname{Log}(\frac{z}{i})+i\frac{\pi}{2}$ , qui est holomorphe pour  $z\notin i]-\infty,0]$  et vaut  $\operatorname{log}(r)+i\beta,\ z=re^{i\beta},\ -\frac{\pi}{2}<\beta\leq 3\frac{\pi}{2}$ . Aussi, on peut considérer la fonction  $\operatorname{Log}(-z)+i\pi$  pour  $z\notin [0,+\infty[$  qui vaut  $\operatorname{log}(r)+i\gamma,$  pour  $z=re^{i\gamma}$  avec  $0<\gamma\leq 2\pi$  et r>0. Elle ne vérifie plus f(1)=0 (puisqu'avec notre définition de  $\operatorname{Log}(-1)=+i\pi$  cela donne  $f(1)=2i\pi$ ) mais on a  $\lim_{\epsilon\to 0^+}f(1+i\epsilon)=0$ . Par contre  $\lim_{\epsilon\to 0^+}f(1-i\epsilon)=+2i\pi$ .

Dans le paragraphe précédent j'ai noté  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les différentes déterminations de la coordonnée polaire angulaire de z, pour éviter les confusions, mais la pratique normale est

de conserver la notation  $\theta$ . Pour spécifier exactement de quel  $\theta$  on parle il suffit d'indiquer les inégalités que doit vérifier  $\theta$ . Traditionnellement  $\theta$  est appelée **argument**. Lorsque l'on impose  $-\pi < \theta < \pi$  on parle de la **détermination principale de l'argument**, et on la note  $\operatorname{Arg}(z)$  (notre convention sur  $]-\infty,0[$  est donc  $\operatorname{Arg}(-1)=+\pi)$ . Sinon on a une autre « détermination » de l'argument et on écrit simplement  $\operatorname{arg}(z)$  sans la lettre majuscule et aussi  $\log(z) = \log|z| + i \operatorname{arg}(z)$ .

Cela me donne l'occasion de préciser que d'une manière générale une fonction que l'on note  $\log(z)$  sur un ouvert U est certes une primitive de la fonction  $\frac{1}{z}$ , mais que la réciproque ne vaut pas : on réserve l'écriture  $\log(z)$  aux fonctions holomorphes g(z) telles que  $\exp(g(z)) = z$  en tout z de l'ouvert concerné <sup>44</sup>. Les primitives <sup>45</sup> de  $\frac{1}{z}$  sont définies à une constante complexe additive près, alors que pour les fonctions  $\log(z)$  la seule ambiguïté est modulo  $2\pi i$ .

Signalons aussi que lorsque deux fonctions holomorphes sont reliées par la relation  $\exp(g(z)) = f(z)$ , on écrit souvent  $g(z) = \log f(z)$ ,  $\operatorname{Im}(g(z)) = \arg f(z)$ , et qu'en règle générale il ne faut **surtout pas** faire l'erreur de croire que cela veut dire  $g(z) = \operatorname{Log}(f(z))$ ,  $\operatorname{Im}(g(z)) = \operatorname{Arg}(f(z))$ . Cela ne sera le cas que si  $|\operatorname{Im}(g(z))| < \pi$  pour tout z de l'ouvert où l'on travaille. Par contre il est toujours vrai que  $\operatorname{Re}(g(z)) = \log |f(z)|$ .

# 10 Ouverts étoilés et primitives

Un ouvert U est dit **étoilé** si il existe  $z_0 \in U$  tel que pour tout  $z \in U$  le segment  $[z_0, z]$  est entièrement inclus dans U. C'est donc une notion plus générale que la **convexité** : un ouvert (ou un ensemble) est dit convexe si il contient le segment  $[z_0, z_1]$  dès qu'il contient les extrémités  $z_0$  et  $z_1$ . Alors que pour un ouvert étoilé on demande seulement qu'il existe un certain  $z_0$  tel que cela soit vrai pour tous les  $z_1$ . Un disque ou un demi-plan est convexe (et donc aussi étoilé); l'ouvert  $\Omega$  n'est pas convexe mais il est étoilé (en prenant  $z_0 = 1$ ). Tout ouvert étoilé est connexe.  $^{46}$ 

<sup>44.</sup> prouver que cela implique g'(z) = 1/z.

<sup>45.</sup> sur un ouvert connexe.

<sup>46.</sup> un grand avantage de la convexité sur le caractère étoilé ou connexe, c'est que la convexité se préserve par intersections.

Dans la section précédente nous avons prouvé que toute fonction holomorphe sur  $\Omega$  admettait une primitive. Cela est vrai dans tout ouvert étoilé :

**Théorème 21** Soit U un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur U admet une primitive holomorphe sur U.

Preuve : soit f une fonction holomorphe sur l'ouvert U, qui est étoilé par rapport au point  $z_0$ . Si une primitive g existe alors on a nécessairement :

$$g(z) - g(z_0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} g(z_0 + t(z - z_0)) dt = \int_0^1 (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0)) dt$$

Définissons donc g par cette formule, la valeur de  $g(z_0)$  étant arbitraire. En notant z = x+iy on calcule :

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \Big( (z-z_0)f(z_0+t(z-z_0)) \Big) dt$$

Cela est justifié car la fonction des trois variables réelles x, y, t, définie pour  $(x, y, t) \in U \times [0, 1]$  par  $F(x, y, t) = (z - z_0) f(z_0 + t(z - z_0))$  (avec z = x + iy) admet pour y et t fixés une dérivée partielle en x qui est continue en le triplet (x, y, t):

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,t) = f(z_0 + t(z - z_0)) + (z - z_0) \cdot f'(z_0 + t(z - z_0)) \cdot t.$$

Donc la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy)$  existe, et vaut :

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x+iy) = \int_0^1 \left( f(z_0 + t(z-z_0)) + (z-z_0) \cdot f'(z_0 + t(z-z_0)) \cdot t \right) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( f(z_0 + t(z-z_0)) \cdot t \right) dt$$

$$= f(z)$$

Un calcul semblable prouve  $\frac{\partial}{\partial y}g(x+iy)=if(x+iy)$ . Donc g a des dérivées partielles continues qui vérifient les équations de Cauchy-Riemann. Donc g est une fonction holomorphe et  $g'=\frac{\partial}{\partial x}g=f$ .

**Théorème 22** Soit U un ouvert étoilé. Toute fonction holomorphe sur U ne s'annulant pas peut s'écrire comme l'exponentielle d'une autre fonction holomorphe.

Pour la preuve soit f ne s'annulant pas sur l'ouvert étoilé U. La fonction  $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$  est donc définie et holomorphe sur U et par le théorème précédent admet une primitive g(z). Si l'on calcule la dérivée de  $f(z) \exp(-g(z))$  on trouve  $(f'(z) - f(z)g'(z)) \exp(-g(z))$  ce qui donne zéro identiquement. Donc  $f(z) \exp(-g(z))$  est une constante C (l'ouvert étoilé U est connexe), nécessairement non nulle et  $\exp(g(z)) = \frac{1}{C}f(z)$ . On choisit alors w avec  $e^w = C$  et l'on remplace g(z) par  $g_1(z) = g(z) - w$ . La fonction  $g_1$  est holomorphe et  $\exp(g_1) = f$  sur U.

# 11 Fonctions puissances et série binomiale

Si z et a sont deux nombres complexes, et si  $z \neq 0$  alors on peut définir  $z^a$  mais pas d'une manière unique : il faut choisir w avec  $\exp(w) = z$  et poser  $z^a = \exp(aw)$ . Suivant le choix de w, le résultat est donc variable à une puissance entière de  $\exp(2\pi ia)$  près. Par exemple  $i^i$  peut valoir  $e^{-\frac{\pi}{2}}$  (si on prend  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ) ou  $e^{-5\frac{\pi}{2}}$  (si on prend  $i = e^{i\frac{\pi}{2}+i2\pi}$ ), etc...

Il n'y a que pour les exposants a entiers qu'il n'y a pas d'ambiguïté. Sinon, pour a quelconque, si on restreint z à l'ouvert  $\Omega = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , alors on peut utiliser la détermination principale du logarithme pour définir la détermination principale de la puissance  $z^a$ :

$$z \in \Omega, a \in \mathbf{C}, \qquad z^a = e^{a \operatorname{Log}(z)}$$

La fonction  $z^a$  est donc holomorphe en a de dérivée  $\log(z)z^a$  et holomorphe en z de dérivée  $ae^{a\log(z)}\frac{1}{z}=az^{a-1}$ :

$$\frac{\partial}{\partial z}z^a = az^{a-1}$$

Il serait en fait plus prudent d'écrire  $\frac{z^a}{z}$  au lieu de  $z^{a-1}$  lorsque l'on n'a pas précisé la détermination choisie et il est alors entendu qu'il s'agit de la même détermination dans les deux membres de l'égalité  $\frac{\partial}{\partial z}z^a=a\frac{z^a}{z}$ .

Dans le disque ouvert  $D(1,1)=\{z\mid |z-1|<1\}$ , on peut développer en série entière en la variable h=z-1 la fonction holomorphe  $f(z)=z^a=(1+h)^a=e^{a\log(1+h)}$ . On sait

que ce développement est donné par la formule de Taylor :

$$z^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^{n}$$

et on a  $f^{(n)}(z) = a(a-1)...(a-n+1)z^{a-n}$ . On obtient donc la **série binomiale de** Newton :

$$|h| < 1 \implies (1+h)^a = 1 + ah + \frac{a(a-1)}{2}h^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3 + \dots$$
  
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}h^n$$

Examinons le rayon de convergence de cette série. Il faut faire attention : si  $a \in \mathbb{N}$  le rayon de convergence est infini car nous avons affaire à un polynôme. Sinon, ses coefficients  $d_n$  sont tous non nuls et on a  $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{a-n}{1+n}$  qui a comme limite -1 lorsque  $n \to \infty$ . Par un critère connu<sup>47</sup> de deuxième ou première année, cela veut dire que le rayon de convergence est exactement 1.

La question du comportement de la série binomiale sur le cercle |h| = 1 est **extrêmement** intéressante. Nous y consacrerons le prochain chapitre. En attendant introduisons une notation très utilisée; on pose (symbole de Pochhammer):

$$(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$$

pour tout  $a \in \mathbf{C}$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Donc  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_1 = a$ ,  $(a)_2 = a(a+1)$ , etc. ... L'avantage des plus au lieu des moins c'est que le signe de  $(a)_n$  (pour a réel) est constant pour n grand, au lieu d'alterner comme le fait a(a-1)... (a-n+1). Avec cette notation la série binomiale est

$$(1+h)^a = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-a)_n}{n!} h^n$$

La formule la plus commode est donc en général :

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$$
,

<sup>47.</sup> la série  $\sum d_n h^n$  a le même rayon de convergence que la série  $\sum |d_n|h^n$  et cette dernière a rayon de convergence 1 puisque le rapport de deux coefficients successifs tend vers 1.

par exemple  $(1-h)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}h + \frac{1.3}{2.4}h^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}h^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}h^4 + \dots$  C'est le moment de rappeler le célèbre produit infini de Wallis :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1.3}{2.2} \frac{3.5}{4.4} \frac{5.7}{6.6} \frac{7.9}{8.8} \dots$$

Je vous laisse utiliser ce la pour en déduire que le  $n^{\text{\`e}me}$  coefficient de la série pour  $(1-h)^{-1/2}$ est équivalent à  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}n^{-1/2}$  pour  $n\to\infty$ . Nous y reviendrons très en détail dans le prochain chapitre <sup>48</sup>, où nous montrerons d'une manière générale  $\frac{(a)_n}{n!} \sim \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$ , pour une certaine constante  $\Gamma(a)$ , qui vue comme fonction de  $a \in \mathbb{C}$ ,  $-a \notin \mathbb{N}$ , est une fonction holomorphe presque aussi fondamentale en mathématiques que les fonctions cos, sin et exp. En fait si dans votre entourage on met en doute le sérieux de vos études vous n'aurez qu'à répliquer que vous connaissez la fonction Gamma d'Euler pour remettre tout le monde à sa place. Mais j'anticipe sur le prochain chapitre.

#### 12 Intégrales le long de chemins

Nous considérons un chemin (de classe  $C^1$ ), c'est-à-dire une application dérivable  $\gamma$ :  $[a,b] \to \mathbb{C}, -\infty < a < b < \infty$ . Le point de départ est  $\gamma(a)$ , le point d'arrivée  $\gamma(b)$ . Lorsque ces deux points sont identiques on dit que l'on a un lacet. On ne demande pas que les tangentes se raccordent si  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Donc d'une manière générale on ne travaillera pas avec des chemins  $C^1$  au sens strict, mais des chemins continus pour lesquels il existe une subdivision  $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$  telle que la restriction de  $\gamma$  à chaque  $[a_j, a_{j+1}]$  soit de classe  $C^1$ . On dira que le chemin est  $C^1$  par morceaux.

On peut associer à un tel chemin sa **longueur**: 49 50

$$L_{\gamma} = \int_{a}^{b} |\gamma'(t)| dt$$

Cette longueur se comporte additivement lorsque l'on met des chemins bout-à-bout. La longueur possède une importante propriété d'invariance par reparamétrisation : supposons que l'on se donne une bijection croissante (donc continue) de classe  $\mathbb{C}^1$  par morceaux

<sup>48.</sup> je reporte à un exercice ou au chapitre suivant la justification de la formule de Wallis (qui n'a d'ailleurs pas d'utilité numérique, la convergence étant très lente).

<sup>49.</sup> ici on considère  $\gamma'(t)$  en tant que nombre complexe et  $|\gamma'(t)|$  est son module; mais on peut aussi voir

 $<sup>\</sup>gamma'(t)$  comme un vecteur vitesse  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  et alors  $|\gamma'(t)| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  est sa norme. 50. si les dérivées à droites et à gauche différent en  $a = a_0 < \cdots < a_N = b$ , remplacer  $\int_a^b \operatorname{par} \sum_j \int_{a_j}^{a_{j+1}}$ .

 $\psi:[c,d]\to[a,b]$ . Alors le chemin  $\gamma_1=\gamma\circ\psi$  est dit avoir été obtenu de  $\gamma$  par une reparamétrisation. Calculons <sup>51</sup> la longueur de  $\gamma_1$ :

$$L_{\gamma_1} = \int_c^d |\gamma_1'(u)| du = \int_c^d |\gamma'(\psi(u))| \psi'(u) du = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = L_{\gamma_1}$$

Les deux longueurs coïncident.

Considérons  $\phi(t) = \int_a^t |\gamma'(v)| dv$ . La fonction  $\phi$  est continue de classe  $C^1$  par morceaux et elle est croissante. Afin qu'elle soit strictement croissante le plus simple est d'imposer au vecteur vitesse  $\gamma'(t)$  de ne jamais devenir nul. Alors  $\phi'(t) = |\gamma'(t)|$  est toujours strictement positif (en un nombre fini de points lire à la place de  $\phi'$ , « dérivée à gauche » et/ou « dérivée à droite »). Si c'est le cas on dira que le chemin est **régulier**. La fonction continue  $\phi$  strictement croissante établit une bijection de [a,b] sur  $[0,L_{\gamma}]$  qui admet une réciproque continue elle aussi de classe  $C^1$  par morceaux que l'on notera  $\psi$ . Par construction si l'on reparamètre  $\gamma$  en  $\gamma \circ \psi$  on obtient un chemin dont le vecteur vitesse  $\gamma'(\psi(s))\psi'(s)$  est partout de norme 1. En effet  $|\gamma'(\psi(s))\psi'(s)| = \phi'(\psi(s))\psi'(s) = \frac{d}{ds}(\phi \circ \psi)(s) = 1$ . On dit que l'on a re-paramétré  $\gamma$  par sa longueur d'arc et l'on fait référence à ds comme étant l'élément d'arc. Comme  $s = \phi(t)$  on a par rapport à la paramétrisation initiale :

$$ds = |\gamma'(t)|dt$$

Si  $\gamma$  prend ses valeurs dans un ouvert U sur lequel est défini une fonction F(x,y) à valeurs réelles ou complexes on pose par définition :

$$\int_{\gamma} F(x,y)ds := \int_{a}^{b} F(x(t),y(t))|\gamma'(t)|dt ,$$

où l'on a écrit  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Cette notion est invariante par reparamétrisation.

Mais nous utiliserons très peu cela. Notre principal intérêt est dans un autre type d'intégrale :

$$\int_{\gamma} F(z)dz = \int_{\gamma} F(x,y)dz := \int_{a}^{b} F(x(t),y(t))\gamma'(t)dt$$

Je m'autorise à utiliser de manière équivalente les écriture F(z), F(x+iy), F(x,y). Les grincheux iront se plaindre où ils pourront. On utilisera aussi les notations  $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ , c'est-à-dire  $x(t)=x(\gamma(t))$  et  $y(t)=y(\gamma(t))$  en considérant x et y comme des fonctions  $\mathbf{C}\to\mathbf{R},\ x(z)=\mathrm{Re}(z),\ y(z)=\mathrm{Im}(z),\ z=x(z)+iy(z).$  Vous suivez, j'espère.

<sup>51.</sup> en un nombre fini de points la dérivée à gauche de  $\psi$  peut différer de la dérivée à droite donc la notation  $\psi'$  est un peu abusive.

Notez bien la subtile différence avec la notion précédente : on a ici le nombre complexe  $\gamma'(t)$  et non plus le nombre réel positif  $|\gamma'(t)|$ . Mais comme nos re-paramétrisations sont toujours supposées croissantes, l'invariance par reparamétrisation vaut aussi pour notre nouveau type d'intégrale. <sup>52</sup> Nous n'utiliserons l'ancien type que lorsque nous aurons besoin de faire des majorations :

$$\left| \int_{\gamma} F dz \right| \le \int_{a}^{b} |F| |\gamma'(t)| dt = \int_{\gamma} |F| ds \le \sup_{z \in \gamma([a,b])} |F(z)| \cdot L_{\gamma}$$

On notera que le lien entre les deux types d'intégrales se lit dans l'écriture aux vertus mnémotechniques : |dz| = ds.

Pendant que j'y suis je signale un troisième type d'intégrale invariante par reparamétrisation croissante :

$$\int_{\gamma} F(z) \overline{dz} := \int_{a}^{b} F(\gamma(t)) \overline{\gamma'(t)} dt$$

et il y a aussi

$$\int_{\gamma} F(z)dx := \int_{a}^{b} F(\gamma(t))x'(t)dt$$

$$\int_{\gamma} F(z)dy := \int_{a}^{b} F(\gamma(t))y'(t)dt$$

Autrement dit on a dz = dx + idy,  $\overline{dz} = dx - idy$ , au sens où cela devient des égalités lorsque l'on intègre une fonction F le long d'un chemin  $\gamma$ . <sup>53</sup>

Soit  $z_0$  et  $z_1$  (les affixes de) deux points du plan complexe. On note  $[z_0, z_1]$  tout chemin allant de  $z_0$  à  $z_1$  en ligne droite, dans la même classe de paramétrisation que le chemin canonique  $t\mapsto z_0+t(z_1-z_0)$  (ici [a,b]=[0,1]). Ainsi :

$$\int_{[z_0, z_1]} F(z)dz = \int_0^1 F((1-t)z_0 + tz_1)dt$$

$$\int_{[z_1, z_0]} F(z)dz = \int_0^1 F((1-u)z_1 + uz_0)du = \int_1^0 F((1-t)z_0 + tz_1)dt$$

donc

$$\int_{[z_1, z_0]} F(z) dz = -\int_{[z_0, z_1]} F(z) dz$$

<sup>52.</sup> pour les intégrales de type « longueur » il y aussi invariance sous les reparamétrisations qui renversent le sens de parcours. Pour les intégrales du type « dz » changer le sens de parcours se traduit par un facteur multiplicateur (-1).

<sup>53.</sup> une définition plus intrinsèque de la notion de forme différentielle  $\omega = Pdx + Qdy$  est pour plus tard.

Quelques cas particuliers:

$$\int_{[1+i,-1+i]} F(z)dz = \int_{1}^{-1} F(x+i)dx$$
$$\int_{[-1+i,-1-i]} F(z)dz = \int_{1}^{-1} F(-1+iy)idy$$

Nous utiliserons ce genre de formules très souvent. Une ligne brisée continue pourra par exemple être notée  $[z_0, z_1, z_2, \dots, z_N]$  et

$$\int_{[z_0, z_1, z_2, \dots, z_N]} F(z) dz = \int_{[z_0, z_1]} F(z) dz + \dots + \int_{[z_{N-1}, z_N]} F(z) dz$$

Alors on voit que dans le chapitre précédent notre définition ad-hoc pour les intégrales le long du bord d'un rectangle de sommets  $z_0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  (les sommets sont énumérés dans le sens direct, contraire au sens de rotation des aiguilles d'une montre) peut se ré-écrire maintenant  $^{54}$  sous la forme :

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz = \int_{[z_0, z_1, z_2, z_3, z_0]} f(z)dz$$

$$= \int_{[z_0, z_1]} f(z)dz + \int_{[z_1, z_2]} f(z)dz + \int_{[z_2, z_3]} f(z)dz + \int_{[z_3, z_0]} f(z)dz.$$

On notera bien que le résultat dépend du sens de parcours, direct ou rétrograde, et que par convention la notation  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz$  est réservée au sens de parcours direct. On notera aussi que le choix du point du sommet de départ  $z_0$  n'importe pas et aussi que parfois on peut utiliser un chemin  $\gamma:[a,b]\to \mathbf{C}$  parcourant le bord du rectangle dans le sens direct et débutant en un autre point que l'un des sommets.

Il est commode d'utiliser la notion de **chaîne**. Une chaîne  $\Gamma = n_1 \gamma_1 + \cdots + n_k \gamma_k$  est une combinaison formelle additive de chemins, à coefficients  $n_j$  en général pris dans  $\mathbf{Z}$ , mais pouvant aussi être des nombres complexes quelconques, de sorte que dorénavant :

$$\int_{\Gamma} F(x,y)dz = n_1 \int_{\gamma_1} F(x,y)dz + \dots + n_k \int_{\gamma_k} F(x,y)dz$$

Aussi, dans ces chaînes on considère qu'un chemin parcouru en sens inverse  $(u \mapsto \gamma_1(u) = \gamma(-u), -b \le -u \le -a)$ , et l'expression  $-\gamma$  signifie la meme chose puisque  $\int_{\gamma_1} F(z)dz = -\int_{\gamma} F(z)dz$ .

<sup>54.</sup> ce n'est plus limité au seul cas des rectangles aux bords parallèles aux axes.

Dans la pratique nous nous intéresserons aux intégrales  $\int_{\gamma} F(x+iy)dz$  presque exclusivement lorsque F(z) = F(x+iy) est holomorphe. Il y a alors un théorème **tout-à-fait** remarquable et extraordinaire : lorsque l'on déforme le chemin en maintenant ses extrémités fixes tout en restant dans le domaine d'holomorphie de la fonction F l'intégrale  $\int_{\gamma} F(z)dz$  reste exactement invariante ; de même lorsque l'on déforme continûment un lacet. En particulier lorsque l'on peut déformer continûment ce lacet en un point tout en restant en permanence dans l'ouvert d'holomorphie de F alors  $\int_{\gamma} F(z)dz = 0$ . Nous démontrerons et formulerons précisément (notion d'homotopie) ce théorème (disons, de Cauchy-Gauss) à un moment ultérieur. Je pourrais le faire maintenant, mais je veux vous laisser un peu de temps de digestion. J'insiste tout de même sur le fait que c'est là le point central et fondamental du cours pris dans son ensemble. Tout le reste en découle. Si on donne à quelqu'un les équations de Cauchy-Riemann il/elle pourra mettre un temps certain avant de découvrir ce théorème. Mais une fois ce théorème connu, tous les autres résultats de la théorie viendront s'imposer à elle/lui.

Ce que nous allons faire maintenant c'est formuler et prouver un théorème très proche de ce que nous venons d'énoncer.

**Théorème 23** Soit U un ouvert non vide et soit f une fonction holomorphe sur U. Si la fonction f possède une primitive holomorphe g sur U alors l'intégrale  $\int_{\gamma} f(z)dz$  le long d'un chemin continu  $C^1$  par morceaux ne dépend que des extrémités du chemin :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} g'(z)dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

En particulier l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un lacet est nulle si la fonction admet une primitive. Par conséquent si U est un ouvert étoilé alors l'intégrale de toute fonction holomorphe le long de tout lacet tracé dans U est nulle et toute intégrale  $\int_{\gamma} f(z)dz$  ne dépend que des extrémités  $\gamma(a)$ ,  $\gamma(b)$  (et de la fonction f...) mais pas des autres détails du chemin  $\gamma:[a,b] \to U$ .

La preuve en est extrêmement rapide : on a

$$\int_{\gamma} g'(z)dz = \int_{a}^{b} g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{d}{dt}g(\gamma(t))dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$$

Vous remarquerez que le théorème est une ample généralisation du théorème de Cauchy-Goursat qui nous disait que l'intégrale le long du bord d'un rectangle était nulle pour toute fonction holomorphe sur le rectangle plein. Par exemple il s'applique aux rectangles dont les bords ne sont pas parallèles aux axes, ou aux parallélogrammes, ou aux triangles, aux hexagones, aux ellipses, aux ovoïdes quelconques, en fait à n'importe quoi, à partir du moment que l'on peut trouver un ouvert étoilé incluant la figure et son bord et sur lequel la fonction est holomorphe.

Le théorème s'applique en particulier aux disques, aux demi-plans ou à l'ouvert  $\Omega$  dans la discussion du Logarithme, car ce sont des ouverts étoilés et toute fonction holomorphe y admet une primitive holomorphe. Par contre si l'on prend  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  alors on a comme exemple très important d'une intégrale le long d'un lacet donnant un résultat non nul :

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

Ici et dans la suite, les cercles  $^{55}$  seront toujours paramétrés dans le sens direct (sens trigonométrique, ou sens contraire au sens de déplacement des aiguilles d'une montre). On a alors, par définition :

$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} \frac{d}{d\theta} (re^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i$$

Cela prouve d'ailleurs que  $\frac{1}{z}$  ne peut pas avoir de primitive holomorphe définie dans  $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ : mais cela on l'a bien compris depuis notre discussion de la fonction Logarithme.

La non-annulation d'une intégrale le long d'un lacet formant le bord <sup>56</sup> d'un domaine étoilé <sup>57</sup> ne peut donc survenir que si la fonction f ne peut pas être définie et holomorphe en tous les points de l'intérieur de ce domaine. Considérons le cas très intéressant d'un rectangle  $\mathcal{R}$  aux bords parallèles aux axes et contenant l'origine en son intérieur, et cherchons à évaluer l'intégrale  $\int_{\partial \mathcal{R}} \frac{1}{z} dz$ . Considérons R > 0 très grand et le carré de centre 0 et de côté 2R.

<sup>55.</sup> à propos des intégrales le long de lacets, le résultat ne dépend pas du point de départ pris sur le lacet. 56. je ne cherche pas ici à définir ces notions d'une manière générale. Imaginez des figures simples comme des triangles ou des ellipses.

<sup>57.</sup> en choisissant un facteur de dilatation  $\lambda > 1$  très très proche de 1 et un point par rapport auquel le domaine est étoilé, et en dilatant le domaine dans le rapport  $\lambda$  on reste à l'intérieur du domaine d'holomorphie de la fonction tout en construisant un ouvert étoilé contenant le lacet.

En prolongeant les côtés du petit rectangle, on crée une décomposition du grand carré en 9 sous-rectangles, dont 8 ne contiennent pas l'origine. Si l'on fait la somme algébrique des intégrales de  $\frac{1}{z}dz$  le long des bords de ces 8 rectangles, tous parcourus dans le sens direct, on voit que tous les segments autres que ceux formant le bord du grand carré, ou le bord du petit rectangle, ont une contribution nulle, puisqu'ils sont parcourus une fois dans un sens et une autre fois dans l'autre sens. Les segments constitutifs (du bord) du grand carré se réassemblent pour donner l'intégrale qui lui est associée et ceux formant le petit rectangle donnent (-1) fois  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz$  puisque qu'ils correspondent au sens de parcours rétrograde. Par le théorème précédent ou le théorème de Cauchy-Goursat chacune des intégrales pour les 8 rectangles est nulle. Donc l'intégrale sur le bord du carré et celle sur le bord du rectangle sont identiques : on peut tout aussi bien remplacer le rectangle initial par le carré. Répétant l'argument on peut se ramener au carré avec R=1. On a alors en partant du coin inférieur droit :

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \frac{1}{z} dz = \int_{-1}^{1} \frac{i dy}{1 + i y} + \int_{1}^{-1} \frac{dx}{x + i} + \int_{1}^{-1} \frac{i dy}{-1 + i y} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x - i}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2}{1 + y^{2}} i dy + \int_{-1}^{1} \frac{2i}{1 + x^{2}} dx = 2i(2 \operatorname{Arctg}(1) + 2 \operatorname{Arctg}(1)) = 2\pi i$$

On retrouve le  $2\pi i$  associé aux cercles et ce n'est pas un hasard puisque l'on peut déformer continûment le cercle en le carré sans passer par l'origine des coordonnées où  $\frac{1}{z}$  cesse d'être fini.

On peut interpréter le résultat du calcul de  $I = \int_{\partial \mathcal{R}} \frac{1}{z} dz$  autrement grâce à la fonction Log. Pour fixer les idées notons  $z_0$  l'affixe du sommet inférieur droit A, puis  $z_1$  et B,  $z_2$  et C,  $z_3$  et D. Je prétends que

$$I = \text{Log}(\frac{z_1}{z_0}) + \text{Log}(\frac{z_2}{z_1}) + \text{Log}(\frac{z_3}{z_2}) + \text{Log}(\frac{z_0}{z_3})$$

En effet sur [A, B] on peut utiliser  $\log \frac{z}{z_0}$  comme primitive de  $\frac{1}{z}$ , etc...<sup>58</sup> La partie réelle vaut :

$$\log(\frac{|z_1|}{|z_0|}) + \log(\frac{|z_2|}{|z_1|}) + \log(\frac{|z_3|}{|z_2|}) + \log(\frac{|z_0|}{|z_3|}) = \log 1 = 0$$

donc I est imaginaire pur et vaut

$$I = i \left( \operatorname{Arg}(\frac{z_1}{z_0}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_2}{z_1}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_3}{z_2}) + \operatorname{Arg}(\frac{z_0}{z_3}) \right)$$

<sup>58.</sup> d'une manière générale  $z \to \text{Log}(z/w)$  est une primitive de 1/z sur l'ouvert  $\mathbb{C} \setminus \{-tw, t > 0\}$ .

Soit  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  les angles (à valeur dans  $]0,+\pi[)$   $\widehat{AOB},$   $\widehat{BOC},$   $\widehat{COD},$   $\widehat{DOA}.$  Alors

$$I = i(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
.

Donc la formule  $I = 2\pi i$  équivaut à

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$$
,

soit encore : la somme des angles sous lesquels on voit du point O les quatres segments formant le bord du rectangle est exactement égale à  $2\pi$ .

On peut sans doute considérer que l'affirmation précédente énoncé une vérité géométrique évidente. En tout cas on voit qu'elle suggère des développements allant bien au-delà du cas des rectangles.

On peut aussi raisonner ainsi : nécessairement  $\exp(I) = \frac{z_1}{z_0} \frac{z_2}{z_1} \frac{z_3}{z_2} \frac{z_0}{z_3} = 1$  donc  $I \in 2\pi i \mathbb{Z}$ . Mais  $0 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 4\pi$  car chacun des quatre angles est dans  $]0, \pi[$ . Donc la seule possibilité est que  $I = 2\pi i$ . Mais cette démonstration est assez mauvaise car on ne pourrait pas procéder ainsi avec un polygone avec 5 ou plus de sommets.

Une bien meilleure méthode est la suivante. Au lieu des sommets A, B, C, D, il est bien plus astucieux de travailler avec les points P, Q, R, S d'intersections du bord du rectangle avec les axes des coordonnées, de sorte que P est entre A et B, etc...Notons  $w_0, w_1, w_2, w_3$  les affixes correspondantes. Alors  $\text{Log}(\frac{z}{w_0})$  est une primitive de  $\frac{1}{z}$  sur la partie du bord du rectangle allant dans le sens direct de P à Q, etc... En répétant l'argument plus haut on obtient donc :

$$I = i \left( \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' \right)$$

avec  $\alpha'$  l'angle  $\widehat{POQ},\,\ldots,\,\delta'$  l'angle  $\widehat{SOP}.$  Chacun vaut  $\frac{\pi}{2}.$  D'où la formule  $I=2\pi i.^{59}$ 

Nous remettons à une occasion future la discussion générale des valeurs possibles pour les intégrales  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$  pour des lacets dans  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  et la façon de les évaluer.

<sup>59.</sup> cela suggère une preuve de  $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$  au niveau de la géométrie du collège : on définit géométriquement  $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \delta_1,\ \delta_2$ , de sorte que  $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ , etc..., et  $\pi/2=\alpha'=\alpha_2+\beta_1$ ,  $\pi/2=\beta'=\beta_2+\gamma_1,\ \pi/2=\gamma'=\gamma_2+\delta_1,\ \pi/2=\delta'=\delta_2+\alpha_1$ . J'espère que vous voyez ce que je veux dire.

# 13 Critère d'holomorphie, limites uniformes

Parmi nos raisonnements du premier chapitre il y en a un que nous n'avons pas suffisamment exploité.

Théorème 24 (Critère d'holomorphie) Soit U un ouvert (non vide) du plan complexe et f une fonction continue sur U. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1. f est holomorphe,
- 2. toute intégrale  $\int_{\partial \mathcal{T}} f(z)dz$  le long du bord d'un triangle  $\mathcal{T}$  inclus dans U est nulle,
- 3. toute intégrale  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z)dz$  le long du bord d'un rectangle  $\mathcal{R}$  inclus dans U est nulle,
- 4. idem pour les rectangles aux bords parallèles aux axes.

Attention! dans cet énoncé les triangles et rectangles considérés doivent être entièrement inclus dans l'ouvert U: si l'on suppose seulement que leurs bords sont dans U on ne peut pas conclure à la nullité des intégrales. Lorsque l'on dit qu'un rectangle est inclus dans U on veut dire toujours qu'à la fois son intérieur et son bord le sont.

Preuve du Théorème : supposons f holomorphe. Soit T un triangle plein inclus dans U. Choisissons un  $z_0$  dans l'intérieur de T. Considérons le triangle  $T_\lambda$  un peu plus grand que T obtenu par la dilatation de centre  $z_0$  et de rapport  $\lambda > 1$  très proche de 1 ( $z \to z_0 + \lambda(z - z_0)$ ). L'ouvert  $U_\lambda$  égal à l'intérieur de  $T_\lambda$  est étoilé (il est même convexe). Le bord du triangle originel T est un lacet entièrement inclus dans  $U_\lambda$ . Donc  $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ . En ce qui concerne les rectangles, on peut : soit montrer  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0$  par la méthode de Goursat comme nous l'avons déjà fait pour les rectangles aux bords horizontaux et verticaux ; soit découper le rectangle en l'union de deux triangles ; soit faire pour le rectangle une démonstration semblable à celle faite ici pour les triangles. Venons-en à l'aspect le plus intéressant du théorème, le fait que si  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0$  pour tout rectangle  $\mathcal{R} \subset U$  alors la fonction continue f est holomorphe. On ne va utiliser que des rectangles aux bords parallèles aux axes. Il s'agit donc de la réciproque du théorème de Cauchy-Goursat. Pour la preuve nous n'avons qu'à reprendre à l'identique un raisonnement que nous avons déjà fait au premier chapitre. Pour montrer que f est holomorphe dans un voisinage d'un point  $z_0 = x_0 + iy_0$  on

peut aussi bien remplacer U par un disque  $D(z_0, r)$  non vide centré en  $z_0$ . Pour z = x + iy dans ce disque, posons :

$$g(x+iy) = \int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)dt + i \int_{y_0}^{y} f(x+iu)du$$

Cette expression (et la continuité de f) donne facilement :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x+iy) = if(x+iy) .$$

De plus par l'hypothèse faite, on a aussi :

$$g(x+iy) = i \int_{y_0}^{y} f(x_0 + iu) du + \int_{x_0}^{x} f(t+iy) dt ,$$

et donc

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x+iy) = f(x+iy) .$$

Ainsi la fonction g a des dérivées partielles continues vérifiant les équations de Cauchy-Riemann : elle est donc holomorphe, et sa dérivée g' = f l'est donc aussi. Le Théorème est démontré.

#### Remarques:

- 1. la partie du théorème qui dit que la fonction continue f est holomorphe si les intégrales prises le long des bords de triangles sont nulles est appelée « Lemme de Morera ».
- 2. pour f holomorphe on aurait pu démontrer dès le premier chapitre  $\int_{\partial \mathcal{T}} f(z)dz = 0$  pour tout triangle  $\mathcal{T}$  par la méthode de Goursat de subdivision utilisée pour les rectangles.

Considérons maintenant des fonctions  $f_1, f_2, \ldots$  sur un ouvert U. Je rappelle que l'on dit qu'elles convergent uniformément vers une fonction limite f si :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbf{N} \quad n \ge N \implies \forall z \in U \quad |f_n(z) - f(z)| \le \epsilon$$

Un théorème important de première ou deuxième année nous dit que si les fonctions  $f_n$  sont continues et convergent uniformément vers f alors f est elle-même une fonction continue. De plus considérons un segment quelconque  $[z_0, z_1]$  dans l'ouvert U. Alors :

$$\left| \int_{[z_0, z_1]} f_n(z) dz - \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz \right| \le \int_{[z_0, z_1]} |f_n(z) - f(z)| |dz|,$$

donc pour  $n \geq N$  on a

$$\left| \int_{[z_0, z_1]} f_n(z) dz - \int_{[z_0, z_1]} f(z) dz \right| \le \epsilon \int_{[z_0, z_1]} |dz| = \epsilon |z_1 - z_0|$$

ce qui établit :  $\lim \int_{[z_0,z_1]} f_n(z) dz = \int_{[z_0,z_1]} f(z) dz$  et donc pour tout rectangle  $\mathcal{R} \subset U$  (ou tout triangle  $\mathcal{T} \subset U$ ) on a :

$$\lim \int_{\partial \mathcal{R}} f_n(z) dz = \int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz$$

Si maintenant on suppose que toutes les fonctions  $f_n$  sont holomorphes, alors toutes les intégrales  $\int_{\partial \mathcal{R}} f_n(z) dz$  sont nulles et donc aussi  $\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz$  est nul. On applique à f le théorème précédent et on en déduit que f est une fonction holomorphe.

Je voudrais maintenant établir qu'en plus on a :

$$\forall k \in \mathbf{N} \ \forall z \in U \quad \lim f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$$

autrement dit que les fonctions dérivées convergent (simplement) vers la fonction limite f. <sup>60</sup> Pour cela je rappelle une formule qui a été établie au premier chapitre pour toute fonction holomorphe f sur un disque D(z,R) et tout 0 < r < R:

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \frac{f^{(k)}(z)}{k!} r^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta}) e^{-ki\theta} d\theta$$

Cette formule résulte immédiatement des formules de la théorie des séries de Fourier lorsque l'on écrit la série de Taylor pour f(z+h),  $h=re^{i\theta}$ , sous la forme :

$$f(z + re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} r^n e^{ni\theta}$$

La convergence pour r fixé strictement inférieur R qui est lui-même inférieur au rayon de convergence est une convergence normale (on sait que  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right| r^n < \infty$  lorsque r est strictement inférieur au rayon de convergence) et on peut donc calculer  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z+re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta$  en permutant série et intégrale (voir annexe). Seul le terme avec n=k donne un résultat non nul, et on obtient la formule indiquée pour  $\frac{f^{(k)}(z)}{k!}r^k$ .

Cela étant acquis si on applique pour chaque k fixé, et pour chaque n la formule à  $f_n$ , et aussi à f, on en déduit grâce à l'hypothèse de convergence uniforme :

$$\frac{f^{(k)}(z)}{k!}r^k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(z + re^{i\theta})e^{-ki\theta}d\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n^{(k)}(z)}{k!}r^k$$

<sup>60.</sup> dois-je rappeler que pour des fonctions, même infiniment dérivables, de la variable réelle, on ne peut pas sans précaution affirmer que la limite des dérivées est la dérivée de la limite?

et donc  $\lim f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$  ce qu'il fallait démontrer. En conclusion :

**Théorème 25 (de convergence uniforme)** Supposons que les fonctions holomorphes  $f_n$  (n = 0, 1, ...) convergent uniformément vers une fonction f sur un ouvert U. Alors la fonction limite f est holomorphe. De plus pour tout k on a aussi  $\lim f_n^{(k)} = f^{(k)}$  au sens de la convergence simple.

Remarque : dans la pratique, pour que l'hypothèse de convergence uniforme soit satisfaite, souvent il faut remplacer l'ouvert U par un ouvert  $V \subset U$  plus petit, par exemple un disque  $D(z_0,r)$  tel que le disque fermé (compact)  $\overline{D(z_0,r)}$  soit inclus dans U. Si effectivement  $(f_n(z))_{n=0,1,\dots}$  a cette propriété d'être uniformément convergente sur tout tel disque, alors on prouve que les suites des fonctions dérivées conservent elles aussi la propriété de convergence uniforme (sur les disques fermés inclus dans U). Cet énoncé plus complet (théorème de Weierstrass) sera établi dans un autre chapitre.

# 14 Intégrales à paramètre complexe

Considérons une intégrale sur un intervalle [a,b] réel  $(-\infty < a < b < \infty)$  :

$$G(\lambda) = \int_{a}^{b} g(\lambda, t) dt$$

dépendant d'un paramètre complexe  $\lambda$  qui est dans ouvert  $U \subset \mathbb{C}$ .

Théorème 26 (d'holomorphie des intégrales à paramètre) Sous les hypothèses :

- 1. la fonction  $(\lambda, t) \mapsto g(\lambda, t)$  est une fonction continue sur  $U \times [a, b]$ ,
- 2. pour chaque  $t \in [a,b]$  la fonction  $\lambda \mapsto g(\lambda,t)$  est holomorphe sur U,

alors la fonction  $G(\lambda)$  est holomorphe. De plus les fonctions  $\frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k}(\lambda, t)$  sont elles aussi des fonctions continues sur  $U \times [a, b]$  et l'on a

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad G^{(k)}(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial^k g}{\partial \lambda^k}(\lambda, t) dt$$

La preuve est assez sophistiquée. L'holomorphie étant une propriété locale nous pouvons à loisir remplacer U par un ouvert plus petit voisinage d'un point arbitraire  $\lambda_0 \in U$ . Soit donc r > 0 tel que le disque fermé  $\overline{D(\lambda_0, 2r)}$  est inclus dans U. Comme g est continue sur le compact  $\overline{D(\lambda_0, 2r)} \times [a, b]$  il existe une constante C telle que

$$\forall \lambda \in \overline{D(\lambda_0, 2r)} \quad \forall t \in [a, b] \qquad |g(\lambda, t)| \le C$$

Considérons la série de Taylor au point  $\lambda_0$  pour la fonction  $g(\lambda, t)$ :

$$g(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)(\lambda - \lambda_0)^n$$

Les coefficients  $c_n(t)$  dépendent de  $\lambda_0$ . Ils sont donnés par la formule de Taylor :

$$c_n(t) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n} (\lambda_0, t) .$$

De plus on peut les exprimer sous une forme intégrale :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi (2r)^n} \int_0^{2\pi} g(\lambda_0 + 2re^{i\theta}, t) e^{-ni\theta} d\theta.$$

Nous faisons deux déductions de cette formule intégrale. D'une part par un théorème (voir annexe) sur la continuité des intégrales à paramètre les fonctions  $c_n(t)$  sont des fonctions continues de t, d'autre part elles vérifient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |c_n(t)| \le \frac{C}{(2r)^n}$$
.

On peut alors écrire pour  $|\lambda - \lambda_0| \le r$ :

$$\left| g(\lambda, t) - \sum_{n=0}^{N} c_n(t)(\lambda - \lambda_0)^n \right| \le \sum_{n>N} \frac{C}{(2r)^n} r^n = \frac{C}{2^N}.$$

Définissons maintenant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad c_n = \int_a^b c_n(t)dt \ .$$

Cela est licite puisque l'on a indiqué précédemment que  $c_n(t)$  est une fonction continue de t. On obtient en intégrant sur l'intervalle [a,b] l'inégalité précédente :

$$|\lambda - \lambda_0| \le r \implies \left| G(\lambda) - \sum_{n=0}^{N} c_n (\lambda - \lambda_0)^n \right| \le \frac{(b-a)C}{2^N}$$

La série  $\sum c_n(\lambda - \lambda_0)^n$  est donc convergente pour  $|\lambda - \lambda_0| \le r$  et l'on obtient :

$$|\lambda - \lambda_0| \le r \implies G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_0)^n$$
.

Ceci prouve que G est holomorphe sur le disque  $D(\lambda_0, r)$ . De plus comme la série est forcément la série de Taylor de G au point  $\lambda_0$  on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad G^{(n)}(\lambda_0) = n! c_n = n! \int_a^b c_n(t) dt = \int_a^b \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda_0, t) dt$$

puisque  $n!c_n(t) = \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda_0, t)$ . Le théorème est démontré, enfin pas tout-à-fait : on a établique

$$\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t)$$

était une fonction continue de t pour chaque  $\lambda \in U$  fixé, mais pas encore qu'elle était une fonction continue du couple  $(\lambda, t)$ .

Pour cela nous reprenons  $\lambda_0 \in U$  et r > 0 exactement comme dans la preuve ci-dessus. Pour  $|\lambda - \lambda_0| < r$  le disque fermé centré en  $\lambda$  et de rayon r est inclus dans le disque  $D(\lambda_0, 2r)$  donc aussi dans l'ouvert U. Écrivons alors :

$$\frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} g(\lambda + re^{i\theta}, t) e^{-n i\theta} d\theta.$$

Posons:

$$F(\lambda, t, \theta) = g(\lambda + re^{i\theta}, t)e^{-n i\theta}$$

Il s'agit d'une fonction continue du triplet  $(\lambda, t, \theta) \in D(\lambda_0, r) \times [a, b] \times [0, 2\pi]$ . Donc (voir annexe), son intégrale par rapport à  $\theta$  est une fonction continue du couple  $(\lambda, t)$ . Le théorème est entièrement démontré.

Remarque : on a parfois besoin d'un théorème plus général, pour des fonctions  $g(\lambda, t)$  qui ne sont pas nécessairement continues en la variable t. On établira plus tard un tel théorème sans hypothèse de continuité, mais seulement de Riemann-intégrabilité sur [a, b]. Mais très souvent, si le théorème ci-dessus ne suffit pas, c'est parce que les fonctions  $g(\lambda, t)$  ont certes des discontinuités mais seulement en des points fixes  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_N = b$  de [a, b] indépendants de  $\lambda$ . Il suffit alors de remplacer l'intervalle [a, b] par ses sous-intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$  pour appliquer le théorème présenté ici.  $[a_j, a_{j+1}]$ 

<sup>61.</sup> les raisons pour ne pas donner le théorème plus général ici sont semblables à celles nous ayant amené à ne démontrer qu'en partie le théorème de Weierstrass sur la convergence uniforme dans la section précédente : c'est que pour mener à bien commodément ces preuves on a besoin d'une compréhension plus approfondie des liens entre dérivées et intégrales pour les fonctions analytiques (formules intégrales de Cauchy). Or, j'ai décidé d'attendre un peu avant de présenter cela.

J'indique brièvement une autre manière d'établir sous les hypothèses faites que

$$G(\lambda) = \int_{a}^{b} g(\lambda, t) dt$$

est une fonction holomorphe de  $\lambda$ . On peut utiliser pour cela des sommes de Riemann :

$$S_N(\lambda) = \sum_{0 \le k \le N} \frac{b-a}{N} g(\lambda, a + k \frac{b-a}{N})$$

Comme sommes finies les fonctions  $S_N$  sont certainement holomorphes. Soit D un disque ouvert tel que le disque fermé  $\overline{D}$  est inclus dans U. La fonction g est continue donc uniformémement continue sur le compact  $\overline{D} \times [a,b]$ . Donc, en particulier, pour tout  $\epsilon > 0$  on peut choisir  $N \gg 1$  tel :

$$\forall \lambda \in \overline{D} \quad |t - u| \le \frac{b - a}{N} \implies |g(\lambda, t) - g(\lambda, u)| \le \epsilon.$$

Alors, pour tout  $n \geq N$  on a :

$$\left| \int_{a}^{b} g(\lambda, t) dt - S_n(\lambda) \right| \leq \sum_{0 \leq k \leq n} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} |g(\lambda, t) - g(\lambda, a+k\frac{b-a}{n})| dt \leq (b-a)\epsilon$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur  $\overline{D}$  (donc sur D) des fonctions holomorphes  $S_n(\lambda)$  vers  $G(\lambda)$ . La fonction G est donc holomorphe.

Terminons ce chapitre sur le cas des intégrales impropres au sens de Riemann (c'està-dire, avec un intervalle infini d'intégration au lieu de [a, b] ou encore avec des fonctions non-bornées au voisinage d'une des extrémités a ou b).

**Théorème 27** Soit  $g(\lambda, t)$  une fonction continue en le couple  $(\lambda, t) \in U \times [0, +\infty[$ , holomorphe en  $\lambda$  pour t fixé et telle qu'il existe une fonction k(t) indépendante de  $\lambda$  avec :

$$\forall \lambda \in U \ \forall t \in [0, +\infty[ \qquad |g(\lambda, t)| \le k(t) ,$$

$$et \qquad \int_0^\infty k(t) dt < \infty$$

Alors la fonction

$$G(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda, t) dt$$

est une fonction holomorphe de  $\lambda \in U$ . De plus,

$$\forall n \ge 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{T \to \infty} \int_0^T \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t) dt$$

Un énoncé exactement analogue vaut pour un intervalle tel que ]0,1], les fonctions  $g(\lambda,t)$  (continues  $sur\ U \times ]0,1]$ ) étant alors supposées dominées par une fonction positive (Riemann intégrable) k avec  $\int_0^1 k(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\epsilon}^1 k(t)dt < \infty$ .

Preuve : d'abord  $G(\lambda) = \int_0^\infty g(\lambda,t) dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T g(\lambda,t) dt$  existe puisqu'il s'agit d'une intégrale absolument convergente. Soit  $T_1 < T_2 < \dots$  une suite quelconque de limite  $+\infty$  et posons

$$G_k(\lambda) = \int_0^{T_k} g(\lambda, t) dt$$

Par le théorème précédent les fonctions  $G_k$  sont holomorphes. De plus on a :

$$|G(\lambda) - G_k(\lambda)| \le \int_{T_k}^{\infty} k(t)dt$$

donc les fonctions  $G_k$  convergent uniformément sur U vers  $G(\lambda)$ . Donc la fonction G est holomorphe. De plus on sait alors que l'on a convergence simple :

$$\forall n \ge 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{k \to \infty} G_k^{(n)}(\lambda)$$

et à nouveau par le théorème précédent

$$G_k^{(n)}(\lambda) = \int_0^{T_k} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t) dt$$

donc

$$\forall n \geq 1 \quad G^{(n)}(\lambda) = \lim_{k \to \infty} \int_0^{T_k} \frac{\partial^n g}{\partial \lambda^n}(\lambda, t) dt$$

Comme la limite existe pour n'importe quel choix de suite  $T_1 < T_2 < \dots$  avec  $\lim T_k = \infty$  c'est (par un résultat de première année : « critère par les suites ») que la limite  $\lim_{T\to\infty}$  existe (et vaut  $G^{(n)}(\lambda)$ ). Le cas d'intervalle tel que ]0,1] est établi d'une manière analogue.

Remarque : bien souvent on doit remplacer l'ouvert U par des ouverts plus petits pour trouver une fonction k qui marche. Par exemple U est un demi-plan  $\text{Re}(\lambda) > \sigma_0$  et pour trouver k on doit se restreindre à l'ouvert  $\text{Re}(\lambda) > \sigma_0 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Si l'on peut faire cela pour tout  $\epsilon > 0$  alors c'est bon et on a la conclusion du théorème sur U.

À titre d'exemple d'intégrales à paramètre intéressantes considérons des intégrales du type  $F(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t) dt$  (transformées de Laplace). Si :

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\sigma_0 t} |g(t)| dt < \infty$$

pour un certain  $\sigma_0 \in \mathbf{R}$  on peut affirmer que F est holomorphe sur le demi-plan  $\mathrm{Re}(\lambda) > \sigma_0$ . Malheureusement pour appliquer le théorème ci-dessus il faudrait supposer g continue comme fonction de t. Alors je propose une preuve spéciale où l'on suppose seulement que g est intégrable au sens de Riemann sur tous les intervalles [0,T],  $0 < T < \infty$ . En fait j'affirme que pour chaque  $T \in ]0, +\infty[$  la fonction

$$F_T(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda t} g(t) dt$$

est une fonction entière de  $\lambda$ . Admettons ce point pour un instant. Pour  $\text{Re}(\lambda) \geq \sigma_0$  on a

$$\left| F(\lambda) - F_T(\lambda) \right| \le \int_T^\infty e^{-\sigma_0 t} |g(t)| dt$$

et donc les fonctions  $F_T$  tendent vers F lorsque  $T \to \infty$ , uniformément sur le demi-plan fermé  $\operatorname{Re}(\lambda) \ge \sigma_0$ . La fonction F est donc continue sur ce demi-plan fermé et holomorphe sur le demi-plan ouvert  $\operatorname{Re}(\lambda) > \sigma_0$ .

Pour montrer que  $F_T$  est une fonction entière, définissons :

$$u_n(t) = \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^n g(t)$$

La fonction g Riemann intégrable est bornée sur [0,T], soit  $C_T$  une borne supérieure. Soit :

$$a_n = \frac{|\lambda|^n}{n!} T^n C_T$$

de sorte que

$$\forall t \in [a, b] \qquad |u_n(t)| \le a_n$$

et  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^{|\lambda|T} C_T < \infty$ . On est donc dans le cadre du théorème de l'annexe sur l'interversion des séries et des intégrales en cas de convergence normale (pour un  $\lambda$  donné et fixe) ce qui permet d'affirmer :

$$\int_0^T \sum_{n=0}^\infty u_n(t) \ dt = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T u_n(t) \ dt \ .$$

Cela donne donc, pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ :

$$F_T(\lambda) = \int_0^T \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} t^n g(t) dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_0^T t^n g(t) dt$$

et prouve que  $F_T$  est la somme d'une série entière qui converge pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ . Donc  $F_T$  est une fonction holomorphe dans tout  $\mathbf{C}$  (fonction entière).

### 15 Annexes

Dans cette annexe je me limite aux outils usuels employés dans le cadre de la théorie de l'intégration suivant Riemann. Lebesgue a démontré des théorèmes incroyablement puissants (théorème de la convergence dominée, théorème de la convergence monotone) qui s'appliquent aux intégrales de Riemann, mais dont le contexte naturel est celui de l'approche de Lebesgue (Borel, Fatou, Riesz,...) à la mesure et à l'intégration. Comme cette approche est associée à tout un vocabulaire (fonctions mesurables, tribus d'ensemble, sigma-additivité, etc...) dont l'assimilation prend du temps, il est raisonnable de se limiter dans le cadre d'un cours d'Analyse Complexe essentiellement à ce que l'on peut faire aisément avec la notion de convergence uniforme. Cela oblige d'ailleurs parfois dans la pratique à obtenir des majorations explicites, exercice fort utile par ailleurs, majorations dont on n'a pas besoin si l'on s'autorise à utiliser les prodigieux théorèmes de Lebesgue.

### 15.1 Interversion de séries et d'intégrales

Nous commencerons par:

**Théorème 28** Soit  $f_n$ , n = 0, 1, 2, ... des fonctions Riemann-intégrables sur l'intervalle fini [a,b]. On suppose qu'elles convergent uniformément vers une fonction f. Alors f est intégrable au sens de Riemann et :

$$\int_{a}^{b} f(t)dt = \lim_{a} \int_{a}^{b} f_{n}(t)dt$$

Preuve : quitte à considérer séparément les parties réelles et imaginaires, on peut supposer que les fonctions sont à valeurs réelles. Soit  $\epsilon>0$  et  $N\in \mathbb{N}$  tel que

$$n \ge N \implies \forall t \in [a, b] \quad |f(t) - f_n(t)| \le \epsilon$$

Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux fonctions en escalier telles que  $K_1 \leq f_N \leq K_2$  et  $\int_a^b (K_2(t) - K_1(t)) dt \leq \epsilon \cdot (b-a)$ . Posons  $K_0 = K_1 - \epsilon$  et  $K_3 = K_2 + \epsilon$ . Alors  $K_0$  et  $K_3$  sont des fonctions en escalier telles que  $K_0 \leq f \leq K_3$  et  $\int_a^b (K_3(t) - K_0(t)) dt \leq 3\epsilon \cdot (b-a)$ . Comme  $\epsilon > 0$  est arbitraire,

la fonction f est intégrable au sens de Riemann. On a alors, de plus :

$$n \ge N \implies \left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \le \int_a^b |f(t) - f_n(t)|dt \le \epsilon(b - a)$$

et donc  $\lim \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$ .

Théorème 29 (interversion en cas de convergence normale) Soient  $u_n$ , n = 0, 1, 2, ... des fonctions Riemann intégrables sur un intervalle [a,b] fini, telles qu'il existe une série à termes positifs  $\sum a_n$  de sorte que :

$$\forall t \in [a, b]$$
  $|u_n(t)| \le a_n$ 

$$et \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty.$$

Alors la fonction  $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$  est intégrable au sens de Riemann et

$$\int_{a}^{b} U(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{a}^{b} u_n(t)dt.$$

Preuve : je rappelle que cette notion s'appelle « convergence normale » de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)$ . En tout cas, l'hypothèse faite implique la convergence absolue pour chaque t donc la fonction U(t) existe bel et bien. Posons  $f_n(t) = u_0(t) + u_1(t) + \dots + u_n(t)$ . Les fonction  $f_n$  sont Riemann-intégrables comme sommes finies de fonctions Riemann-intégrables. De plus on a :

$$\forall t \in [a, b]$$
  $|U(t) - f_n(t)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 

et comme  $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ , ces inégalités prouvent la convergence uniforme des fonctions  $f_n$  vers la fonction U. On applique alors le théorème précédent.

### 15.2 Continuité d'intégrales à paramètres

On considère un intervalle fini fermé [a, b] et aussi un ensemble de paramètres  $S \subset \mathbb{R}^p$ (dont les éléments seront dénotés par des lettres telles P, Q; par exemple P peut être un couple  $(\lambda, x)$  composé avec un nombre complexe de  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  et un nombre réel x de sorte que  $P \in \mathbf{R}^3$ ) et une fonction f(P,t) (à valeurs réelles ou complexes) qui est pour chaque  $P \in S$  une fonction Riemann intégrable de t de sorte que l'on peut définir :

$$F(P) = \int_{a}^{b} f(P, t)dt .$$

On notera ||P-Q|| une norme sur  $\mathbf{R}^p$  donnant sa topologie, par exemple pour  $\mathbf{R}^p = \mathbf{C} \times \mathbf{R}$  on peut prendre  $||(\lambda, x)|| = |\lambda| + |x|$  où l'on utilise le module d'un nombre complexe et la valeur absolue d'un nombre réel.

**Théorème 30** On suppose que pour chaque t la fonction f(P,t) est une fonction continue sur S, et cela uniformément par rapport à t. Alors la fonction F est une fonction continue de P.

Preuve : d'abord il faut expliquer ce que signifie l'hypothèse « continue en P, uniformément en t ». Cela veut dire :

$$\forall P \in S \ \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \qquad \forall t \in [a, b] \ \forall Q \in S \quad \|P - Q\| \le \delta \implies |f(P, t) - f(Q, t)| \le \epsilon$$

Comme ces inégalités (pour un P et  $\epsilon$  donnés) valent simultanément avec le même  $\delta(P, \epsilon)$  pour tout t de l'intervalle [a, b], on obtient pour Q vérifiant  $||P - Q|| \le \delta$ :

$$|F(P) - F(Q)| = \left| \int_a^b f(P, t)dt - \int_a^b f(Q, t)dt \right| \le \int_a^b |f(P, t) - f(Q, t)|dt \le \epsilon \cdot (b - a)$$

Ceci prouve bien  $\lim_{Q \to P \atop Q \in S} F(Q) = F(P)$  autrement dit F est continue au point P arbitraire de S.

La façon la plus simple de garantir la « continuité en P, uniformément en t » est de demander la continuité de f(P,t) par rapport au couple (P,t). On va se restreindre pour énoncer cela à des  $S \subset \mathbf{R}^p$  d'un type simple.

**Théorème 31** On suppose que  $S \subset \mathbf{R}^p$  est de la forme  $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_p$ , les  $I_j$  étant des intervalles quelconques <sup>62</sup> et aussi on suppose que la fonction  $f: S \times [a,b] \to \mathbf{C}$  est continue. Alors F est continue comme fonction de  $P \in S$ .

<sup>62.</sup> c'est-à-dire pas nécessairement ouverts ou fermés, tous les types d'intervalles sont autorisés. Cela signifie dans la preuve qui suit que l'on conserve en tête toutes les éventualités, mais que l'on ne vas pas jusqu'à fastidieusement les expliciter, on se contente de se convaincre que l'on écrit des choses sensées.

Preuve : soit  $P_0 \in S$ . Écrivons explicitement  $P_0 = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ . Pour  $\eta > 0$  suffisamment petit l'intersection  $W_{\eta} = S \cap \prod_j [x_j - \eta, x_j + \eta]$  est un produit d'intervalles fermés. Donc  $W_{\eta}$  est fermé (pour  $\eta$  suffisamment petit). La fonction f restreinte au compact  $W_{\eta} \times [a, b]$  est continue donc uniformément continue. Donc a fortiori la restriction de f au voisinage  $V_{\eta} = S \cap \prod_j [x_j - \eta, x_j + \eta[$  de  $P_0$  dans S est uniformément continue comme fonction du couple  $(P, t) \in V_{\eta} \times [a, b]$ . Autrement dit quitte à remplacer S par  $V_{\eta}$  (qui est ouvert dans S) on peut dès le départ supposer que f est une fonction uniformément continue du couple (P, t). Cela signifie explicitement la chose suivante : pour tout  $\epsilon > 0$  on peut trouver  $\delta > 0$  tel que

$$\forall t, u \in [a, b], \forall P, Q \in S, \quad (|t - u| \le \delta \text{ et } ||P - Q|| \le \delta) \implies |f(P, t) - f(Q, u)| \le \epsilon$$

En prenant t = u là-dedans on constate que cela donne la « continuité de f comme fonction de P, uniformément en  $t \in [a,b]$  ». Donc on peut appliquer le théorème précédent (ou, mieux, intégrer les inégalités avec t = u sur l'intervalle [a,b]).

Remarque : si l'ensemble S considéré est, par exemple, du type  $U \times J \subset \mathbf{C} \times \mathbf{R}$  avec U un ouvert de  $\mathbf{C}$  et J un intervalle de  $\mathbf{R}$ , alors on peut, après avoir choisi  $P_0 = (\lambda_0, v_0) \in S$  remplacer  $U \subset \mathbf{C}$  par le voisinage ouvert rectangulaire de  $\lambda_0 = x_0 + iy_0$  donné par les inégalités  $|x - x_0| < \eta$ ,  $|y - y_0| < \eta$  (pour un certain  $\eta > 0$  suffisamment petit) et se ramener ainsi aux hypothèses du théorème. De même si  $S \subset \mathbf{R}^p$  est un ouvert quelconque, alors après avoir pris  $P_0 \in S$  arbitraire, on peut commence par remplacer S par un produit d'intervalles ouverts  $\prod_j I_j$  qui contient  $P_0$  pour se ramener aux hypothèses du théorème. On pourrait dans ce théorème faire des énoncés plus généraux, mais je crois que la Topologie vous traumatise déjà suffisamment comme cela, alors je n'insiste pas.

#### 15.3 Dérivabilité d'intégrales à paramètres

**Théorème 32** Soit  $[\alpha, \beta]$  et [a, b] des intervalles réels finis d'intérieurs non vides. Soit  $f: [\alpha, \beta] \times [a, b] \to \mathbb{C}$  une fonction qui est pour chaque  $x \in [\alpha, \beta]$  intégrable au sens de Riemann comme fonction de  $t \in [a, b]$ , de sorte que l'on peut définir :

$$F(x) = \int_{a}^{b} f(x, t)dt$$

On suppose de plus que pour chaque t la fonction dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$  existe (en  $x=\alpha$  il s'agit d'une dérivée à droite et en  $x=\beta$  d'une dérivée à gauche) et est une fonction continue de  $x \in [\alpha, \beta]$ , uniformément par rapport à  $t \in [a, b]$  (cela sera le cas en particulier si  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$  est une fonction continue du couple (x,t)). Alors, la fonction F est une fonction continûment dérivable de x et

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Précisons que cela fait partie des conclusions que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$  est pour chaque x une fonction intégrable au sens de Riemann sur [a,b] et donc que l'intégrale ci-dessus a un sens.

Preuve : comme nous allons appliquer le théorème des accroissements finis nous séparons parties réelles et parties imaginaires ce qui nous ramène à devoir établir le théorème sous l'hypothèse que f est à valeurs réelles. C'est ce que nous supposerons dorénavant donc. Notons  $f_1$  la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Par hypothèse il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|x - x'| \le \delta \implies \forall t \in [a, b] \quad |f_1(x', t) - f_1(x, t)| \le \epsilon$$

Par le théorème des accroissements finis, pour t fixé :

$$\forall x \forall h \neq 0 \quad (x, x + h \in [\alpha, \beta]) \implies \exists \theta \in ]0, 1[ \qquad f(x + h, t) = f(x, t) + h f_1(x + \theta h, t)$$

Le fameux  $\theta$  (qui n'est pas forcément unique) dépend tout à la fois de x, de h, et de t. Ce qui compte c'est  $0 < \theta < 1$ . Imposons maintenant  $0 < |h| \le \delta$ . Alors en combinant l'égalité des accroissements finis et l'inégalité précédente avec  $x' = x + \theta h$  on obtient :

$$(A) \quad \forall t \in [a, b] \ \forall x \quad (0 < |h| \le \delta \ \text{et} \ x, x + h \in [\alpha, \beta]) \implies \left| \frac{f(x + h, t) - f(x, t)}{h} - f_1(x, t) \right| \le \epsilon$$

Maintenant  $x \in [\alpha, \beta]$  est fixé. Soit pour  $n \ge N_1$  suffisamment grand (c'est-à-dire  $N_1 \ge \frac{1}{\beta - x}$ ) les fonctions de  $t: ^{63}$ 

$$g_n(t) = n(f(x + \frac{1}{n}, t) - f(x, t))$$

Ce sont des fonctions Riemann intégrables et en posant  $N(\epsilon) = \max(\frac{1}{\delta}, N_1)$  on déduit de l'équation (A) ci-dessus

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N(\epsilon) \quad n \ge N(\epsilon) \implies \forall t \in [a, b] \quad |g_n(t) - f_1(x, t)| \le \epsilon$$
63. si  $x = \beta$  prendre à la place  $-n(f(\beta - 1/n, t) - f(\beta, t))$ .

donc la fonction  $f_1(x,t)$  est limite uniforme des fonctions  $g_n(t)$  qui sont Riemann-intégrables. Elle est donc elle-même Riemann intégrable. On revient maintenant à (A), que l'on intègre sur l'intervalle [a,b]. Cela donne :

$$\forall x \quad (0 < |h| \le \delta \text{ et } x, x + h \in [\alpha, \beta]) \implies \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_a^b f_1(x, t) dt \right| \le \epsilon$$

D'où l'on déduit :

$$\forall x \in [\alpha, \beta]$$
  $\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \int_a^b f_1(x, t) dt$ 

On a donc démontré que la fonction F est une fonction dérivable de x avec  $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ . La continuité de F' découle alors du théorème de continuité des intégrales à un paramètre établi dans la section précédente.

### 15.4 Intégrales doubles de fonctions continues

**Théorème 33** Soit g(x,t) une fonction continue sur le produit cartésien  $[\alpha,\beta] \times [a,b]$  de deux intervalles finis fermés. Alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{a}^{b} g(x, t) dt \right) dx = \int_{a}^{b} \left( \int_{\alpha}^{\beta} g(x, t) dx \right) dt$$

Preuve : je pourrais procéder autrement mais je vais tirer profit du théorème de la section précédente. Posons  $f(x,t) = \int_{\alpha}^{x} g(y,t) dy$ . En utilisant le fait que g est uniformément continue sur  $[\alpha,\beta] \times [a,b]$  vous établirez sans peine que f est une fonction continue du couple (x,t). De plus la fonction dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est simplement g. La fonction g est une fonction continue du couple (x,t) donc uniformément continue, donc continue en x, uniformément par rapport à t. On peut donc appliquer à f le théorème de la section précédente. On en déduit que

$$x \mapsto F(x) = \int_a^b \left( \int_\alpha^x g(y, t) dy \right) dt$$

est une fonction continûment dérivable avec

$$F'(x) = \int_a^b g(x,t)dt .$$

Ainsi:

$$F(\beta) = F(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \left( \int_{a}^{b} g(x, t) dt \right) dx$$

et comme  $F(\alpha) = 0$  et

$$F(\beta) = \int_{a}^{b} \left( \int_{\alpha}^{\beta} g(x, t) dx \right) dt$$

cela donne l'égalité voulue.

### 15.5 Dérivées secondes mixtes

**Théorème 34** Soit I et J deux intervalles ouverts et F(x,t) une fonction sur  $I \times J$  qui admet des dérivées partielles secondes  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F$  et  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F$  que l'on suppose être toutes deux des fonctions continues du couple (x,t). Alors

$$\forall (x,t) \in I \times J$$
  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F(x,t)$ 

Preuve : On peut, en traitant séparément parties réelles et imaginaires, supposer que F est à valeurs réelles. Prenons  $x_0 \in I$  et  $t_0 \in J$ . Soit  $g(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F(x,t)$ . Par hypothèse g est une fonction continue du couple (x,t). Donc  $\int_{t_0}^{t_1} g(x,t) dt$  est pour  $t_0$  et  $t_1$  fixés une fonction continue de x, c'est-à-dire  $\frac{\partial}{\partial x} F(x,t_1) - \frac{\partial}{\partial x} F(x,t_0)$  est une fonction continue de x, et donc  $F(x,t_1) - F(x,t_0)$  est une fonction de classe  $C^1$  de x ce qui permet d'écrire :

$$F(x_1, t_1) - F(x_1, t_0) - F(x_0, t_1) + F(x_0, t_0) = \int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(x, t_1) - \frac{\partial}{\partial x} F(x, t_0)\right) dx$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} g(x, t) dt dx$$

On a par le théorème de la section précédente :

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{t_0}^{t_1} g(x,t)dtdx = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} g(x,t)dxdt$$

Donc nous pouvons affirmer que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} g(x, t) dx \right) dt = F(x_1, t_1) - F(x_0, t_1) - F(x_1, t_0) + F(x_0, t_0)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial t} (F(x_1, t) - F(x_0, t)) dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) dx \right) dt$$

Ces derniers calculs sont justifiés en invoquant la continuité de la fonction  $k(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F(x,t)$  exactement comme dans le paragraphe antérieur nous avions utilisé la continuité de g(x,t).

L'on a donc pour tout  $t_0, t_1, x_0, x_1$ :

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} g(x, t) dx \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{x_0}^{x_1} k(x, t) dx \right) dt$$

En dérivant par rapport à  $t_1$  on obtient (puisque pour  $x_0$  et  $x_1$  fixés  $\int_{x_0}^{x_1} g(x,t) dx$  et  $\int_{x_0}^{x_1} k(x,t) dx$  sont des fonctions continues de t):

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x, t_1) dx = \int_{x_0}^{x_1} k(x, t_1) dx$$

puis en dérivant par rapport à  $x_1$ :

$$g(x_1, t_1) = k(x_1, t_1)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : lorsque l'on mène des calculs avec des dérivées partielles et que l'on fait des substitutions dans les variables, même très simples, il est très facile de s'embrouiller complètement avec les notations en  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial y}, \dots$  D'où l'intérêt, comme dans la preuve ci-dessus, d'introduire une nouvelle notation, comme g ou k au lieu de  $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} F$  ou  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F$ . Une bonne méthode est de numéroter les variables et d'indiquer les dérivées partielles par des indices correspondant aux numéros :

$$F_{1}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) \qquad F_{2}(x,t) = \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)$$

$$F_{11} = \frac{\partial^{2} F}{\partial x^{2}} \quad F_{12} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) \quad F_{21} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \quad F_{22} = \frac{\partial^{2} F}{\partial t^{2}}$$

On utilise parfois des écritures telles que  $F_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F$  ( $F_{xt} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} F$ , ...) au lieu de  $F_{11}$ ,  $F_{12}$ , ... mais c'est dangereux si l'on substitue à x dans F(x,t) des choses comme 1-x, ou t-x ou  $x^2$ , ... très rapidement on peut gravement s'embrouiller. Aussi il est toujours plus prudent d'écrire  $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$  à la place de  $\frac{\partial}{\partial x}F(x,t)$  (car  $\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)$  représente correctement : calculer la première dérivée partielle, puis évaluer au point (x,t)).

On peut aussi incorporer à la notation elle-même la commutativité des opérateurs de dérivée partielle  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$  en utilisant des multi-exposants :  $\partial^{(n_1,\dots,n_p)} = (\partial_1)^{n_1} \cdots (\partial_p)^{n_p}$ ,  $F^{(n_1,\dots,n_p)} = \partial^{(n_1,\dots,n_p)}F = \frac{\partial^{n_1+\dots+n_p}F}{\partial x_1^{n_1}\dots\partial x_p^{n_p}}$ . Par exemple :  $F^{(2,0)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}F$ ,  $F^{(1,3)} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t^3}F = \frac{\partial^3}{\partial t^3}\frac{\partial}{\partial x}F$ , etc... (donc  $F^{(1,3)} = F_{1222} = F_{2221} = F_{2122} = F_{2212}$ , ces identités étant valables si toutes les dérivées partielles de F jusqu'à l'ordre 4 existent et sont continues). Si pour le multi-exposant  $\underline{\mathbf{n}} = (n_1,\dots,n_p)$  on pose  $\underline{\mathbf{n}}! = n_1!\dots n_p!$  la formule de Taylor en plusieurs variables prend une forme simple. Voir le Cours de Calcul Différentiel.

# Université Lille 1 — UFR de Mathématiques Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

### TROISIÈME CHAPITRE

### 16 Singularités isolées, Pôles

La fonction  $\sin(z)$  a un zéro de multiplicité 1 en 0 : le premier terme non nul de sa série de Taylor en 0 est z. On peut donc considérer :

$$g(z) = \frac{\sin(z)}{z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

qui est aussi une fonction entière. Comme  $g(0) \neq 0$  la fonction  $\frac{1}{g}$  est holomorphe en zéro. Elle est même holomorphe sur le disque  $D(0,\pi)$  puisque g ne s'annule pas dans ce disque. Il y a donc un développement de rayon de convergence au moins  $\pi$ :

$$|z| < \pi \implies \frac{1}{g(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} z^{2k}$$

On a utilisé le fait que g, donc aussi 1/g, sont paires, donc seuls des exposants pairs apparaissent, et aussi que le premier terme est 1 puisque 1/g(0) = 1. Il n'y a pas de formule pour les  $d_{2k}$  aussi simple à exprimer que pour les séries usuelles sin, cos, log, etc..., c'est pour cela que j'utilise la notation  $d_{2k}$ . Vous imaginerez sans peine que l'on peut les étudier de près, donner des valeurs approchées lorsque  $k \to +\infty$ , par exemple. Vous avez probablement, dès la première année, calculé les premiers comme exercice dans le cadre du cours sur les développements limités : en effet la série entière convergente  $\frac{z}{\sin(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} d_{2k} z^{2k}$  donne pour z = x réel des développements limités à tous les ordres que l'on peut aussi (unicité des coefficients) obtenir par les techniques de première année

pour les développements limités. Le plus efficace en effet pour obtenir les trois ou quatre premiers coefficients sera ici de procéder à la « division suivant les puissances croissantes » de 1 par  $1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \frac{1}{5040}z^6 + \dots$  Cela donne :

$$\frac{z}{\sin(z)} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \frac{31}{15120}z^6 + \frac{127}{604800}z^8 + \frac{73}{3421440}z^{10} + \dots$$

Bon j'avoue, j'ai utilisé un logiciel de calcul formel pour trouver les coefficients, mais quelques secondes à la main  $(-\frac{1}{120} + \frac{1}{36} = \frac{7}{360})$ , et  $\frac{1}{5040} - 2\frac{1}{6}\frac{1}{120} + (\frac{1}{6})^3 = \dots)$  auraient suffi pour déterminer les termes jusqu'à l'ordre 4, voire 6, inclus. Même sans disposer de formule explicite pour les coefficients <sup>64</sup> nous avons déjà pu affirmer que le rayon de convergence de la série entière était au moins  $\pi$ . En fait il est même exactement  $\pi$ , car si il était strictement supérieur la limite  $\lim_{x\to\pi}\frac{x}{\sin(x)}$  serait finie (égale à  $1+\sum_{k=1}^{\infty}d_{2k}\pi^{2k}$ ), or elle vaut  $+\infty$ .

Sur cette base nous obtenons dans le disque épointé  $D^*(0,\pi) = D(0,\pi) \setminus \{0\}$  une série entière pour la fonction  $\frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$ :

$$\frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z} = \left(\frac{z}{\sin(z)} - 1\right) \frac{1}{z} = \frac{1}{6}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \frac{127}{604800}z^7 + \dots$$

Le rayon de convergence est encore  $\pi$  car (exercice!) lorsque l'on a une série  $\sum e_j z^j$  dont on ne conserve que les termes d'ordre  $\geq J$  et que l'on divise par  $z^J$  (ce qui donne  $\sum_{k=0}^{\infty} e_{J+k} z^k$ ) la nouvelle série a exactement le même rayon de convergence. À propos on constate ici que l'on n'a que des exposants impairs, ce qui est bien, puisque la fonction  $k(z) = \frac{1}{\sin(z)} - \frac{1}{z}$  est impaire.

Le point z=0 pour la fonction  $k(z)=\frac{1}{\sin(z)}-\frac{1}{z}$  est, a priori, une **singularité**. Mais comme nous venons de le voir, il s'agit d'une **fausse singularité** puisque qu'en posant k(0)=0 on voit que k, comme somme d'une série entière convergente, est analytique sur  $D(0,\pi)$ . Il y a un théorème utile sur les fausses singularités :

**Théorème 35 (Riemann)** Soit k une fonction holomorphe sur un ouvert épointé  $U \setminus \{a\}$ . Si la fonction k est bornée dans un voisinage de a alors elle n'a en z = a qu'une fausse singularité (ou « singularité effaceable ») : la limite  $L = \lim_{z \to a} k(z)$  existe et en posant k(a) = L la fonction k est holomorphe sur U (y-compris en a).

<sup>64.</sup> il semble qu'ils soient tous positifs; est-ce exact? pouvez-vous le prouver?

Preuve : posons  $g(z) = (z-a)^2 k(z)$  pour  $z \neq a$  et g(a) = 0. Il est clair que  $\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = (z-a)k(z) \to_{z\to a} 0$  puisque k est bornée dans un voisinage de a. Donc g est dérivable au sens complexe en z=a, avec d'ailleurs g'(a)=0. Bien sûr g est dérivable au sens complexe en tout  $z \neq a$ , donc g est holomorphe sur U, y-compris en a. Elle admet donc un développement en série  $g(a+h)=c_0+c_1h+c_2h^2+\ldots$  de rayon de convergence non nul. On a  $c_0=g(a)=0$  et  $c_1=g'(a)=0$ . Donc pour h non nul suffisamment petit  $h^2k(a+h)=c_2h^2+c_3h^3+\ldots$ , et ainsi  $k(a+h)=c_2+c_3h+c_4h^2+\ldots$ . Il en résulte que  $L=\lim_{h\to 0}k(a+h)$  existe (et vaut  $c_2$ ) et aussi qu'en étendant la fonction k par la définition k(a)=L, on obtient une fonction qui est analytique en a. Ceci complète la preuve.

On dira qu'une fonction f(z), analytique sur un ouvert épointé  $U \setminus \{a\}$ , présente en z = a un **pôle simple** si l'on peut trouver  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \neq 0$ , tel que  $f(z) - \frac{\alpha}{z-a}$  a en z = a une fausse singularité. Un seul  $\alpha$  peut convenir puisque  $\lim_{z\to a} \frac{1}{|z-a|} = \infty$ . Plus généralement :

**Définition 5** On dira qu'une fonction f, analytique sur un ouvert épointé  $U \setminus \{a\}$ , présente en z = a un **pôle d'ordre m** si l'on peut trouver  $m \ge 1$  et  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_m \ne 0$ , tels que

$$f(z) - \frac{\alpha_m}{(z-a)^m} - \dots - \frac{\alpha_1}{z-a}$$

présente en z = a une fausse singularité.

Je laisse en partie en exercice l'unicité de l'ordre m et des coefficients  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{C}$ . Pour l'ordre m l'unicité découlera du théorème suivant. La fraction rationnelle  $\sum_{j=1}^{j=m} \frac{\alpha_j}{(z-a)^j}$  est dite **partie principale** ou **partie singulière** de la fonction f en z=a.

**Théorème 36** Pour qu'une fonction f(z), analytique sur un ouvert épointé  $U \setminus \{a\}$ , présente en z = a un pôle il est nécessaire et suffisant que  $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$ . L'ordre m de a comme pôle de f est égal à la multiplicité de a comme zéro de  $\frac{1}{f}$ .

On remarquera que si  $\lim_{z\to a} |f(z)| = \infty$  il existe un disque épointé  $D^*(a,r)$  sur lequel f ne s'annule pas. La fonction  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$  définie sur  $D^*(a,r)$  a une fausse singularité en z=a, puisque  $\lim_{z\to a} g(z)=0$ . Comme g(a) doit être définie par  $g(a)=\lim_{z\to a} g(z)=0$ 

c'est que g(a)=0. La fonction g ne s'annule dans le disque D(a,r) qu'au point a, donc elle n'est pas identiquement nulle, et a a une certaine multiplicité m finie comme zéro de g c'est-à-dire, avec une certaine constante  $c\neq 0$  et des coefficients  $e_j\in \mathbb{C}$ :

$$g(a+h) = c \cdot h^m \cdot (1 + e_1h + e_2h^2 + \dots)$$

La série entière

$$1 + f_1 h + f_2 h^2 + \dots = \frac{1}{1 + e_1 h + e_2 h^2 + \dots}$$

aura elle aussi un rayon de convergence au moins égal à r. On écrit alors pour 0 < |h| < r:

$$f(a+h) = \frac{1}{g(a+h)} = \frac{1}{c} \cdot h^{-m} \cdot \left(1 + f_1 h + f_2 h^2 + \dots\right)$$
$$= \frac{c^{-1}}{h^m} + \frac{c^{-1} f_1}{h^{m-1}} + \dots + \frac{c^{-1} f_{m-1}}{h} + c^{-1} f_m + c^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} f_{m+k} h^k,$$

et cela montre que f possède en a un pôle d'ordre m au sens de la définition donnée plus haut.

Réciproquement si l'on peut trouver  $m \geq 1$  et  $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}, \ \alpha_m \neq 0$ , tels que

$$f(z) - \frac{\alpha_m}{(z-a)^m} - \dots - \frac{\alpha_1}{z-a}$$

présente en z=a une fausse singularité alors c'est qu'il existe R>0 et une série entière  $\sum_{k\geq 0} a_k h^k$  telle que pour 0<|h|< R on a :

$$f(a+h) = \frac{\alpha_m}{h^m} + \dots + \frac{\alpha_1}{h} + a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots$$

La fonction holomorphe  $g(a+h)=\alpha_m+\alpha_{m-1}h+\cdots+\alpha_1h^{m-1}+a_0h^m+a_1h^{m+1}+\ldots$  vérifie  $\lim_{z\to a}g(z)=\alpha_m\neq 0$ , donc, pour |h| suffisamment petit on a  $|g(a+h)|\geq \frac{1}{2}|\alpha_m|$  ce qui implique  $|f(a+h)|\geq \frac{|\alpha_m|}{2|h|^m}$  et ainsi  $\lim_{z\to a}|f(z)|=\infty$ . Le théorème est établi.

Un petit mot de terminologie : lorsqu'une fonction f est analytique sur un disque épointé  $D^*(a,r)=D(a,r)\setminus\{a\}\ (r>0)$  on dit qu'elle présente en a une **singularité isolée**. Nous avons vu que si |f| est bornée dans un voisinage de a, la singularité n'est qu'apparente, elle peut être effacée en définissant convenablement f(a), et que lorsque  $|f|\to\infty$  pour  $z\to a$  on a une singularité polaire, avec un ordre  $m\geq 1$  et une partie singulière  $\frac{\alpha_m}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{\alpha_1}{z-a}$  uniquement déterminés. Il est alors aisé de donner un exemple d'une fonction avec une singularité isolée qui n'est pas un pôle : prenons  $f(z)=\sin(\frac{1}{z})$  et a=0. Avec  $z_n=\frac{1}{\pi n}$  on

a  $f(z_n)=0$  et  $z_n\to 0$ . Donc la singularité ne peut pas être effacée puisque 0 serait un point d'accumulation de zéros, et donc f devrait être identiquement nulle. Ce n'est pas non plus une singularité polaire puisque  $\lim |f|=\infty$  est impossible à cause des  $z_n$ . On dit que l'on a une **singularité essentielle**. Si la fonction  $\exp(\frac{1}{z})$  présentait en z=0 une fausse singularité ou un pôle il en irait de même pour  $\sin(\frac{1}{z})=(\exp(\frac{i}{z})-\exp(-\frac{i}{z}))/2i$ , donc la fonction  $\exp(\frac{1}{z})$  est un autre exemple présentant en z=0 une singularité essentielle.

Nous ajouterons quelques précisions en une autre occasion mais résumons déjà ce que nous avons appris : une singularité isolée d'une fonction holomorphe f en z=a peut être de trois types :  $^{65}$ 

- 1. la fausse singularité : c'est le cas lorsque |f| est bornée dans un voisinage de a (par le théorème de Riemann f peut alors être prolongée par continuité en a et est en fait alors holomorphe y-compris en a),
- 2. la singularité polaire; c'est le cas lorsque |f| tend vers  $+\infty$  en a,
- 3. la singularité essentielle : |f(z)| n'est pas borné mais ne tend pas non plus vers  $+\infty$  lorsque z tend vers a.

Comme exemple type de formation d'une fonction avec un pôle considérons le quotient  $k(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  de deux fonctions holomorphes. Si a n'est pas un zéro de g alors  $\frac{f}{g}$  est holomorphe en a. Si a est un zéro de multiplicité m de g alors la situation dépend aussi de sa multiplicité n comme zéro de f:  $^{66}$  on aura  $k(z) \sim_{z \to a} \alpha(z-a)^{n-m}$  pour un certain  $\alpha \neq 0$ , donc si  $n \geq m$  on a une fausse singularité (en fait un zéro d'ordre n-m), et si n < m on a un pôle d'ordre m-n.

Signalons également que si  $f_1$  et  $f_2$  ont en a des pôles d'ordres  $n_1$  et  $n_2$  alors  $f_1f_2$  aura un pôle d'ordre  $n_1 + n_2$ . En ce qui concerne la somme  $f_1 + f_2$  (ou toute autre combinaison linéaire à coefficients non nuls) si  $n_1 \neq n_2$  elle aura un pôle d'ordre  $\max(n_1, n_2)$ , mais si  $n_1 = n_2$  elle peut aussi n'avoir qu'une fausse singularité en a ou encore un pôle d'ordre inférieur à  $n_1$ .

<sup>65.</sup> la considération de fonctions telles  $\log(z)$  ou  $z^a$  ( $a \notin \mathbf{Z}$ ) élargit le champ des singularités possibles, mais ces fonctions sont « multi-valuées », elles changent lorsqu'on les prolonge de proche en proche en faisant un tour complet de l'origine. L'origine z=0 n'est donc pas une singularité isolée pour ces fonctions au sens de notre définition précédente.

<sup>66.</sup> rappelons que par convention n=0 si  $f(a)\neq 0$ . Évidemment on a exclu le cas  $f\equiv 0$ .

Pour en terminer provisoirement, signalons le cas intéressant du quotient  $\frac{f'}{f}$ , aussi appelé « dérivée logarithmique » de f. Si  $f(a) \neq 0$  alors  $\frac{f'}{f}$  est régulière  $^{67}$  en a. Si f(a) = 0 et a est de multiplicité m comme zéro de f, alors a est de multiplicité m-1 comme zéro de f' et donc est un pôle simple de  $\frac{f'}{f}$ : la dérivée logarithmique d'une fonction f holomorphe sur un ouvert U n'a dans U que des singularités isolées (ce sont les zéros de f) et ce sont des pôles simples. Il est remarquable par ailleurs que si f présente un pôle d'ordre n en a alors f' a en a un pôle d'ordre n+1 (exercice!) donc dans ce cas aussi  $\frac{f'}{f}$  a un pôle simple en z=a. Ainsi : les points où f est régulière et non nulle sont des points réguliers de  $\frac{f'}{f}$  tandis que les zéros et les pôles de f donnent des pôles simples de f. De plus je signale que si f a une singularité essentielle en f0 alors f1 peut avoir un pôle (exemple : f2) = exp(f2) ou une singularité essentielle (exemple : f3). Par contre elle ne peut ni être régulière, ni avoir un pôle simple en f4. La démonstration en sera demandée dans une feuille de travail (bon, en réalité, disons que je laisse la démonstration aux gens très motivés).

**Définition 6** Soit U un ouvert. Une fonction f méromorphe sur U est la donnée d'un sous-ensemble  $A \subset U$  qui n'a pas de point d'accumulation dans U <sup>68</sup> et d'une fonction f holomorphe sur  $U \setminus A$  qui a un pôle en chaque élément de A.

Autrement dit une fonction méromorphe sur un ouvert est une fonction holomorphe, sauf qu'elle a le droit d'avoir des singularités isolées qui doivent être des pôles. On démontre que toute fonction méromorphe est de la forme  $\frac{f}{g}$  avec f et g holomorphes, mais ce n'est pas facile (corollaire de théorèmes de Weierstrass et/ou Mittag-Leffler).

<sup>67.</sup> l'expression « régulière en a » est synonyme de « holomorphe en a ».

<sup>68.</sup> vous demanderez à votre Professeur(e) de Topologie de vous demander de montrer que cela équivaut à demander que A soit fermé dans U et discret (chaque point de A est isolé dans A); et aussi que tout tel A est dénombrable (vide, fini, ou infini).

### 17 De la Série Binomiale à la fonction Gamma (I)

Dans le reste de ce chapitre nous allons laisser un peu de côté la théorie générale des fonctions holomorphes. Revenons à la série de Newton :

$$(1+h)^a = 1 + ah + \frac{a(a-1)}{2}h^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}h^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}h^n$$

Avec le symbole de Pochhammer  $(a)_n = \prod_{0 \leq j < n} (a+j),^{69}$  elle s'écrit

$$(1+h)^{a} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{(-a)_{n}}{n!} h^{n}$$

Nous étudierons donc, par commodité, plutôt :

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$$

Si -a est un entier naturel, cette série est un polynôme. Sinon les coefficients sont tous non nuls et le rayon de convergence est 1. Nous posons la question : pour quels h de module 1 la série est-elle convergente? et quand est-elle absolument convergente?

Notons  $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$ . Pour répondre à ces questions nous avons besoin de comprendre le comportement de  $d_n$  lorsque  $n \to \infty$ . Comme  $d_n$  dépend de a on le notera aussi parfois  $d_n(a)$ . Nous allons étudier cette question pour a complexe quelconque. Dans les sections qui suivent nous allons établir le théorème suivant :

Théorème 37 Pour tout a complexe la limite

$$L(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{(a)_n/n!}{n^{a-1}} = \lim \frac{d_n(a)}{n^{a-1}}$$

existe. Cette limite est atteinte uniformément par rapport à a sur tout disque D(0,R),  $R < \infty$ . La fonction limite est donc une fonction entière de  $a \in \mathbb{C}$ . Ses seuls zéros sont en a = 0, a = -1, a = -2, ... et ce sont des zéros simples. To La fonction  $\Gamma(a) = \frac{1}{L(a)}$  est donc une fonction méromorphe sur  $\mathbb{C}$ , dont les pôles sont tous simples et sont situés aux entiers négatifs. La fonction  $\Gamma$  vérifie :

$$\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N}) \qquad \Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \ n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}$$
$$\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N}) \qquad \Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

<sup>69.</sup>  $(a)_0 = 1$ ,  $(a)_1 = a$ ,  $(a)_2 = a(a+1)$ , etc....

<sup>70.</sup> un zéro « simple » est un zéro de multiplicité 1.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \ge 1$ , on a  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Pour  $x \to 0$  on a  $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ .

La fonction  $\Gamma$  a été inventée par Euler <sup>71</sup>, la notation par la lettre Gamma ayant été introduite un peu plus tard, je crois, par Legendre : Euler, lui, utilisait plutôt  $\Pi(a) =$  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$  qui vérifie  $\Pi(n) = n!$  et qui a ses pôles en  $-1, -2, -3, \ldots$  Ceux de la fonction Gamma sont en  $0, -1, -2, \ldots$  La formule du théorème donnant  $\Gamma$  comme limite est dite « formule de Gauss » : évidemment elle était connue d'Euler. Je vous laisse en exercice (facile) l'équivalence avec le produit infini $^{72}$  donné par Euler :

$$\Pi(a) = a\Gamma(a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^a}{1 + \frac{a}{k}}$$

Un autre produit infini (que nous n'étudierons pas dans ce chapitre) a été pris comme point de départ au dix-neuvième siècle par Weierstrass : évidemment la formule de Weierstrass<sup>73</sup> était bien connue d'Euler. Il se trouve, pour diverses raisons, que c'est la fonction méromorphe  $\Gamma$  que l'on utilise habituellement, et non pas son inverse L qui a pourtant l'avantage d'être une fonction entière. La raison la plus simple est sans doute à trouver dans les formules  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , et  $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ . De toute façon maintenant cette habitude est ancrée de manière indélébile chez les mathématiciens mais il y a parfois intérèt à ne pas oublier que  $\frac{1}{\Gamma}$  est intéressante, aussi. Le bilan des courses depuis son invention au dix-huitième siècle par Euler est que cette fonction Gamma est (quasi)-aussi importante en Analyse que les fonctions exponentielle, logarithme, sinus et cosinus.

<sup>71.</sup> Leonhard Euler, 1707-1783. Sans doute le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. On n'a pas fini d'éditer ses Œuvres complètes (72 volumes). L'académie de St-Petersbourg continuait à publier cinquante ans après sa mort les manuscrits qu'il avait dictés de son vivant. Devenu presque complètement aveugle à l'âge de 59 ans, il a produit dans les vingt années qui suivirent près de la moitié de son Œuvre, des assistants prenant des notes sous sa dictée. Il fut le premier à considérer sin et cos comme des fonctions, et pas seulement géométriquement comme des cordes d'un arc de cercle. A introduit la notation f(x) pour une fonction f d'une variable x, la notation e pour... e, la notation  $\Sigma$  pour les sommations, la notation i pour  $\sqrt{-1}$ , a découvert le lien entre sin, cos, exp, a développé la théorie du logarithme complexe, a inventé les fonctions Gamma et Beta, la sommation d'Euler-MacLaurin, ..., pour ne citer que les choses les plus directement liées à notre cours élémentaire. Il fut le premier à représenter une fonction algébrique par une série de Fourier (70 ans avant Fourier). Continuateur et approfondisseur de Newton et Leibniz, dont il fit une sorte de synthèse, il a contribué de manière majeure à tous les domaines de la Physique et de la Mathématique de son temps.

<sup>72.</sup> pour le moment tout ce que nous avons à savoir sur la notion de produit infini  $\prod_{k=1}^{\infty} c_k$  c'est que sa définition est  $\prod_{k=1}^{\infty} c_k = \lim_{K \to \infty} c_1 c_2 \dots c_K$  si cette limite existe. 73.  $\Gamma(a)^{-1} = ae^{\gamma a} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{a}{n})e^{-a/n}$  avec  $\gamma = \lim(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n) = 0.577\dots$ 

# 18 Formule des Compléments, Produit infini pour sinus, Nombres de Bernoulli

Avant d'aborder dans la prochaine section la démonstration nécessaire de l'équivalent asymptotique  $\frac{(a)_n}{n!} \sim \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$  et de l'holomorphie de la fonction Gamma, puis de revenir au problème de la convergence sur le cercle |h|=1 de la série binomiale, je ne peux pas m'empêcher d'évoquer dès maintenant la superbe **formule des compléments** (évidemment, due à Euler) :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

A posteriori, on n'a pas à être surpris :  $f(a) = L(a)L(1-a) = 1/\Gamma(a)\Gamma(1-a)$  est une fonction entière dont les zéros sont les entiers  $a \in \mathbf{Z}$ , exactement comme  $\sin(\pi a)$ . De plus  $f(a+1) = L(a+1)L(-a) = L(a)\frac{1}{a}L(-a) = -L(a)L(1-a) = -f(a)$ , tout comme  $\sin(\pi a)$ . Enfin  $f(x) \sim_{x\to 0} x$  (car L(1) = 1), exactement comme  $\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$ . Donc on n'est pas surpris que les deux choses soient identiques, mais bien sûr il faudra une preuve rigoureuse : nous ne la donnerons que dans un autre chapitre. En attendant nous pouvons exploiter la formule  $a\Gamma(a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^a}{1+\frac{a}{k}}$  pour exprimer de manière équivalente la formule des compléments :

$$a\Gamma(a)(-a)\Gamma(-a) = a\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}$$
 et 
$$a\Gamma(a)(-a)\Gamma(-a) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^a}{1 + \frac{a}{k}} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-a}}{1 - \frac{a}{k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{a^2}{k^2}}$$

La formule des compléments est donc équivalente (on remplace  $\pi a$  par z) à :

$$\frac{z}{\sin(z)} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}}$$

ou encore au célèbre produit infini de Euler :

$$\forall z \in \mathbf{C}$$
  $\sin(z) = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2})$ 

Voyons comment Euler a rêvé cette extraordinaire formule : l'idée (fantastique!) est de traiter  $\sin(z)$  comme un polynôme, mais un polynôme qui aurait un degré infini (puisqu'il a un nombre infini de racines). Pour un polynôme P(z) de racines  $z_1, z_2, \ldots, z_N$ , on a  $P(z) = C(z - z_1) \cdots (z - z_N)$  avec une certaine constante non nulle C. Cela suggère :

$$\sin(z) = Cz \cdot (z-\pi)(z+\pi) \cdot (z-2\pi)(z+2\pi) \cdot (z-3\pi)(z+3\pi) \cdots$$

En divisant par z et en faisant z=0 on obtient une étrange formule

$$1 = C(-\pi^2)(-4\pi^2)(-9\pi^2)\cdots,$$

qui n'a aucun sens puisque le produit est en valeur absolue de plus en plus grand. Néanmoins, divisons la formule précédente (tout aussi absurde) par ce produit divergent, il vient :

$$\sin(z) = z \cdot (1 - \frac{z}{\pi})(1 + \frac{z}{\pi}) \cdot (1 - \frac{z}{2\pi})(1 + \frac{z}{2\pi}) \dots = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2})$$

Nous reviendrons plus tard sur la théorie générale des produits infinis, je ne veux pas trop m'attarder sur eux à ce stade. <sup>74</sup> Encore une remarque tout de même, reprenons la formule sous la forme :

$$\frac{z}{\sin z} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}}$$

On a envie d'écrire, mais ici encore il faudrait une discussion des produits infinis :

$$\frac{z}{\sin z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{k^2 \pi^2} + \frac{z^4}{k^4 \pi^4} + \frac{z^6}{k^6 \pi^6} + \dots\right) = 1 + \frac{z^2}{\pi^2} \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^2} + \frac{z^4}{\pi^4} \left(\sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^4} + \sum_{1 \le k < l} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2}\right) + \dots$$

que l'on peut comparer à

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \dots$$

Si tout pouvait être justifié, cela répondrait en tout cas à notre question sur la positivité des coefficients de la série pour  $\frac{z}{\sin z}$ ! Mieux encore nous obtenons :

$$\sum_{k>1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Lorsqu'Euler a obtenu cette formule cela faisait une cinquantaine d'années que la question de sommer  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$  était ouverte dans les cercles savants de l'époque. Lui-même y avait déjà travaillé plusieurs années! Le lien ainsi découvert entre la somme  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$  et le nombre

<sup>74.</sup> si vous vous demandez si le résultat de factorisation de Euler marche pour toutes les fonctions entières, la réponse est oui et non. Non, car en général même si l'on peut former un produit infini comme Euler avec les zéros d'une fonction entière f(z), toute fonction  $\exp(g(z))f(z)$  a les mêmes zéros que f; donc, pour en revenir à sin la connaissance de ses zéros permet a priori uniquement d'affirmer l'existence d'une formule du type  $\sin(z) = e^{g(z)} z \prod_{k=1}^{\infty} (1-\frac{z^2}{k^2\pi^2})$ , il faut d'autres arguments pour montrer ensuite que  $g \equiv 0$ . Oui car Hadamard a déterminé pour quelle classe de fonctions on peut factoriser comme Euler a fait avec la fonction sinus. Oui encore grâce à un théorème de Weierstrass qui s'applique à toutes les fonctions entières, en utilisant des facteurs plus compliqués que  $(1-z/\rho)$ , tels que par exemple  $(1-z/\rho) \exp(z/\rho+z^2/2\rho^2)$ , pour les zéros  $\rho$  de f (Hadamard utilise aussi ces facteurs, mais de manière plus restreinte que Weierstrass, donc lorsque la fonction autorise de procéder comme Hadamard, le produit infini donne plus d'informations).

 $\pi$  lié au cercle via l'étude de la fonction sinus est, encore aujourd'hui, un assez fascinant sujet de méditation. <sup>75</sup> Il y a d'autres méthodes, mais la plus belle reste celle que je viens d'esquisser. Si nous avons confiance en cette méthodologie, alors c'est qu'aussi :

$$\frac{7\pi^4}{360} = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^4} + \sum_{1 \le k < l} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} = \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^4} + \sum_{1 \le k < l} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} + \sum_{1 \le l < k} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^4} + \sum_{k \ge 1, l \ge 1} \frac{1}{k^2} \frac{1}{l^2} \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k \ge 1} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{36} \right)$$

et donc:

$$\sum_{k>1} \frac{1}{k^4} = \frac{14\pi^4}{360} - \frac{10\pi^4}{360} = \frac{\pi^4}{90}$$

On peut imaginer obtenir ainsi  $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^6}$ ,  $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^8}$ , etc..., mais il est bien plus efficace pour cela de travailler avec, pour |z| petit : <sup>76</sup>

$$\log \frac{z}{\sin(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} -\log(1 - \frac{z^2}{k^2 \pi^2}) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{z^{2j}}{k^{2j} \pi^{2j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}}) \frac{z^{2j}}{\pi^{2j}}$$
$$\frac{d}{dz} \log \frac{z}{\sin(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\cos z}{\sin z} = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}}) z^{2j-1}$$

Ainsi:

$$\frac{\cos z}{\frac{\sin z}{z}} = 1 - 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^{2j}} (\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}}) z^{2j}$$

et il suffit de procéder à la division suivant les puissances croissantes de  $1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \dots$  par  $1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{120}z^4 - \dots$  pour obtenir les valeurs de  $\frac{1}{\pi^{2j}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2j}}$  qui sont donc des nombres rationnels. Mon logiciel de calcul formel me dit que :

$$\frac{z\cos(z)}{\sin(z)} = 1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 - \frac{2}{945}z^6 - \frac{1}{4725}z^8 - \frac{2}{93555}z^{10} - \dots,$$

ce qui donne

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \ \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \ \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}, \ \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450}, \ \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

Le suivant est un peu plus compliqué:

$$\sum_{k>1} \frac{1}{k^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}$$

<sup>75.</sup> fascination d'autant plus renforcée par d'autres très célèbres produits infinis de Euler :  $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-2}}$ ,  $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^3} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-3}}$ , etc..., les produits portant sur les **nombres premiers** 2, 3, 5, 7, 11, ... 76. vous l'aurez compris, nous sommes dans la section où l'on remet à une autre occasion les justifications nécessaires.

Toutes ces valeurs furent données par Euler vers 1735. Son résultat définitif, obtenu vers 1739 est le suivant :

Les **Nombres de Bernoulli** sont **définis** par le développement en série entière à l'origine :

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!} ,$$

soit  $B_0 = 1$ ,  $B_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_3 = 0$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_5 = 0$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ ,  $B_8 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_{10} = \frac{5}{66}$ ,  $B_{12} = -\frac{691}{2730}$ ,  $B_{14} = \frac{7}{6}$ ,  $B_{16} = -\frac{3617}{510}$ ,  $B_{18} = \frac{43867}{798}$ , .... <sup>77</sup> On les obtient en faisant la division suivant les puissances croissantes de 1 par  $1 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{24}t^3 + \ldots$ , ou encore par les relations de récurrence traduisant l'identité  $1 = (\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{(i+1)!})(\sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!})$ . Les nombres de Bernoulli d'indices impairs sont nuls, sauf  $B_1$ , car la fonction  $\frac{t}{e^t-1} + \frac{t}{2}$  est paire. <sup>78</sup> On peut en effet écrire :

$$\frac{t}{2} \frac{e^{t/2} + e^{-t/2}}{e^{t/2} - e^{-t/2}} = \frac{t}{2} \frac{e^t + 1}{e^t - 1} = \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} \qquad (\text{donc}, = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!} t^{2j}) .$$

En remplaçant t par 2iz cela donne :

$$z\frac{\cos z}{\sin z} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \frac{B_{2j} \, 2^{2j}}{(2j)!} z^{2j}$$

En comparant avec notre ancienne formule, nous obtenons les identités d'Euler :

$$\forall j \ge 1$$
  $\sum_{k>1} \frac{1}{k^{2j}} = \frac{2^{2j-1}(-1)^{j-1}B_{2j}}{(2j)!} \pi^{2j}$ 

Euler a essayé en vain de trouver des formules aussi explicites pour les sommes  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$ , mais ces quantités demeurent mystérieuses aujourd'hui encore. En 1978, Apéry a montré que  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$  était un nombre irrationnel. Plus récemment, en 2000, Rivoal a montré qu'il existait une infinité de j tels que  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$  est irrationnel. Mais (septembre 2005) on ne sait pas prouver aujourd'hui que  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$  est un nombre irrationnel. On conjecture que les nombres  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^{2j+1}}$  sont tous transcendants, et ne sont liés entre eux par aucune relation polynomiale à coefficients rationnels (ou même avec des puissances de  $\pi$ ). Mais (septembre 2005) on ne sait pas prouver aujourd'hui que  $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^3}$  est un nombre transcendant.

<sup>77.</sup> les Bernoulli et Euler se sont arrachés les cheveux à essayer de comprendre ces nombres, au comportement à la fois erratique et prévisible. Les identités d'Euler plus bas et la formule de Stirling (annexe) permettent de voir en tout cas  $|B_{2j}| \sim 2(2j)!(2\pi)^{-2j} \sim 4\sqrt{\pi j}(j/\pi e)^{2j}$ . On a donc  $|B_{2j+2}/B_{2j}| \sim (j/\pi)^2$ . 78. dans la littérature classique le  $j^{\text{ème}}$  nombre de Bernoulli est ce qui est noté ici  $(-1)^{j-1}B_{2j}$ . On s'est

<sup>78.</sup> dans la littérature classique le  $j^{\text{ème}}$  nombre de Bernoulli est ce qui est noté ici  $(-1)^{j-1}B_{2j}$ . On s'est depuis accordé pour la convention utilisée ici. Les nombres de Bernoulli apparaissent dans le problème de trouver pour les sommes de puissances  $1^j + 2^j + \cdots + n^j$  des formules analogues à  $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ .

### 19 De la Série Binomiale à la fonction Gamma (II)

Il est temps de faire l'étude de  $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$ . Nous supposerons (provisoirement)  $a \notin (-\mathbf{N})$  car alors  $\forall n \ d_n \neq 0$ . On a (pour  $n \geq 2$ ):

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{n+a}{n+1} = \frac{1+\frac{a}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{a-1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1+\frac{a-1}{n}(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\dots)$$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = 1 + \frac{a-1}{n} - \frac{a-1}{n^2} + \dots$$

Cela suggère de comparer  $d_n$  à  $e_n=n^{a-1}.$  En effet :

$$\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{a-1} = 1 + \frac{a-1}{n} + \frac{(a-1)(a-2)}{2n^2} + \dots$$

Donc en posant  $u_n = \frac{d_n}{e_n} = \frac{(a)_n}{n!n^{a-1}}$  on a un développement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \frac{a-1}{n} - \frac{a-1}{n^2} + \dots}{1 + \frac{a-1}{n} + \frac{(a-1)(a-2)}{2n^2} + \dots} = 1 - \frac{(a-1)a}{2n^2} + \dots$$

Comme nous allons le voir le fait d'avoir un premier terme en  $\frac{1}{n^2}$  plutôt qu'en  $\frac{1}{n}$  fait toute la différence car cela permet de prouver l'existence de la limite  $L=\lim u_n$  et aussi de contrôler la taille de  $\frac{u_n}{L}$  en l'écrivant sous la forme

$$\frac{u_n}{L} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \cdot \frac{u_{n+2}}{u_{n+3}} \cdot \dots$$

Revenons d'abord à la formule exacte pour  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (qui vaut  $\frac{d_{n+1}}{d_n}\frac{e_n}{e_{n+1}})$  :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+1} \frac{n^{a-1}}{(n+1)^{a-1}} = (1+\frac{a}{n})(1+\frac{1}{n})^{-a}$$

Pour une raison qui va apparaître dans une seconde, imposons  $n \ge 2|a| + 2$ . On a alors en tout cas  $\left|\frac{a}{n}\right| \le \frac{1}{2}$  (et aussi  $\left|\frac{1}{n}\right| \le \frac{1}{2}$  ...) et on peut écrire  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \exp(v_n)$  avec

$$v_n = \operatorname{Log}(1 + \frac{a}{n}) - a\operatorname{Log}(1 + \frac{1}{n})$$

Plutôt que d'utiliser la série de Log(1+h) il se trouve qu'il est plus simple de poser, pour  $|\epsilon| \le (2|a|+2)^{-1}$  (donc tel que  $|\epsilon| \le \frac{1}{2}$  et  $|\epsilon||a| \le \frac{1}{2}$ ):

$$f(\epsilon) = \text{Log}(1+a\epsilon) - a \log(1+\epsilon) = \int_{[0,\epsilon]} \left( \frac{a}{1+aw} - \frac{a}{1+w} \right) dw = \int_{[0,\epsilon]} \frac{a(1-a)w}{(1+aw)(1+w)} dw$$

LICENCE DE MATHÉMATIQUES (S5, TROISIÈME ANNÉE)

On en déduit (via  $|1 + aw| \ge \frac{1}{2}$ ,  $|1 + w| \ge \frac{1}{2}$ ):

$$|f(\epsilon)| \le |a(1-a)| 4 \int_0^{|\epsilon|} u du = 2|a(1-a)| |\epsilon|^2$$

En conclusion:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (1 + \frac{a}{n})(1 + \frac{1}{n})^{-a} = e^{v_n} \quad \text{avec, pour } n \ge 2|a| + 2, \quad |v_n| \le \frac{2|a(1-a)|}{n^2}$$

Tout étant mis en place, considérons maintenant R > 0, imposons à a de vérifier |a| < R, choisissons N le plus petit entier  $\geq 2R+2$  et considérons pour chaque  $n\geq N$  les fonctions holomorphes dans D(0,R):

$$v_n(a) = \operatorname{Log}(1 + \frac{a}{n}) - a\operatorname{Log}(1 + \frac{1}{n})$$

On n'impose plus à a de ne pas être dans  $-\mathbf{N}$ . Grâce à notre majoration de  $|v_n|$  nous savons que la série

$$R_N(a) = \sum_{n=N}^{\infty} v_n(a)$$

est normalement convergente. Elle définit donc une fonction holomorphe sur le disque D(0,R). On en déduit <sup>79</sup> que la limite

$$\lim_{m \to \infty} \frac{u_m(a)}{u_N(a)} = \lim_{m \to \infty} \frac{u_{N+1}(a)}{u_N(a)} \cdots \frac{u_m(a)}{u_{m-1}(a)} = \lim_{m \to \infty} e^{v_N(a) + \dots + v_{m-1}(a)} = e^{R_N(a)}$$

existe, et est une fonction holomorphe non-nulle sur D(0,R). Cela donne l'existence, pour tout  $a \in D(0,R)$ , de

$$\lim_{m \to \infty} u_m(a) = u_N(a)e^{R_N(a)}$$

et le fait qu'il s'agit d'une fonction holomorphe sur D(0,R) dont les zéros sont ceux de  $u_N(a)$ , c'est-à-dire les entiers négatifs dans D(0,R), et que ce sont des zéros de multiplicité un. Autrement dit  $\lim_{m\to\infty} \frac{(a)_m}{m!m^{a-1}} = u_N(a)e^{R_N(a)}$  existe. <sup>80</sup>

Comme R > 0 est arbitraire nous avons prouvé l'existence pour tout a complexe de  $L(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{(a)_n}{n! n^{a-1}}$ , nous avons établi que L est une fonction entière dont les seuls zéros sont aux entiers négatifs ou nul et qu'ils sont simples.

<sup>79.</sup> note :  $\frac{u_m(a)}{u_N(a)}$  est régulier aussi pour  $a \in (-\mathbf{N}) \cap D(0,R)$  si  $m \ge N$ . 80. la dépendance du terme de droite en N n'est qu'apparente puisque le terme de gauche ne fait pas

En posant  $\Gamma(a) = \frac{1}{L(a)}$  on a donc une fonction méromorphe dans le plan complexe dont les pôles sont simples et sont aux entiers négatifs ou nul. Pour  $a \notin (-\mathbf{N})$  on a l'équivalent asymptotique :

$$\frac{a.(a+1).\cdots.(a+n-1)}{1.2.\cdots.n} = \frac{(a)_n}{n!} \sim_{n\to\infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$$

On peut être plus précis. Fixons a et prenons  $n \ge 2(|a|+1)$ . D'après ce qui précède :

$$\frac{\Gamma(a)(a)_n}{n!n^{a-1}} = \frac{u_n}{L(a)} = \lim_{m \to \infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \cdots \frac{u_m}{u_{m+1}} = \lim_{m \to \infty} e^{-v_n(a) - \dots - v_m(a)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty} v_k(a)}$$

Nous pouvons donc écrire:

$$n \ge 2(|a|+1) \implies \frac{(a)_n}{n!} = \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}e^{r_n(a)}$$

avec  $r_n(a) = -\sum_{k=n}^{\infty} v_k(a)$ , donc (on utilise  $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n-1}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{n-1}$ ):

$$|r_n(a)| \le \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2|a(1-a)|}{k^2} \le \frac{2|a(1-a)|}{n-1} \le \frac{4|a||a-1|}{n}$$

Cela vaut la peine de récapituler tous nos efforts en un beau théorème :

Théorème 38 Le produit infini :

$$L(a) = a \prod_{k=1}^{\infty} (1 + \frac{a}{k}) \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-a}$$

converge pour tout nombre complexe  $a \in \mathbf{C}$  et définit une fonction entière sur  $\mathbf{C}$  dont les zéros sont simples et sont en  $a=0,-1,-2,\ldots$  La fonction méromorphe  $\Gamma(a)=\frac{1}{L(a)}$  est appelée fonction Gamma d'Euler. Elle est aussi donnée par la formule (dite « de Gauss »):

$$\forall a \in \mathbf{C} \setminus (-\mathbf{N})$$
  $\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \ n^{a-1}}{a(a+1) \cdots (a+n-1)} = \lim \frac{n! n^{a-1}}{(a)_n}$ 

Plus précisément, on a pour tout  $a \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$  et pour tout entier  $n \geq 2|a| + 2$ :

$$\frac{(a)_n}{n!} = \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{r_n} \qquad avec |r_n| \le \frac{4|a||a-1|}{n}$$

En particulier les coefficients de la série de Newton

$$(1-h)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$$

ont le comportement asymptotique

$$\frac{(a)_n}{n!} \sim_{n \to \infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)} .$$

Bon, peut-être dois-je encore justifier l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$
?

Il suffit d'utiliser la « formule de Gauss » pour voir que

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \lim \frac{n! \, n^a}{(a+1)\cdots(a+n)} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n! \, n^{a-1}} = \lim \frac{an}{a+n} = a$$

Il est commode de remarquer que  $\Gamma(a)a(a+1)\dots(a+n-1)=\Gamma(a+1)(a+1)\dots(a+n-1)=\Gamma(a+2)(a+2)\dots(a+n-1)=\cdots=\Gamma(a+n)$  :

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$$

En utilisant a=1 et  $\Gamma(1)=1$ , on voit que  $\Gamma(n+1)=n!$ . Notre équivalent asymptotique peut aussi s'écrire sous la forme :  $\Gamma(a+n)\sim_{n\to\infty}n!n^{a-1}=n^a(n-1)!$ . Comme  $\Gamma(n)=(n-1)!$ , cela donne :

$$\Gamma(a+n) \sim_{n\to\infty} n^a \Gamma(n)$$

sans doute la forme la plus commode à mémoriser. Cette forme nous incite aussi à rechercher une formule asymptotique pour  $\Gamma(n)=(n-1)!$ . C'est la fameuse formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$
 (donc  $\Gamma(n) \sim \sqrt{2\pi} n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$ )

Une démonstration de la formule de Stirling est proposée en annexe. Nous y reviendrons plus tard, en problèmes ou dans un autre chapitre, lorsque nous établirons la version complexe de la formule de Stirling, c'est-à-dire un équivalent asymptotique de  $\Gamma(s)$  pour les grandes valeurs de |s|, non seulement pour s entier, ou même réel, mais complexe. Mais le faire ici dès maintenant serait trop ambitieux.

## 20 Convergence de la Série Binomiale

L'équivalent  $\frac{(a)_n}{n!} \sim_{n \to \infty} \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)}$  nous permet de répondre à la question (posée pour  $a \notin (-\mathbf{N})$ ) de la convergence absolue de la série  $\sum \frac{(a)_n}{n!} h^n$  pour |h| = 1, c'est-à-dire de la convergence de  $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{(a)_n}{n!} \right|$ . Deux séries à termes positifs équivalents convergent ou divergent ensemble, donc il s'agit d'examiner  $\sum_{n \geq 0} \left| \frac{n^{a-1}}{\Gamma(a)} \right|$ , ou encore  $\sum_{n \geq 0} n^{\operatorname{Re}(a)-1}$ : il y a convergence pour  $\operatorname{Re}(a) < 0$  et divergence pour  $\operatorname{Re}(a) \geq 0$   $(a \neq 0)$ .

Dans le cas  $\operatorname{Re}(a) < 0$  la série  $\sum \frac{(a)_n}{n!} h^n$  est ainsi normalement convergente pour  $|h| \leq 1$ et sa somme est donc une fonction continue de h sur ce disque fermé. Comme pour |h| < 1on a la formule  $(1-h)^{-a} = e^{-a \log(1-h)}$ , la formule reste valable par continuité pour |h|=1. Pour h=1, il faut regarder d'un peu plus près ce que cela donne : pour déterminer  $\sum \frac{(a)_n}{n!}$  nous prenons la limite pour  $h \to 1$ , |h| < 1, de  $e^{-a \log(1-h)}$ . Nous contentant de 0 < h < 1, h réel donc, nous écrivons <sup>81</sup>  $|(1-h)^{-a}| = (1-h)^{-\mathrm{Re}(a)}$  qui a pour limite 0 lorsque  $h \to 1, 0 < h < 1$ , car -Re(a) > 0. Nous obtenons donc (et c'est valable aussi pour  $a = -1, -2, -3, \ldots$ :

$$\operatorname{Re}(a) < 0 \implies 0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} = 1 + a + \frac{a(a+1)}{2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{6} + \dots$$

Ce résultat est notable car il montre que les séries du type  $\sum_n c_n P_n(z)$  avec  $P_n$  un polynôme de degré  $n^{\,82}$  peuvent se comporter très différemment des séries de monômes  $\sum_n c_n z^n$  : ici la série donne identiquement 0 alors que les coefficients ne sont pas nuls. De plus son domaine de convergence absolue est un demi-plan (union un point) et non pas un disque.

Nous allons voir que pour  $Re(a) \geq 0$  non seulement la série ne converge pas absolument, elle ne converge pas du tout (sauf pour a=0) :

**Théorème 39** Soit  $a \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}$  est absolument convergente pour  $\operatorname{Re}(a) < a$ 0 et aussi pour a=0 : sa somme vaut 0 pour Re(a)<0 et 1 pour a=0. Pour les autres valeurs de a non seulement la série n'est pas absolument convergente, elle n'est pas convergente du tout.

Le cas Re(a) < 0 étant déjà traité et celui a = 0 étant trivial, il reste à examiner la situation pour  $Re(a) \ge 0$ ,  $a \ne 0$ . Il faut montrer que la série n'est pas convergente. Nous allons utiliser pour cela:

Théorème 40 (Abel) Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  une série convergente. On a :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ 0 < z < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

<sup>81.</sup> attention au module  $|z^w|$  d'une puissance complexe d'un nombre complexe : ce n'est certainement pas  $|z|^{|w|}$  en général et ce n'est  $|z|^{\text{Re}(w)}$  que lorsque z est réel positif. 82. ici donc,  $P_n(z) = z(z+1)\dots(z+n-1)$ .

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  est au moins 1 puisque  $\lim c_n = 0$  puisque  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  converge par hypothèse. Le théorème n'a d'intérêt que lorsque le rayon de convergence est exactement 1 (si il est > 1 il suffit d'invoquer la continuité dans le disque ouvert de convergence de la somme d'une série entière, qui résulte de la convergence normale dans tout sous-disque fermé borné de ce disque ouvert). Alors, Abel nous dit que la valeur de la somme pour z=1 est la limite des valeurs lorsque z tend vers 1 par valeurs réelles inférieures. La démonstration du théorème d'Abel (avec un énoncé plus complet) est proposée en annexe. On peut remplacer 1 par n'importe quel nombre complexe w de module 1 à condition de faire tendre z vers w le long du rayon allant de 0 à w (il suffit d'appliquer le théorème avec les coefficients  $c_n w^n$  au lieu des  $c_n$ ; l'hypothèse évidemment n'est plus la convergence de  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mais celle de  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ).

Nous appliquons ce théorème d'Abel à la série binomiale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$  qui vaut, pour |h| < 1,  $(1-h)^{-a}$ . Supposons Re(a) > 0. Pour 0 < h < 1 nous avons  $|(1-h)^{-a}| = (1-h)^{-\text{Re}(a)}$  qui tend vers  $+\infty$  pour  $h \to 1$ , donc par le théorème d'Abel la série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!}$  ne peut pas être convergente. <sup>83</sup>

Il reste la situation avec  $\operatorname{Re}(a)=0,\ a\neq 0$ . Écrivons a=it, avec  $t\neq 0$ . Alors, pour  $0< h<1,\ (1-h)^{-a}=(1-h)^{-it}$  n'a pas de limite lorsque  $h\to 1$  car en fait tous les nombres complexes de module 1 sont valeurs d'adhérence des  $(1-h)^{-it}$  pour  $h\to 1$ . Par exemple en prenant  $1-h_n=e^{-2\pi n/t}$  les  $(1-h_n)^{-it}$  valent tous 1 tandis que pour  $1-h_n'=e^{-2\pi (n+\frac{1}{2})/t}$  les  $(1-h_n')^{-it}$  valent tous -1. Le théorème 39 est établi.

Ayant ainsi réglé le cas h = 1, il reste les autres valeurs de h avec |h| = 1.

**Théorème 41** Soit  $a \in \mathbb{C}$  et |h| = 1,  $h \neq 1$ . La série  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$  est :

- 1. absolument convergente pour Re(a) < 0, et a = 0,
- 2. convergente mais pas absolument convergente pour  $0 \leq \text{Re}(a) < 1 \ (a \neq 0)$ ,
- 3. divergente pour  $Re(a) \ge 1$ .

Lorsqu'elle converge sa somme vaut  $(1-h)^{-a} = e^{-a \log(1-h)}$ .

<sup>83.</sup> lorsque a est réel, a > 0, la série est à termes positifs et on sait déjà qu'elle n'est pas (absolument) convergente. Mais pour a complexe, non réel, je ne vois pas d'argument qui soit beaucoup plus simple que celui utilisé ici. J'en vois bien d'autres, mais pas de nettement plus simples.

Nous avons déjà traité le cas  $\operatorname{Re}(a) < 0$  et le cas a = 0 est trivial. Nous savons aussi déjà que la série n'est pas absolument convergente pour  $0 \le \operatorname{Re}(a)$  ( $a \ne 0$ ), car son terme général est équivalent en valeur absolue à  $\frac{1}{|\Gamma(a)|}n^{\operatorname{Re}(a)-1}$ . Il ne tend donc pas vers zéro pour  $1 \le \operatorname{Re}(a)$ , et la série est nécessairement divergente pour ces valeurs de a. Il reste à montrer que la série est convergente pour  $0 \le \operatorname{Re}(a) < 1$ . Que la valeur de sa somme soit  $(1-h)^{-a} = e^{-a\operatorname{Log}(1-h)}$  sera alors assuré par le théorème d'Abel en prenant la limite pour  $h' \to h$ , h' = th, 0 < t < 1,  $t \to 1$ .

Supposons donc  $0 \le \text{Re}(a) < 1$  (et  $a \ne 0$ ). Posons  $d_n = \frac{(a)_n}{n!}$ ,  $w_n = h^n$ . Les sommes partielles  $w_0 + w_1 + \cdots + w_N$  sont bornées, car

$$|w_0 + w_1 + \dots + w_N| = |1 + h + \dots + h^N| = \left| \frac{1 - h^{N+1}}{1 - h} \right| \le \frac{2}{|1 - h|}.$$

Par ailleurs

$$d_{n+1} - d_n = (\frac{n+a}{n+1} - 1)d_n = \frac{(a-1)d_n}{n+1}$$
.

On sait que  $|d_n|$  est à une constante multiplicative près équivalent à  $n^{\text{Re}(a)-1}$ . Comme Re(a) < 1 on a donc  $\lim d_n = 0$ , et aussi  $|d_n - d_{n+1}|$  est équivalent à une constante multiplicative près à  $n^{\text{Re}(a)-2}$  pour  $n \to \infty$  donc la série de terme général  $d_n - d_{n+1}$  est absolument convergente. Par le critère d'Abel-Dirichlet la série  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} h^n$  est donc une série convergente. La démonstration du critère d'Abel-Dirichlet est donnée en annexe.

## 21 Les intégrales Euleriennes

Reprenons la formule :

$$\Gamma(a) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! \ n^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} = \lim_{N \to \infty} N^a \frac{N!}{a(a+1)\cdots(a+N)}$$

Considérons la décomposition en élément simples :

$$\frac{1}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \frac{c_0}{a} + \frac{c_1}{a+1} + \dots + \frac{c_N}{a+N}$$

Il est aisé de voir (en multipliant par a+j puis en posant a=-j) que  $c_0=\frac{1}{N!}, c_1=\frac{-1}{(N-1)!}, c_2=\frac{+1}{2!(N-2)!}, \ldots, c_j=\frac{(-1)^j}{j!(N-j)!}, \ldots, c_N=\frac{(-1)^N}{N!}, \text{ donc } c_j=(-1)^j\binom{N}{j}\frac{1}{N!} \text{ pour } 0 \leq j \leq N.$ 

Supposons dorénavant Re(a) > 0, et utilisons les intégrales

$$\frac{1}{a} = \int_0^1 t^{a-1} dt, \quad \frac{1}{a+j} = \int_0^1 t^{a-1} t^j dt$$

On obtient:

$$\frac{1}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \frac{1}{N!} \int_0^1 t^{a-1} \sum_{0 \le j \le N} \binom{N}{j} (-t)^j dt = \frac{1}{N!} \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^N dt$$

$$\text{donc}: \quad \text{Re}(a) > 0 \implies \quad \frac{N!}{a(a+1)\cdots(a+N)} = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^N dt ,$$

$$\text{et}: \quad \text{Re}(a) > 0 \implies \quad \Gamma(a) = \lim_{N \to \infty} N^a \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^N dt$$

Nous pourrions de suite étudier cette limite, mais avant cela introduisons l'intégrale suivante, symétrique en a et b:  $^{84}$ 

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

Cette intégrale est dite **première intégrale Eulerienne**, elle est absolument convergente pour  $\operatorname{Re}(a)>0$ ,  $\operatorname{Re}(b)>0$ . Montrons qu'elle est pour b fixé une fonction holomorphe de a. Pour cela nous pouvons définir  $B_n(a,b)=\int_{1/n}^{1-1/n}t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ . Pour  $a\in\mathbf{C}$  et  $\frac{1}{n}\leq t\leq 1-\frac{1}{n}$  la fonction  $g(t,a)=t^{a-1}(1-t)^{b-1}=\exp((a-1)\log(t))(1-t)^{b-1}$  est continue en le couple (t,a) et aussi pour chaque t fixé holomorphe en a. Donc, par un théorème du chapitre précédent sur les intégrales à paramètre complexe,  $B_n(a,b)$  est une fonction entière de a. Soit  $\epsilon>0$ . Pour  $\operatorname{Re}(a)>\epsilon$  on a  $|B(a,b)-B_n(a,b)|\leq (\int_0^{1/n}+\int_{1-1/n}^1)t^{\epsilon-1}(1-t)^{\operatorname{Re}(b)-1}dt$  qui tend vers 0 pour  $n\to\infty$  et est indépendant de a. Donc il y a convergence uniforme et par le théorème sur les limites uniformes de fonctions holomorphes, la fonction limite B(a,b) est holomorphe pour  $\operatorname{Re}(a)>\epsilon$ . Comme  $\epsilon>0$  est arbitraire B(a,b) est holomorphe en a pour  $\operatorname{Re}(a)>0$ . De même pour tout a fixé dans ce demi-plan B(a,b) est une fonction holomorphe de b vérifiant  $\operatorname{Re}(b)>0$ . La fonction B s'appelle **fonction Bêta d'Euler**.

Compte tenu de la façon dont nous avons été amené à elle, on ne sera pas surpris d'apprendre que la fonction Bêta est intimement liée à la fonction Gamma. L'une des égalités que nous avons obtenues s'écrit en effet :

$$B(a, N+1) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^N dt = \frac{N!}{(a)_{N+1}} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(N+1)}{\Gamma(a+N+1)}$$

<sup>84.</sup> B(a,b) = B(b,a) par le changement de variable  $t \to 1-t$ .

On s'attend donc à ce que : 85

$$\operatorname{Re}(a) > 0, \operatorname{Re}(b) > 0 \implies B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}$$

De plus on a obtenu :

$$\operatorname{Re}(a) > 0 \implies \Gamma(a) = \lim_{N \to \infty} N^a \int_0^1 (1 - t)^N t^{a - 1} dt = \lim_{N \to \infty} \int_0^N (1 - \frac{v}{N})^N v^{a - 1} dv$$

et si l'on pouvait passer à la limite  $N \to \infty$  en utilisant  $\forall v \lim_{N \to \infty} (1 - \frac{v}{N})^N = e^{-v}$  on obtiendrait :

$$\operatorname{Re}(a) > 0 \implies \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} dv$$

Cette formule intégrale pour  $\Gamma(a)$ ,  $\operatorname{Re}(a) > 0$ , est dite **deuxième intégrale Eulerienne**. Elle est parfois prise comme point de départ pour la construction de  $\Gamma$ .

Justifions le passage à la limite. Pour cela il est très utile de remarquer, pour  $0 \leq v < N$  :

$$(1 - \frac{v}{N})^N = e^{N\log(1 - \frac{v}{N})} = \exp\left(-v - \sum_{j \ge 2} \frac{v^j}{j N^{j-1}}\right)$$

Cela permet bien sûr de voir, comme nous le savons bien, que  $\lim_{N\to\infty} (1-\frac{v}{N})^N = e^{-v}$ , et donne aussi l'inégalité utile

$$0 \le v \le N \implies 0 \le (1 - \frac{v}{N})^N \le e^{-v}$$
,

et le fait que la suite  $N \to (1 - \frac{v}{N})^N$  est croissante (N > v), encore que nous ne ferons pas usage de cette dernière observation. Plutôt, nous remarquons :

$$0 \le v \le X < N \implies (1 - \frac{v}{N})^N \ge e^{-v} \exp\left(-\sum_{j \ge 2} \frac{X^j}{j N^{j-1}}\right) = e^{-v} \cdot e^X (1 - \frac{X}{N})^N$$

donc: 
$$0 \le v \le X < N \implies e^{-v} \ge (1 - \frac{v}{N})^N \ge e^{-v} \cdot e^X (1 - \frac{X}{N})^N$$
  
 $0 \le e^{-v} - (1 - \frac{v}{N})^N \le e^{-v} \cdot \left(1 - e^X (1 - \frac{X}{N})^N\right) \le 1 - e^X (1 - \frac{X}{N})^N$ 

La convergence de  $(1-\frac{v}{N})^N$  vers  $e^{-v}$  est donc uniforme sur tout intervalle [0,X] fixé. On peut donc en tout cas affirmer :

$$\forall X > 0 \quad \lim_{N \to \infty} \int_0^X (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} \, dv = \int_0^X e^{-v} v^{a-1} \, dv$$

<sup>85.</sup> cette formule nous donne d'ailleurs un prolongement méromorphe de B(a, b) comme fonction de  $a \in \mathbb{C}$ , pour chaque b fixé  $(b \notin (-\mathbf{N}))$ , et réciproquement.

Écrivons, pour X fixé, et N > X:

$$\begin{split} \left| \int_0^N (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} \, dv - \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} \, dv \right| \\ \leq \left| \int_0^X (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} \, dv - \int_0^X e^{-v} v^{a-1} \, dv \right| + \int_X^N (1 - \frac{v}{N})^N v^{\operatorname{Re}(a) - 1} \, dv \\ + \int_X^\infty e^{-v} v^{\operatorname{Re}(a) - 1} \, dv \\ \leq \left| \int_0^X (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} \, dv - \int_0^X e^{-v} v^{a-1} \, dv \right| + 2 \int_X^\infty e^{-v} v^{\operatorname{Re}(a) - 1} \, dv \end{split}$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Nous commençons par choisir X > 0 suffisamment grand de sorte que  $2 \int_X^\infty e^{-v} v^{\text{Re}(a)-1} dv \leq \frac{\epsilon}{2}$ , puis nous prenons  $N_0 > X$  de sorte que

$$\left| \int_0^X (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} \, dv - \int_0^X e^{-v} v^{a-1} \, dv \right| \le \frac{\epsilon}{2}$$

pour  $N \geq N_0$ . Alors, pour  $N \geq N_0$  on a  $\left| \int_0^N (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} dv - \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} dv \right| \leq \epsilon$ . Cela prouve  $\int_0^N (1 - \frac{v}{N})^N v^{a-1} dv \to \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} dv$  et donc la formule :

$$\operatorname{Re}(a) > 0 \implies \Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} dv$$
.

Revenons-en aux propriétés de  $B(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$ . On observe B(a,b)=B(b,a) par le changement de variable  $t\to 1-t$ . En écrivant 1=t+(1-t) on obtient

$$B(a,b) = B(a+1,b) + B(a,b+1)$$

De plus on trouve en intégrant par parties (justifier!) :

$$B(a+1,b) = -\int_0^1 t^a (\frac{(1-t)^b}{b})' dt = +\frac{a}{b} B(a,b+1)$$

Donc  $B(a,b) = \frac{a+b}{b}B(a,b+1)$  puis, en itérant, pour tout  $N \in \mathbf{N}$ :

$$B(a,b) = \frac{a+b}{b} \cdot B(a,b+1) = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a+b+1}{b+1} \cdot B(a,b+2) = \dots = \frac{(a+b)_N}{(b)_N} B(a,b+N)$$

Déterminons l'asymptotique pour a et b fixés de

$$B(a, b+N) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^N (1-t)^{b-1} dt$$

lorsque  $N \to \infty$ . Ce sont les t proches de 0 qui contribuent le plus à l'intégrale lorsque  $N \gg 1$ , donc on peut prévoir que le comportement asymptotique (principal) ne dépendra pas du

tout de b, et sera donc le même que pour b=1, à savoir  $B(a,b+N)\sim N^{-a}\int_0^\infty e^{-v}v^{a-1}\,dv$ . Le changement de variable v=Nt donne :

$$B(a,b+N) = N^{-a} \int_0^N (1 - \frac{v}{N})^N (1 - \frac{v}{N})^{b-1} v^{a-1} dv$$

Pour b=1 nous retombons sur le cas déjà traité. Nous devons aménager notre preuve à cause du terme additionnel  $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$ , qui tend vers 1 lorsque  $N\to\infty$  (sauf pour v=N, et en plus si  $0<\mathrm{Re}(b)<1$  ce terme est même divergent en v=N). Pour simplifier nous nous limiterons à  $\mathrm{Re}(b)\geq 1$ . En fait comme  $B(a,b+N)=\frac{a+b+N}{b+N}B(a,b+1+N)$ , le cas général  $\mathrm{Re}(b)>0$  s'y ramène. L'avantage de  $\mathrm{Re}(b)\geq 1$  c'est que l'on dispose de la majoration

$$|(1 - \frac{v}{N})^{b-1}| = (1 - \frac{v}{N})^{\operatorname{Re}(b) - 1} \le 1$$

qui jouera un rôle analogue à la majoration  $(1-\frac{v}{N})^N \leq e^{-v}$  dans la preuve donnée dans le cas b=1. Il nous suffit donc pour rédiger cette preuve (je vous laisse le faire, bon exercice pour vous), de disposer de la convergence uniforme de  $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$  vers sa limite 1, lorsque  $N\to\infty$ , pour v restreint à un intervalle [0,X] fixé. Pour obtenir cela de manière simple, posons  $\eta=\frac{v}{N},\ 0\leq \eta<1$ , et écrivons :

$$(1 - \frac{v}{N})^{b-1} = \frac{1}{1 - \eta} (1 - \eta)^b = \frac{1}{1 - \eta} \left( 1 - b \int_0^{\eta} (1 - u)^{b-1} du \right)$$

$$(1 - \frac{v}{N})^{b-1} - 1 = \frac{1}{1 - \eta} \left( \eta - b \int_0^{\eta} (1 - u)^{b-1} du \right)$$

$$\left| (1 - \frac{v}{N})^{b-1} - 1 \right| \le \frac{1}{1 - \eta} (\eta + |b|\eta) = (|b| + 1) \frac{\eta}{1 - \eta} = (|b| + 1) \frac{v}{N - v} ,$$

qui est majoré par (|b|+1)X/(N-X) pour  $N>X\geq v$  et donc on a bien la convergence uniforme de  $(1-\frac{v}{N})^{b-1}$  vers 1 sur l'intervalle [0,X]. <sup>86</sup>

En conclusion:

$$B(a, b + N) \sim_{N \to \infty} N^{-a} \int_0^\infty e^{-v} v^{a-1} dv$$

$$B(a, b) = \frac{(a+b)_N}{(b)_N} B(a, b+N) \sim_{N \to \infty} \frac{N! N^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} \frac{\Gamma(b)}{N! N^{b-1}} N^{-a} \Gamma(a) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

La formule prévue :

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

<sup>86.</sup> supposons que  $f_n \Rightarrow \overline{f}$  sur l'intervalle I, que  $\forall n \forall t \in I \ |f_n(t)| \leq \Lambda$ , et que G est une fenction continue sur le disque fermé  $|z| \leq \Lambda$ . Alors c'est un exercice standard et facile de montrer  $G(f_n) \Rightarrow_I G(f)$ , en utilisant la continuité uniforme de G. Il suffira donc ici de prendre  $f_n(t) = \frac{t}{N}$ , f(t) = 0,  $G(z) = (1-z)^{b-1}$ ,  $\Lambda = \frac{X}{N} < 1$ , et cela marche pour  $b \in \mathbf{C}$  quelconque. Cependant j'ai préféré une preuve avec des majorations explicites. Si on se limitait à  $b \in \mathbf{R}$  on pourrait simplifier plus encore.

est ainsi établie. On peut aussi l'obtenir en manipulant l'intégrale double

$$\iint_{0 \le u} e^{-u-v} u^{a-1} v^{b-1} du dv = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

mais pour cela il faudrait que je sois sûr que vous ayez vu dans votre cursus la justification des changements de variables dans des intégrales doubles sur des régions infinies, et j'en doute, puisque le contexte véritablement naturel pour cela est l'intégrale de Lebesgue.

### 22 Preuve de la Formule des Compléments

Voyons ce que cela donne du point de vue de la formule des compléments pour  $\Gamma(a)\Gamma(1-a)$ . On supposera 0 < Re(a) < 1 et on aura alors :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = B(a, 1-a) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{-a} dt = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^a \frac{1}{t} dt$$

On fait le changement de variable  $u = \frac{t}{1-t}, t = \frac{u}{u+1}, dt = \frac{du}{(u+1)^2}$  :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty u^a \frac{u+1}{u} \frac{du}{(u+1)^2} = \int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx$$

Si nous trouvons un moyen d'établir que l'une de ces intégrales vaut  $\frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ , alors la Formule des Compléments sera établie. En tout cas pour 0 < Re(a) < 1, mais en fait pour tout  $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ , par unicité analytique.

Cette précision nous donne l'idée suivante : on n'a pas besoin de tous les a, mais peutêtre uniquement de certains  $a_k$  formant une suite avec un point d'accumulation. Supposons en particulier que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

soit prouvé pour  $a_k = \frac{1}{k}$ , k = 2, 3, ...Alors les deux fonctions entières  $(\Gamma(a)\Gamma(1-a))^{-1}$  et  $\frac{1}{\pi}\sin(\pi a)$  auront les mêmes valeurs en les points  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$ , qui convergent vers l'origine. Par unicité analytique, c'est qu'elles sont identiques pour **tous les nombres complexes** a. 87

Considérons donc pour k entier,  $k \geq 2$ :

$$J_k = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{k} - 1}}{1 + u} du = k \int_0^\infty \frac{dv}{1 + v^k}$$

87. époustouflant non?

Considérons la décomposition en éléments simples de  $\frac{1}{1+v^k}$ :

$$\frac{1}{1+v^k} = \sum_{0 \le j \le k} \frac{\alpha_j}{v - \beta_j}$$

avec  $\beta_j = e^{i\pi\frac{1}{k}}e^{i2\pi\frac{j}{k}}$ ,  $\alpha_j = \frac{1}{k(\beta_j)^{k-1}} = \frac{-\beta_j}{k}$ . Comme pour  $0 < v < \infty$  il n'est jamais le cas que  $v - \beta_j$  est dans  $] - \infty, 0]$ , on peut utiliser  $\text{Log}(v - \beta_j)$  comme primitive. On a alors :

$$\int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = \lim_{X \to +\infty} \int_0^X \frac{dv}{1+v^k} = \lim_{X \to +\infty} \sum_{0 \le j \le k} \frac{-\beta_j}{k} \left( \operatorname{Log}(X - \beta_j) - \operatorname{Log}(-\beta_j) \right)$$

Pour  $X>0,\,X\to\infty$  on a (justifier!)  $\operatorname{Log}(X-\beta_j)=\operatorname{log}(X)+\operatorname{Log}(1-\frac{\beta_j}{X})=\operatorname{log}(X)+o(1),$  le symbole o(1) représentant une quantité qui tend vers 0 lorsque  $X\to\infty$ . Comme la limite ci-dessus existe c'est que la somme des termes donnant un multiple de  $\operatorname{log}(X)$  vaut **exactement** zéro (c'est-à-dire  $\sum_{0\leq j< k}\beta_j=0$ ). Mais alors, on peut affirmer :

$$k \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = k \sum_{0 \le j \le k} \frac{-\beta_j}{k} (-\operatorname{Log}(-\beta_j)) = \sum_{0 \le j \le k} \beta_j \operatorname{Log}(-\beta_j)$$

Je vous conseille de placer les  $\beta_j$  et les  $-\beta_j$  sur le cercle unité et de voir ce qui se passe. Vous constaterez que

$$Log(-\beta_j) = -(\pi - \pi \frac{1}{k}) i + 2\pi i \frac{j}{k}$$

Comme nous avons déjà fait la remarque que  $\sum_{0 \le j \le k} \beta_j = 0$  cela donne alors :

$$k \int_0^\infty \frac{dv}{1 + v^k} = 2\pi i \frac{1}{k} \sum_{0 \le j \le k} j \beta_j$$

Pour déterminer la somme  $S = \sum_{0 \le j < k} j \beta_j$ , multiplions-la par  $\omega = e^{i 2\pi \frac{1}{k}}$  et utilisons  $\omega \beta_j = \beta_{j+1}$ , avec la convention cependant que  $\beta_k = \beta_0$ . Donc

$$\omega S = \sum_{0 \le j < k} j \, \beta_{j+1} = \sum_{0 \le j < k} (j+1) \, \beta_{j+1} = S + k \beta_0$$
$$S = \frac{k \beta_0}{\omega - 1} = \frac{k e^{i\pi \frac{1}{k}}}{e^{i \, 2\pi \frac{1}{k}} - 1} = \frac{k}{2i \sin(\frac{\pi}{k})}$$

Finalement:

$$k \int_0^\infty \frac{dv}{1+v^k} = 2\pi i \frac{1}{k} \frac{k}{2i \sin(\frac{\pi}{k})} = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{k})}$$

De cette manière la formule

$$J_k = \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{k} - 1}}{1 + u} \, du = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{k})}$$

est établie pour tout k entier,  $k \ge 2$ , et donc comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, grâce au théorème d'unicité analytique :

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{1+u} \, du = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

pour tout nombre complexe a avec 0 < Re(a) < 1, et aussi :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

pour tout complexe  $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ , et finalement :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$

pour tout nombre complexe  $z \in \mathbf{C}$ . Les identités d'Euler reliant les sommes  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2j}$  aux nombres de Bernoulli en résultent.

Le produit infini pour sin peut être établi par d'autres méthodes, dont certaines bien plus rapides, mais dans l'ensemble, je pense que notre petit voyage valait le coup par les autres fruits recueillis.

## 23 La série hypergéométrique et un Théorème de Gauss

Revenons à

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

Remplaçons b par b+c avec Re(c)>0. Nous savons que la série binomiale :

$$(1-t)^c = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} t^k$$

est normalement convergente pour  $|t| \le 1$  lorsque Re(-c) < 0. On peut donc affirmer :

$$B(a,b+c) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \int_0^1 t^{a+k-1} (1-t)^{b-1} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} B(a+k,b) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+k)}$$

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k}{k!} \frac{\Gamma(a)(a)_k\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)(a+b)_k}$$

$$\frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b+c)}{\Gamma(a+b+c)\Gamma(b)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)_k(a)_k}{k!(a+b)_k}$$

Posons  $\alpha = a$ ,  $\beta = -c$ ,  $\gamma = a + b$ , donc  $a + b = \gamma$ ,  $b + c = \gamma - \alpha - \beta$ ,  $a + b + c = \gamma - \beta$ ,  $b = \gamma - \alpha$ . Nous obtenons la **Formule de Gauss**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \ k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

Nous l'avons prouvée pour  $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(b), \operatorname{Re}(c) > 0$ , c'est-à-dire pour  $\operatorname{Re}(\gamma) > \operatorname{Re}(\alpha) > 0 > \operatorname{Re}(\beta)$ . Mais examinons sa convergence absolue : on a (avec  $\alpha, \beta, \gamma \notin (-\mathbf{N})$ ) :

$$\left| \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \ k!} \right| \sim_{k \to \infty} k^{\operatorname{Re}(\alpha + \beta - \gamma) - 1} \left| \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \right|$$

Il y a donc convergence absolue de la série si et seulement si  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$  ou  $\alpha \in (-\mathbf{N})$  ou  $\beta \in (-\mathbf{N})$ . Plus précisément, en utilisant la majoration du Théorème 38, nous avons, en supposant  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < X$ ,  $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > \epsilon > 0$ , et  $k \ge 2X + 2$ :

$$\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \, k!} = k^{\alpha+\beta-\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} e^{u_k(\alpha,\beta,\gamma)} \quad \text{avec} \quad |u_k(\alpha,\beta,\gamma)| \le \frac{12X(X+1)}{k} \le 6X$$

On aura  $|e^{u_k}| = e^{\operatorname{Re}(u_k)} \le e^{|u_k|} \le e^{6X}$  donc, avec  $v_k = \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{\Gamma(\gamma)(\gamma)_k k!}$ : 88

$$k \ge 2X + 2 \implies |v_k| \le \frac{C^2 e^{6X}}{k^{1+\epsilon}} \quad (\text{avec } C = \sup_{|z| \le X} |\Gamma(z)|^{-1})$$

Ceci montre que  $\sum_{k\geq 2X+2} v_k(\alpha,\beta,\gamma)$  est **normalement**, donc uniformément, convergente. Sa somme est donc holomorphe en chacune des variables pour  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| < X$  et  $\text{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > \epsilon > 0$ . Donc, puisque  $X < \infty$  et  $\epsilon > 0$  sont arbitraires  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \ k!}$  est holomorphe en  $\alpha$ ,  $\beta$ , méromorphe en  $\gamma$ , sous la seule condition  $\text{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ . La formule de Gauss a été établie pour le sous-domaine  $\text{Re}(\gamma) > \text{Re}(\alpha) > 0 > \text{Re}(\beta)$ : par Unicité Analytique (il y a un petit raisonnement à faire puisque nous avons trois variables, d'abord on fixe  $\gamma$  et  $\alpha$  puis seulement  $\alpha$  puis aucune) elle vaut sous la seule contrainte  $\text{Re}(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ .

Examinons plus précisément encore la convergence de la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!}$ , en excluant les cas  $\gamma \in (-\mathbf{N})$ , bien sûr, et aussi  $\alpha \in (-\mathbf{N})$  ou  $\beta \in (-\mathbf{N})$  qui donnent chacun des sommes finies. Pour que la série converge il est nécessaire que son terme général tende vers 0. Donc, il faut que  $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 1$ . Nous savons qu'il y a convergence absolue pour  $\operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$  il faut donc examiner le cas  $0 \leq \operatorname{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 1$ . Par notre Théorème 38 précis on a,

<sup>88.</sup> dans  $v_k$ , on divise par  $\Gamma(\gamma)$  pour qu'il n'y ait plus de pôles en  $0, -1, \ldots$  On aurait aussi pu simplement exclure les disques  $|\gamma + n| \le \epsilon$ ,  $0 \le n \le X$ . On fait cela pour pouvoir parler de convergence normale.

comme je vous invite à le vérifier :

$$\frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k} = k^{\alpha+\beta-\gamma-1} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot (1 + u_k(\alpha, \beta, \gamma))$$

avec une suite  $u_k$  qui vérifie une majoration du type  $|u_k| \leq \frac{C}{k}$  avec C une constante qui dépend de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Posons

$$\delta = \alpha + \beta - \gamma$$

Pour  $\operatorname{Re}(\delta) < 1$ , la série de terme général  $k^{\delta-1}u_k(\alpha,\beta,\gamma)$  est (absolument) convergente, donc la convergence de la série de Gauss est équivalente à celle de la série de terme général  $k^{\delta-1}$ . Supposons  $0 \leq \operatorname{Re}(\delta) < 1$  et excluons (provisoirement) le cas  $\delta = 0$ . Directement par le Théorème 38:

$$\frac{(\delta)_k}{k!} = k^{\delta - 1} \frac{1}{\Gamma(\delta)} \cdot (1 + v_k(\delta))$$

avec une majoration  $|v_k| \leq \frac{D(\delta)}{k}$ . La convergence de la série de terme général  $k^{\delta-1}$  pour nos  $\delta$  est donc à son tour équivalente à celle de la série binomiale qui a pour terme général  $\frac{(\delta)_k}{k!}$ . Nous avons démontré que celle-ci converge si et seulement si  $\text{Re}(\delta) < 0$  ou  $\delta = 0$ . Cela est antagoniste de notre hypothèse  $0 \leq \text{Re}(\delta) < 1$  et  $\delta \neq 0$ . Donc la seule possibilité qui subsiste est  $\delta = 0$  ( $\alpha + \beta - \gamma = 0$ ). Mais la série harmonique  $\sum \frac{1}{k}$  diverge. Conclusion :

Théorème 42 (Gauss, 1812) Soit  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , avec  $\gamma \notin (-\mathbb{N})$ . La série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \ k!}$  converge si et seulement si :

- 1. soit  $\alpha \in (-\mathbf{N})$ , (la série est alors une somme finie),
- 2. soit  $\beta \in (-\mathbf{N})$ , (la série est alors une somme finie),
- 3. soit  $\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < \operatorname{Re}(\gamma)$  (la série est alors aussi absolument convergente).

De plus dans tous les cas de convergence on a la formule exacte :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

Nous n'avons prouvé la formule exacte que sous la condition

$$\operatorname{Re}(\alpha + \beta) < \operatorname{Re}(\gamma)$$

Considérons maintenant un entier négatif a = -n. La série de Gauss est alors une somme finie, avec n + 1 termes, puisque  $(a)_k = 0$  pour k > n. Elle est une fonction entière de  $\beta$ 

et une fonction méromorphe de  $\gamma$  avec des pôles pour  $\gamma = 0, -1, ..., 1 - n$ . Pour  $\beta$  fixé quelconque, nous savons que la formule est valable pour  $\text{Re}(\gamma)$  suffisamment grand, par unicité analytique elle est donc valable pour tout  $\gamma$ . La formule est donc valable pour tout  $\beta$  et tout  $\gamma$  et donne l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \ k!} = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\beta)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\beta)} = \frac{(\gamma-\beta)_n}{(\gamma)_n}$$

Dans toute sa splendeur:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot \cdots \cdot k} \frac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)}$$
$$= \frac{(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\cdots(\gamma-\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

Et notre formule finale est, après simplification :

Théorème 43 Pour tout  $\beta, \gamma \in \mathbb{C}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\prod_{0 \le j < k} (\beta + j) \prod_{k \le j < n} (\gamma + j)}{k! (n - k)!} = \frac{\prod_{0 \le j < n} (\gamma - \beta + j)}{n!}$$

Cette identité était semble-t-il à peu près connue du mathématicien chinois Chu au treizième siécle. Elle a été redécouverte de nombreuses fois, et est apparemment connue aujourd'hui sous l'appellation **identité de Chu-Vandermonde**. La façon la plus simple de la prouver est la suivante : soit  $\delta = -(\gamma + n - 1)$ , il s'agit de calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(\beta)_k}{k!} (-1)^{n-k} \frac{(\delta)_{n-k}}{(n-k)!} ,$$

qui est  $(-1)^n$  fois le terme en  $z^n$  dans la série produit

$$(1-z)^{-\beta} \cdot (1-z)^{-\delta} = (1-z)^{-\beta-\delta}$$

c'est-à-dire

$$(-1)^n \frac{(\beta + \delta)_n}{n!} = (-1)^n \frac{(\beta - \gamma - (n-1))_n}{n!} = \frac{(\gamma - \beta)_n}{n!}$$

Bref, les identités de Chu-Vandermonde sont juste une façon de s'amuser avec les identités  $(1-z)^a(1-z)^b=(1-z)^{a+b}$ .

Dans le Théorème de Gauss lorsque  $\alpha - \gamma \in \mathbf{N}$  il faut comprendre que la formule signifie que la somme de la série donne 0 à cause du pôle de  $\Gamma(\gamma - \alpha)$ . Par exemple pour  $\alpha = \gamma$  il faut comprendre :

$$\operatorname{Re}(\beta) < 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} = 0$$

Cela nous le savions déjà! Pour  $\alpha - \gamma = 1$  cela donne :

$$\operatorname{Re}(\beta) < -1 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma + k}{\gamma} \frac{(\beta)_k}{k!} = 0$$

Compte tenu de la formule précédente cela équivaut à  $\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\beta)_k}{k!} = 0$ , mais en fait  $k \frac{(\beta)_k}{k!}$  pour  $k \geq 1$  vaut  $\frac{(\beta+1)_{k-1}}{(k-1)!}$ , donc on n'a rien de nouveau ici : les cas  $\alpha - \gamma \in \mathbf{N}$  sont tous équivalents à  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{k!} = 0$ .

La fonction hypergéométrique de Gauss est définie, pour |z| < 1 par la formule :

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k(\beta)_k}{(\gamma)_k \, k!} z^k$$

On exclut les  $\gamma \in (-\mathbf{N})$  et la série est en fait polynomiale en z lorsque  $\alpha$ , ou  $\beta$  est dans  $-\mathbf{N}$ . Ces cas étant exclus il est facile de voir que le rayon de convergence est 1. Le théorème précédent nous dit quand la série converge pour z=1 et Gauss a déterminé plus généralement quand elle converge pour  $|z|=1, z\neq 1$ : vous pourrez vous essayer à reprendre notre preuve dans le cas z=1 et à l'adapter au cas  $|z|=1, z\neq 1$ , je vous laisse re-découvrir le résultat de Gauss.

La fonction hypergéométrique de Gauss est très importante en Analyse Mathématique, et l'étude qui en fut faite par Riemann en 1857 influence encore les Mathématiques d'aujourd'hui, même dans des domaines très éloignés a priori de l'analyse complexe, comme la géométrie algébrique, la théorie des nombres. J'aimerais en dire plus, mais ce sont là des sujets pour un cours de deuxième niveau d'Analyse complexe, c'est sans doute trop délicat pour un cours de premier niveau. Avant de quitter ce sujet je signale tout de même l'équation différentielle hypergéométrique qui est vérifiée par la fonction F:

$$z(1-z)F'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)F' - \alpha\beta F = 0$$

Je signale aussi la fonction hypergéométrique confluente :

$$G(\alpha, \gamma; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k} \frac{z^k}{k!}$$

La fonction G donnée par cette série est une fonction entière de z. Elle vérifie l'équation différentielle suivante :

$$zG'' + (\gamma - z)G' - \alpha G = 0$$

Si on prend  $\alpha = \gamma$  on a simplement bien sûr  $G(\alpha, \alpha; z) = \exp(z)$ . Mais d'autres fonctions usuelles moins simples sont aussi des cas particuliers. Pour ne citer que certaines des plus simples :

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = x G(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; x)$$
$$\int_0^x e^{-v} v^{a-1} dv = \frac{x^a}{a} G(a, a+1; x)$$

## 24 Annexes

### 24.1 Formule de Stirling

La formule de Stirling donne un équivalent asymptotique de n! lorsque  $n \to \infty$ :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Plus précisément on va montrer, pour  $n \geq 1$ :

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\theta_n}$$
 ,  $0 < \theta_n < \frac{1}{8n}$ 

L'ordre de grandeur plus exact de  $\theta_n$  est en réalité  $\frac{1}{12n}$ , mais nous ne chercherons pas à obtenir ce résultat.

En fait cette formule va apparaître comme conséquence d'une idée générale de comparer des sommes  $f(1) + \cdots + f(n)$  aux intégrales  $\int_1^n f(t) dt$ , ici pour la fonction  $f(t) = \log(t)$  de sorte que  $f(1) + \cdots + f(n) = \log(n!)$ . L'approximation par un trapèze de  $\int_a^b g(t) dt$  est  $(b-a)\frac{g(a)+g(b)}{2}$ . Plus précisément, supposons g de classe  $C^2$  et intégrons par parties, d'une première manière :

$$\int_0^1 (t - \frac{1}{2})g'(t) dt = \left[ (t - \frac{1}{2})g(t) \right]_0^1 - \int_0^1 g(t) dt = \frac{g(0) + g(1)}{2} - \int_0^1 g(t) dt,$$

puis d'une seconde :

$$\int_0^1 (t - \frac{1}{2})g'(t) dt = \left[\frac{1}{2}(t^2 - t)g'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}(t^2 - t)g''(t) dt = +\frac{1}{2}\int_0^1 t(1 - t)g''(t) dt,$$

LICENCE DE MATHÉMATIQUES (S5, TROISIÈME ANNÉE)

donc en comparant les deux formules :

$$\frac{g(0) + g(1)}{2} = \int_0^1 g(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t(1 - t)g''(t) dt$$

Nous utilisons cela pour  $g(t) = \log(t+k)$ , avec  $1 \le k < n$ , et nous faisons la somme (note : bien sûr  $\log 1 = 0$ ) :

$$\frac{1}{2}\log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log(n) = \int_1^n \log(t) \, dt - \frac{1}{2} \sum_{1 \le k \le n} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2} \, dt$$

Posons, pour  $n \geq 2$ :

$$u_n = \frac{1}{2}\log 1 + \log 2 + \dots + \log(n-1) + \frac{1}{2}\log(n) - \int_1^n \log(t) dt = -\frac{1}{2}\sum_{1 \le k \le n} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2} dt$$

et aussi, pour  $k \ge 1$ ,  $v_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t(1-t)}{(t+k)^2} dt$ . On a, compte tenu de  $t(1-t) \le \frac{1}{4}$ :

$$0 < v_k < \frac{1}{8} \int_0^1 \frac{1}{(t+k)^2} dt = \frac{1}{8} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{8k(k+1)}$$

La série  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$  est donc convergente. Soit S sa somme. On a en tout cas  $0 < S < \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{8}$ . On peut écrire :

$$u_n = -S + \sum_{k=n}^{\infty} v_k$$

Donc:

$$-S < u_n < -S + \frac{1}{8} \sum_{k=n}^{\infty} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = -S + \frac{1}{8n}$$

Par ailleurs  $\int_1^n \log(t) dt = [t \log(t) - t]_1^n = n \log(n) - n + 1$ , donc

$$u_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2})\log(n) + n - 1$$
,

et par conséquent, pour  $n \ge 2$  :

$$(n + \frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - S < \log(n!) < (n + \frac{1}{2})\log(n) - n + 1 - S + \frac{1}{8n}$$

La formule est aussi valable pour n=1 car  $0 < S < \frac{1}{8}$ . Finalement, soit

$$\theta_n = \log(n!) - (n + \frac{1}{2})\log(n) + n - 1 + S$$

de sorte que

$$n! = e^{1-S} \sqrt{n} (\frac{n}{e})^n e^{\theta_n}$$

avec

$$0 < \theta_n < \frac{1}{8n}$$

La formule de Stirling est donc établie, non seulement comme identité asymptotique mais avec une inégalité précise, valable dès  $n=1, 2, \ldots$  Mais il nous manque encore la mystérieuse constante  $C=e^{1-S}$ . Pour la déterminer nous pouvons tirer partie de l'une des formes que nous avons donnée au produit infini de Wallis (dans la feuille de travail II) :

$$\binom{2n}{n} \sim_{n \to \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

On a :  $(2n)! \sim C\sqrt{2n}2^{2n}n^{2n}e^{-2n}$  et  $n! \sim C\sqrt{n}n^ne^{-n}$  donc

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{1}{C} \sqrt{\frac{2}{n}} 2^{2n}$$

La comparaison donne :  $C = \sqrt{2\pi}$  (donc  $S = 1 - \frac{1}{2}\log(2\pi)$ ) et l'équivalent de Stirling est bien  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ .

#### 24.2 Théorème d'Abel

Le théorème d'Abel est important dans la théorie des séries :

Théorème 44 (Abel) Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  une série convergente. On a :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ 0 < z < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

J'avais prévu d'établir la version plus complète suivante :

**Théorème 45** Soit  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  une série convergente. Soit  $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ . On a :

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$|\operatorname{Arg}(1-z)| \le \theta$$

La raison pour le secteur angulaire dépendant de  $\theta$  c'est qu'il peut être faux que  $\lim_{z\to 1,|z|<1}\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ , parce que la convergence peut devenir de moins en

moins rapide lorsque  $\theta \to \frac{\pi}{2}$ . Bon, mais là j'ai un petit coup de fatigue alors je me contenterai de rédiger une preuve pour la première version et je vous laisse la compléter pour la version plus complète.

Avant cela, je donne un énoncé intéressant, en fait je crois celui pour lequel Abel avait initialement démontré son théorème : si les trois séries  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  avec  $c_n = \sum_{0 \le j \le n} a_j b_{n-j}$  convergent alors  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . En effet pour |z| < 1 on a  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ , en utilisant le théorème sur les séries doubles absolument convergentes (formule de Cauchy pour le produit de deux séries entières; on observera que le rayon de convergence de chacune des trois séries est au moins 1 puisque leurs coefficients tendent vers 0, puisque les séries associées sont supposées convergentes pour z=1). On passe ensuite à la limite  $z \to 1$  grâce au théorème d'Abel.

Venons-en à la preuve d'icelui. Posons  $\Sigma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ,  $\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$ , ...,  $\Sigma_n = \sum_{k=n}^{\infty} c_k$ . On a  $c_n = \Sigma_n - \Sigma_{n+1}$ , et aussi  $\lim_{n\to\infty} \Sigma_n = 0$  car  $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k - \sum_{k=0}^{n-1} c_k$ . En particulier la suite  $(\Sigma_n)_{n\geq 0}$  est bornée.

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

$$= (\Sigma_0 - \Sigma_1) + (\Sigma_1 - \Sigma_2) z + (\Sigma_2 - \Sigma_3) z^2 + \dots + (\Sigma_n - \Sigma_{n+1}) z^n$$

$$= \Sigma_0 + \Sigma_1 (z - 1) + \Sigma_2 (z^2 - z) + \dots + \Sigma_n (z^n - z^{n-1}) - \Sigma_{n+1} z^n$$

Donc, pour |z| < 1, puisque  $\lim \Sigma_{n+1} = 0$ , on a : <sup>89</sup>

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \Sigma_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \Sigma_j (z^j - z^{j-1})$$

<sup>89.</sup> pour |z| < 1 on est dans le disque de convergence de la série de gauche qui converge absolument. Et c'est aussi le cas pour celle de droite puisque les  $\Sigma_j$  sont bornés. Pour |z| = 1 le résultat est valable, au sens où si l'une des deux séries converge alors l'autre aussi et l'identité vaut. Il est possible cependant qu'elles soient (toutes deux, donc) divergentes lorsque |z| = 1,  $z \neq 1$ .

Posons  $M_n = \sup_{j \ge n} |\Sigma_j|$ . On a  $\lim M_n = 0$ .

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \Sigma_0 \right|$$

$$\leq |1 - z| \sum_{j=1}^{N} |\Sigma_j| |z|^{j-1} + |1 - z| \sum_{j=N+1}^{\infty} |\Sigma_j| |z|^{j-1}$$

$$\leq |1 - z| \sum_{j=1}^{N} |\Sigma_j| + |1 - z| \frac{M_{N+1} |z|^N}{1 - |z|}$$

$$\leq |1 - z| NM_1 + M_{N+1} \frac{|1 - z|}{1 - |z|}$$

Supposons maintenant 0 < z < 1. On a alors, pour tout  $N \ge 1$ :

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \right| \le (1-z)NM_1 + M_{N+1}$$

Comme  $M_N \to 0$ , on choisit N avec  $M_{N+1} \le \epsilon$ . On a alors pour  $0 < 1 - z < \frac{\epsilon}{N(M_1 + 1)}$ :  $|\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k| \le \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$ , d'où le résultat.

On peut rédiger un peu différemment : considérons, pour  $0 \le z \le 1$  :

$$F_N(z) = \sum_{j=1}^{N} \Sigma_j (z^j - z^{j-1})$$

et  $F(z) = \lim_{n \to \infty} F_N(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{j=1}^{\infty} c_k z^k$ . On a

$$|F(z) - F_N(z)| \le \sum_{j=N+1}^{\infty} |\Sigma_j| (z^{j-1} - z^j) \le M_{N+1} \ z^N \le M_{N+1}$$

Il y a donc convergence uniforme des fonctions (continues)  $F_N$  sur l'intervalle [0,1] vers la fonction limite F. Donc la fonction F est une fonction continue. En particulier, elle est continue (à gauche) en 1. Comme évidemment F(1) = 0 cela veut dire :  $\lim_{z\to 1} F(z) = 0$ . Or, justement, notre identité nous dit que  $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ .

#### 24.3 Critère d'Abel-Dirichlet

Le critère suivant est souvent utilisé lorsque l'on travaille avec des séries :

Théorème 46 (Abel-Dirichlet) Soient  $d_n$ ,  $w_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  des nombres complexes. Si :

- 1. la suite  $(d_n)_{n=0,1,...}$  tend vers 0,
- 2. la série de terme général  $d_n d_{n+1}$  est absolument convergente,
- 3. la série de terme général  $w_n$  a des sommes partielles bornées, alors la série  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n$  est convergente.

Preuve : on pose  $S_0 = w_0$ ,  $S_1 = w_0 + w_1$ ,  $S_2 = w_0 + w_1 + w_2$ , ...,  $S_n = \sum_{0 \le j \le n} w_j$ . Alors :

$$d_0 w_0 + d_1 w_1 + \dots + d_n w_n$$

$$= d_0 S_0 + d_1 (S_1 - S_0) + \dots + d_n (S_n - S_{n-1})$$

$$= (d_0 - d_1) S_0 + (d_1 - d_2) S_1 + \dots + (d_{n-1} - d_n) S_{n-1} + d_n S_n$$

La série  $\sum_{j=0}^{\infty} (d_j - d_{j+1}) S_j$  est absolument convergente puisque les  $S_j$  sont bornés par hypothèse et que  $\sum_{j=0}^{\infty} |d_j - d_{j+1}| < \infty$  par hypothèse. De plus  $\lim d_n S_n = 0$  puisque  $\lim d_n = 0$  et que  $S_n$  est borné. D'où la conclusion et la formule :  $\frac{90}{3}$ 

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n w_n = \sum_{j=0}^{\infty} (d_j - d_{j+1}) S_j$$

Cette formule est une sorte de « sommation par parties », analogue à l'intégration par parties pour les intégrales avec des fonctions. D'une manière générale cette technique s'appelle la **sommation d'Abel**. <sup>91</sup> Dans la section précédente on a aussi utilisé une sommation d'Abel, un peu différente puisqu'au lieu d'utiliser les sommes  $\sum_{0 \le j \le n}$  on a utilisé les sommes infinies  $\sum_{n \le j \le \infty}$ .

On utilise souvent le cas particulier avec  $(d_n)$  une suite réelle, décroissante, de limite nulle. Alors la série de terme général  $d_n - d_{n+1}$  est automatiquement absolument convergente.

Par ailleurs la condition que les sommes partielles des  $w_n$  sont bornées est réalisée lorsque la série  $\sum w_n$  converge. On a donc l'énoncé suivant (théorème de Dirichlet) :  $si\ la$ 

<sup>90.</sup> attention, la série de droite est absolument convergente, mais rien ne dit que c'est aussi le cas pour celle de gauche.

<sup>91.</sup> donc « sommation d'Abel pour les sommes » = « intégration par parties pour les intégrales ».

série  $\sum w_n$  a des sommes partielles bornées (en particulier si elle converge) et si  $(d_n)$  est une suite décroissante tendant vers 0 alors la série  $\sum d_n w_n$  converge.

Donnons un exemple d'utilisation conjointe du critère d'Abel-Dirichlet et du théorème d'Abel : la série  $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}h^n$  est convergente pour  $|h|\leq 1,\ h\neq 1$ , puisque  $\frac{1}{n}$  est une suite décroissante de limite nulle et que les sommes partielles  $1+h+\cdots+h^n=\frac{1-h^{n+1}}{1-h}$  sont bornées pour  $|h|\leq 1,\ h\neq 1$ . Sa somme vaut  $+\operatorname{Log}(1-h)$  pour |h|<1, donc, par le Théorème d'Abel, aussi pour |h|=1  $(h\neq 1)$ . Pour  $-h=e^{i\phi},\ -\pi<\phi<\pi$  on a  $1-h=2\cos(\frac{\phi}{2})e^{i\phi/2}$  donc  $\operatorname{Log}(1-h)=\log(2\cos(\frac{\phi}{2}))+i\frac{\phi}{2}$  donc, pour  $-\pi<\phi<\pi$  :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(n\phi)}{n} = \log(2\cos(\frac{\phi}{2}))$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin(n\phi)}{n} = \frac{\phi}{2}$$

Ici, la théorie des fonctions holomorphes (Logarithme complexe) rejoint celles des séries de Fourier. Ces formules étaient connues d'Euler. Remarquez que dans la deuxième formule si je fais  $\phi = \pi$  j'obtiens  $0 = \frac{\pi}{2}$ . Cela pourrait être vaguement alarmant (je ne sais pas pour vous, mais moi j'avoue que cela ne me laisserait pas indifférent) mais en fait nous n'avons prouvé la formule que pour  $-\pi < \phi < \pi$ , donc, ok. Et si  $\phi > \pi$ ? et bien le terme de gauche est  $2\pi$ -périodique, donc à droite il faudra écrire  $\frac{\phi - 2\pi k}{2}$  avec k le plus grand entier tel que  $(2k-1)\pi < \phi < (2k+1)\pi$ . Le graphe de cette fonction est donc « en dents de scie », avec des discontinuités aux multiples impairs de  $\pi$ . Il est intéressant qu'une somme infinie de fonctions aussi lisses que  $\sin(n\phi)$  puisse donner une fonction avec des discontinuités. Fourier alla plus loin au début du dix-neuvième siècle en affirmant que « toute » fonction  $2\pi$ -périodique est la somme d'une série de  $\sin(n\phi)$  et  $\cos(n\phi)$ . On sait maintenant qu'il avait essentiellement raison.

# Université Lille 1 — UFR de Mathématiques Licence de Mathématiques (S5, année 2005–2006)

L305 : ANALYSE COMPLEXE

Responsable : Jean-François Burnol

# QUATRIÈME CHAPITRE

# 25 Formules de Cauchy (pour un disque)

Soit  $z_0 \in \mathbf{C}$  et soit r > 0. On se donne une fonction f holomorphe sur le disque fermé  $\overline{D(z_0, r)}$ . Nous connaissons déjà depuis le premier chapitre les formules suivantes (peut-être je les ai données pour  $z_0 = 0$  seulement mais il suffit alors d'y remplacer f(z) par  $f(z_0 + z)$ ):

$$\forall n \in \mathbf{N}$$
  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-nit} dt$ 

Ces formules découlent directement du fait que l'écriture

$$f(z_0 + r e^{it}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} r^m e^{mit}$$
,

peut être vue comme un développement en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique dérivable  $t\mapsto f(z_0+r\,e^{it})$ : les coefficients sont donc donnés par les formules intégrales de Fourier. En fait ici nous avons une série absolument convergente puisque nous sommes à l'intérieur du disque ouvert de convergence et donc nous pouvons calculer  $\int_0^{2\pi} f(z_0+r\,e^{it})e^{-nit}\,dt$  en permutant la somme infinie et l'intégrale, puis on utilise le fait que  $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{mit}e^{-nit}\,dt$  vaut 1 pour n=m et 0 sinon.

Prenons maintenant z avec  $|z - z_0| < r : z = z_0 + se^{i\theta}, 0 \le s < r$ . On calcule :

$$f(z) = f(z_0 + s e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} s^n e^{ni\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) e^{-nit} dt \right) s^n e^{ni\theta}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) \left( \frac{s}{r} \right)^n e^{ni(\theta - t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} f(z_0 + r e^{it}) \left( \frac{s}{r} \right)^n e^{ni(\theta - t)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{1 - \frac{s}{r} e^{i(\theta - t)}} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r e^{it})}{r e^{it} - s e^{i\theta}} r e^{it} dt ,$$

la permutation étant justifiée par la convergence normale (normale, c'est-à-dire absolument et indépendamment de  $t \in [0, 2\pi]$ ; les autres, r, s,  $\theta$  sont fixés ce ne sont pas des variables ici. Le point essentiel c'est que  $0 \le \frac{s}{r} < 1$ ). Utilisons maintenant les notations des intégrales le long de chemins. Notons  $C_r(z_0)$  le cercle de rayon r centré en  $z_0$  et parcouru dans le sens direct (on sait qu'une intégrale le long d'un chemin ne dépend pas de la paramétrisation mais dépend du sens de parcours : si on renverse le sens de parcours, on change l'intégrale en - l'intégrale). Alors on obtient la **formule intégrale de Cauchy** (pour un disque) :

$$|z - z_0| < r \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

On peut aussi écrire les intégrales pour  $f^{(n)}(z_0)$  comme des intégrales le long de chemins :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw$$

Vous vérifierez que c'est bon!

On peut justifier cette formule d'une autre façon intéressante : à partir de la série entière  $f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (w - z_0)^k \text{ on écrit}$ 

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \sum_{0 \le k \le n} c_k (w-z_0)^{k-n-1} + \frac{c_n}{w-z_0} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (w-z_0)^{k-n-1}$$

Considérons maintenant la fonction

$$g(w) = \sum_{0 \le k \le n} c_k \frac{(w - z_0)^{k-n}}{k - n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \frac{(w - z_0)^{k-n}}{k - n}$$

Les premiers termes sont une fraction rationnelle, et la série est une série entière qui a le même rayon de convergence que celle pour  $f(z_0 + h)$  (pourquoi?). Elle est normalement

convergente sur le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon r. On peut donc la dériver terme à terme, et cela donne :

$$\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} = \frac{c_n}{w-z_0} + g'(w)$$

Or une chose fondamentale c'est que l'intégrale le long d'un lacet d'une dérivée donne toujours un résultat nul. Donc :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{c_n}{w-z_0} dw = c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Ici encore il faut insister sur le fait surprenant que le résultat ne dépend pas du rayon du cercle!

# 26 Formule de la moyenne et Principe du maximum

Un cas particulier des formules intégrales de Cauchy pour un disque est la **formule de** la moyenne :  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$  lorsque f est holomorphe sur le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon r. Les fonctions continues qui vérifient la formule de la moyenne sur les disques d'un ouvert U sont appelées **fonctions harmoniques**: les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe sont harmoniques. Une fonction holomorphe est harmonique, mais une fonction harmonique n'est certainement pas en général holomorphe (u = Re(f)) est harmonique mais comme elle ne prend que des valeurs réelles, elle ne peut être holomorphe que si elle (donc f aussi) est une constante, sur toute composante connexe de l'ouvert U). La définition précise que nous allons prendre pour la notion de fonction harmonique est la suivante : f est continue et pour tout  $z_0 \in \Omega$  il existe  $\eta(z_0) > 0$  tel que le disque ouvert  $|z - z_0| < \eta(z_0)$  est inclus dans  $\Omega$ , et la formule de la moyenne  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt$  vaut pour tout  $r \in [0, \eta(z_0)]$ . Vous êtes invité(e) (après avoir étudié le Principe du Maximum) à lire l'annexe consacrée aux fonctions harmoniques.

Théorème 47 (Principe du Maximum) Soit  $\Omega$  un ouvert borné, et soit f une fonction continue sur  $K = \overline{\Omega}$  (qui est donc compact), harmonique sur  $\Omega$ . Notons  $\partial \Omega = K \setminus \Omega$  le bord de  $\Omega$ . Notons  $M = \sup_K |f|$ . On a  $M < \infty$  car f est continue sur le compact K.

1. il existe un point z du bord  $\partial \Omega$  avec |f(z)| = M.

- 2. supposons  $\Omega$  connexe. Alors, sauf si f est constante sur  $\Omega$ , on a l'inégalité stricte |f(z)| < M pour tout  $z \in \Omega$ .
- 3. supposons que f est à valeurs réelles. Alors les points précédents valent avec  $M^+ = \sup_K f$ : on a aussi  $M^+ = \sup_{\partial\Omega} f$  et si  $\Omega$  est connexe, si il existe  $z \in \Omega$  avec  $f(z) = M^+$  alors f est constante. Idem avec  $M^- = \inf_K f$ .

Remarque : les fonctions harmoniques vérifient une « unicité analytique » en un sens plus faible que les fonctions analytiques, à savoir que l'annulation sur un petit ouvert non vide implique l'annulation partout dans le grand ouvert connexe contenant le petit ouvert. L'exemple de la fonction harmonique  $z\mapsto y$  qui est identiquement nulle sur l'axe réel sans être en fait la fonction nulle montre que l'unicité analytique au sens fort valable pour les fonctions holomorphes ne vaut pas pour les fonctions harmoniques.

En amphithéâtre j'ai donné une preuve du principe du maximum pour une fonction analytique (et  $\Omega$  un disque). Ici je donne une preuve pour le cas général. Vous avez eu le temps de devenir des champion(ne)s de la Topologie, alors je ne prendrai pas de gants.

Le bord  $\partial\Omega=K\setminus\Omega=K\cap(\mathbf{C}\setminus\Omega)$  est l'intersection d'un compact et d'un fermé, il est donc compact. Notons  $N=\sup_{\partial\Omega}|f|$ . On a  $N\leq M$ . Supposons N< M et soit  $F=\{z\in K\mid |f(z)|=M\}$ . L'ensemble (non vide!) F est fermé dans le compact K, il est donc compact. On peut donc prendre  $z_0\in F$  tel que  $|z_0|$  soit maximal. On ne peut pas avoir  $z_0\in\partial\Omega$  car on a supposé N< M. Donc  $z_0\in\Omega$ . Prenons r>0 suffisamment petit de sorte que le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon r soit inclus dans  $\Omega$  et que la formule de la moyenne vaille pour le cercle  $|z-z_0|=r$ . On a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{it}) dt \implies |f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + r e^{it})| dt$$
$$\implies 0 \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (|f(z_0 + r e^{it})| - |f(z_0)|) dt$$

Maintenant lorsque l'on a une fonction continue g(t) qui vérifie  $g(t) \leq 0$  alors  $\int_0^{2\pi} g(t) dt < 0$  sauf si g est identiquement nulle (pourquoi??). Donc c'est que pour tout  $t \in [0, 2\pi]$  on a  $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$ . Donc tous les points du cercle centré en  $z_0$  et de rayon r sont aussi dans l'ensemble F: mais parmi eux il y en a forcément un qui vérifie  $|z| > |z_0|$ . Donc on a obtenu une contradiction!

De cette façon on a prouvé que N=M: le maximum est atteint sur le bord. Supposons maintenant qu'il soit aussi atteint en un point intérieur  $z_0$ . Soit G l'ensemble de ces points de  $\Omega$  en lesquels |f| vaut M. Il est non vide par hypothèse. Il est fermé dans  $\Omega$  car |f| est une fonction continue. Je prouve qu'il est ouvert dans  $\Omega$ : il suffit de reprendre exactement la méthode utilisée précédemment à partir de la formule de la moyenne pour voir que pour tout r>0 suffisamment petit tous les points du cercle de rayon r centré en  $z_0 \in G$  sont aussi dans G. Donc G contient un petit disque ouvert  $D(z_0, r)$ . Donc G est un ouvert. Maintenant, et seulement maintenant on invoque l'hypothèse que G0 est connexe. On en déduit que G1 qui n'est pas vide est égal à G2 tout entier. Donc |f|2 est une constante G3 est G4.

On n'a pas tout-à-fait terminé : on veut montrer que f elle-même est constante. On peut supposer C>0, car si C=0 alors f est identiquement nulle, donc constante. Prenons un  $z_0\in\Omega$  quelconque, et remplaçons f par la fonction  $\frac{f}{f(z_0)}$  qui vérifie aussi la formule de la moyenne, de sorte que l'on peut supposer  $f(z_0)=C=1$ . La fonction  $\mathrm{Re}(f)$  hérite de f la propriété de la moyenne. Comme  $|\mathrm{Re}(f)|\leq |f|=1$ , et  $|\mathrm{Re}(f(z_0))|=1$  la fonction  $|\mathrm{Re}(f)|$  atteint son maximum en le point intérieur  $z_0$ . Donc  $|\mathrm{Re}(f)|$  est constante. Donc  $\mathrm{Re}(f)$  ne peut prendre comme valeur que -1 ou +1. Comme  $\Omega$  est connexe, et que  $\mathrm{Re}(f)$  est une fonction continue, elle est en fait constante, partout égale dans  $\Omega$  à +1. On a ainsi à la fois |f|=1 et  $\mathrm{Re}(f)=1$ . Cela prouve que f est partout dans  $\Omega$  égale à 1. Donc f est constante, ce qu'il fallait démontrer. Finalement lorsque f est à valeurs réelles, on traite le cas de  $M_+$  en remplaçant f par f+C avec C>0 très grand. En effet  $M_+=\sup_K|f+C|-C$  pour  $C\gg 1$ . De même pour  $M_-$ , on considère f-C avec  $C\gg 1$  au lieu de f.

# 27 Théorème de Liouville

Théorème 48 Soit f une fonction entière. Si elle est bornée elle est constante.

Attention! on peut construire (ce n'est pas évident) une fonction entière f qui est bornée sur chaque rayon  $z=re^{i\theta},\, 0\leq r<\infty,\, \theta$  fixé, mais qui n'est pas constante. Compte tenu du théorème de Liouville ci-dessus, bien que bornée sur chaque rayon elle ne l'est pas globalement. Donc la fonction qui à  $\theta$  associe  $\sup_{r>0}|f(re^{i\theta})|\in\mathbf{R}$  ne peut pas être une fonction continue de  $\theta$  pour un tel f.

Pour la preuve du théorème de Liouville on peut par exemple considérer  $g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z}$  qui est aussi une fonction entière et qui vérifie  $|g(z)| \leq \frac{2M}{|z|}$  pour  $z \neq 0$  et  $M = \sup_{\mathbb{C}} |f|$ . Soit R > 0 fixe et considérons les valeurs de |g| sur le cercle de rayon  $10^n R$ . Elles sont majorées par  $10^{-n}2MR^{-1}$ . Par le principe du maximum cette majoration vaut en particulier pour les valeurs de |g| pour  $|z| \leq R$ . On fait tendre n vers l'infini et on obtient que g est identiquement nulle pour  $|z| \leq R$ . Mais R est arbitraire donc g est identiquement nulle (aussi justifiable par unicité analytique) donc f est constante égale à f(0).

On peut aussi, comme je l'ai fait en amphithéâtre utiliser les formules intégrales de Cauchy pour  $f^{(n)}(0)$  et les inégalités qui en découlent.

Une autre méthode encore est la suivante : on pose  $g(z) = f(\frac{1}{z})$ . Comme g est bornée, par le théorème de Riemann elle a en 0 une fausse singularité. Elle est donc aussi une fonction entière que l'on peut représenter sous la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n$ . Donc f(z) vaut, pour  $z \neq 0$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^{-n}$ . Si l'on restreint à  $z = e^{it}$  par exemple on obtient une série de Fourier ne comportant que des  $e^{-int}$ ,  $n \geq 0$ . Or la série de Fourier d'une fonction est unique et le développement en série entière de f donne une autre série, elle ne comportant que des  $e^{int}$ ,  $n \geq 0$ . Donc tous les coefficients autre que celui pour n = 0 sont nuls. Donc f est constante.

On peut facilement généraliser l'énoncé et la preuve pour obtenir : si il existe  $N \in \mathbb{N}$  et une constante C tels que  $|f(z)| \leq C|z|^N$  pour  $|z| \geq 1$  alors f est en fait un polynôme de degré au plus N. On peut aussi affaiblir l'hypothèse en supposant une majoration en  $C|z|^N$  non pas pour |f| mais seulement pour |Re(f)| (ou seulement pour |Im(f)|). Il est encore vrai que f est alors un polynôme de degré N au plus, mais cela est (nettement) moins facile à prouver.

Je ne reproduis pas ici mais rappelle juste pour mémoire que l'on peut utiliser le théorème de Liouville pour établir en deux lignes le théorème fondamental de l'algèbre (tout polynôme à coefficients réels ou complexes possède une racine complexe, et donc par récurrence sur le degré se factorise entièrement sur C).

## 28 Séries de Laurent et Résidus

Soit  $z_0 \in \mathbf{C}$  et  $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$ . Supposons la fonction f holomorphe sur la couronne  $\mathcal{A}_{r_1,r_2} = \{z \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$ . Alors on peut exactement comme dans le premier chapitre définir pour chaque  $n \in \mathbf{Z}$  le coefficient de Fourier  $c_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$ , et prouver qu'il existe une constante  $c_n$  telle que  $c_n(r) = c_n r^n$ : la preuve est la même exactement. La différence c'est qu'ici on ne peut plus prouver que  $c_n = 0$  pour n < 0. Le théorème de Dirichlet de la théorie des séries de Fourier nous donne :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n = -N}^{n = +N} c_n (z - z_0)^n$$

En fait choisissons  $r'_1 < r'_2$  tels que  $r_1 < r'_1 < r'_2 < r_2$ . La fonction f est continue donc bornée sur le compact  $\overline{\mathcal{A}_{r'_1,r'_2}}$ , soit  $M < \infty$  le supremum de |f| sur cette couronne compacte. On a  $|c_n(r)| \le M$ , donc  $|c_n| \le Mr^{-n}$ , pour r tel que  $r'_1 \le r \le r'_2$ . En particulier nous voyons que la série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  converge pour tout z avec  $|z-z_0| < r'_2$ . Comme  $r'_2 < r_2$  est arbitraire on en déduit que le rayon de convergence de cette série est au moins égal à  $r_2$ . On peut donc améliorer la présentation en écrivant :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{n=-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

On en déduit que la série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}h^n$  converge lorsque  $r_1 < |h|^{-1} < r_2$ , c'est-à-dire lorsque  $r_2^{-1} < |h| < r_1^{-1}$ . Son rayon de convergence est donc au moins égal à  $r_1^{-1}$ , et donc la série  $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$  converge pour tous les z avec  $|z-z_0| > r_1$ , normalement lorsque  $|z-z_0| \ge r'_1 > r_1$ . Finalement on écrira :

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

avec convergence normale sur toute sous-couronne compacte de la couronne ouverte  $A_{r_1,r_2}$ .

Réciproquement supposons que l'on puisse trouver des coefficients  $d_n \in \mathbf{C}$  pour  $n \in \mathbf{Z}$  tels que

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} d_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} d_n (z - z_0)^n$$

Le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$  est donc au moins égal à  $r_2$ , et en recopiant notre argument précédent celui de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} d_{-n}h^n$  est au moins égal

à  $r_1^{-1}$ . Donc les séries convergent normalement sur toute couronne compacte dans  $\mathcal{A}_{r_1,r_2}$ , donc on peut calculer  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$  en permutant intégrale et séries, et on obtient  $d_n = c_n$ .

Finalement, supposons que l'on puisse trouver une fonction holomorphe g pour  $|z-z_0| > r_1$  et une fonction holomorphe k pour  $|z-z_0| < r_2$  telles que  $\lim_{|z| \to \infty} g(z) = 0$  et

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = g(z) + k(z)$$

On peut développer k en une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-z_0)^n$  de  $z-z_0$  et g comme une série entière  $\sum_{-\infty}^{n=-1} d_n(z-z_0)^n$  de  $(z-z_0)^{-1}$ . On vient de voir qu'alors en fait  $d_n=c_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Donc de telles g et k existent et sont uniques. Récapitulons :

**Théorème 49** Soit f une fonction holomorphe sur une couronne ouverte  $A_{r_1,r_2} = \{z \mid r_1 < |z-z_0| < r_2\}$  (avec  $0 \le r_1 < r_2 \le +\infty$ ). Il existe des coefficients  $c_n \in \mathbb{C}$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  uniques tels que

$$z \in \mathcal{A}_{r_1, r_2} \implies f(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

La série doublement infinie  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  est appelée **série de Laurent**. Elle est normalement convergente sur toute sous-couronne compacte. Les coefficients  $c_n$  sont donnés par les formules (de Cauchy):

$$\forall r \in ]r_1, r_2[$$
  $c_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) e^{-nit} dt$ 

Le rayon de convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  est au moins  $r_2$  et la série  $\sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$  converge en fait pour tout z avec  $|z-z_0| > r_1$ . Il existe une unique façon d'écrire f sous la forme g+k avec k holomorphe sur le disque  $D(z_0,r_2)$  et g holomorphe pour  $|z-z_0| > r_1$  et  $\lim_{|z|\to\infty} g(z)=0$ , cette unique façon consiste à prendre  $k(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  et  $g(z)=\sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$ .

Un cas particulièrement intéressant est obtenu lorsque  $r_1 = 0$ . C'est le cas d'une fonction holomorphe sur un disque épointé  $D^*(z_0, r)$  (avec  $r = r_2$ ), autrement dit d'une fonction holomorphe présentant en  $z_0$  une singularité isolée. Alors, la partie  $g(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n(z-z_0)^n$  est appelée **partie principale** ou **partie singulière** de la série de Laurent de f en  $z_0$ .

Elle a la propriété frappante de converger pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq z_0$ , autrement dit la série  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}h^n = g(\frac{1}{h} + z_0)$  a un rayon de convergence infini (avec nos notations précédentes  $r_1 = 0$  donc  $r_1^{-1} = +\infty$ ).

On peut à ce stade reformuler la notion de pôle : si f présente en  $z_0$  une singularité isolée, cette singularité est fausse ou est un pôle si et seulement si la partie singulière de la série de Laurent de f n'a qu'un nombre fini (ou nul) de termes non nuls. Une singularité essentielle est une singularité telle que la partie singulière de la série de Laurent a un nombre infini de coefficients non nuls.

**Définition 7** Soit f présentant en  $z_0$  une singularité isolée. Le coefficient  $c_{-1}$  de sa série de Laurent en  $z_0$  est appelé **résidu** de f en  $z_0$ , et est noté  $Rés(f, z_0)$  ou  $Rés_f(z_0)$ , ou encore parfois  $Rés_{z_0}(f)$ . On peut le calculer par la formule, valable pour r > 0 suffisamment petit de sorte que f est holomorphe sur  $D^*(z_0, r')$ , r' > r:

Rés
$$(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) r e^{it} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) dz$$

Lorsque f présente en  $z_0$  un pôle simple on a:

Rés
$$(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

Lorsque f présente en  $z_0$  un pôle d'ordre au plus N on a:

Rés
$$(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{N-1} (z - z_0)^N f(z)$$

Les formules pour le résidu dans le cas d'un pôle sont laissées en exercice. Le résidu ne dépend que de la partie singulière g de f en  $z_0$  et on peut donc aussi le calculer par la formule  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} g(z) \, dz$  (d'ailleurs comme f-g a une fausse singularité en  $z_0$  elle est holomorphe sur  $D(z_0, r')$ , donc admet une primitive sur ce disque ouvert donc  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} (f(z) - g(z)) \, dz = 0$ ).

Soit  $g(z) = \sum_{-\infty}^{n=-1} c_n (z-z_0)^n$  la partie singulière. Alors  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} h^n$  a un rayon de convergence infini, donc aussi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_{-n}}{1-n} h^{n-1}$  donc  $g_1(z) = \sum_{-\infty}^{n=-2} \frac{c_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1}$  converge pour tout  $z \neq z_0$ , normalement donc uniformément pour  $|z-z_0| > \epsilon > 0$ . On peut donc dériver terme à terme et on obtient  $g_1'(z) = \sum_{-\infty}^{n=-2} c_n (z-z_0)^n$ . Ainsi on a la décomposition :

$$z \neq z_0 \implies g(z) = \frac{\operatorname{R\acute{e}s}(f, z_0)}{z - z_0} + g'_1(z)$$

Nous en déduisons le théorème suivant qui nous sera bientôt utile :

**Théorème 50** Soit f une fonction holomorphe présentant une singularité isolée en  $z_0$ . Soit g la partie singulière du développement en série de Laurent de f en  $z_0$ . C'est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$  (qui tend vers zéro pour  $|z - z_0| \to \infty$ ). Soit  $\gamma$  un lacet quelconque dans  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ . On a:

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \text{R\'es}(f, z_0) \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz$$

En effet la dérivée  $g_1'(z)$  donne une contribution nulle à l'intégrale le long du lacet  $\gamma$ . Dans le cas particulier d'un lacet égal à un cercle centré en  $z_0$  et parcouru dans le sens direct on retrouve la formule  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} g(z) dz = \text{Rés}(f, z_0)$  (si l'on remplace g par f dans cette intégrale on ne peut l'utiliser que pour des r tels que f est holomorphe pour  $0 < |z - z_0| \le r$ , tandis qu'avec g la formule vaut pour tout  $r \in ]0, \infty[$ , puisque g est garantie holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ ). On pourrait penser que pour  $r \to +\infty$  l'intégrale devrait tendre vers zéro puisque g tend vers zéro, mais cela serait oublier que le dz, pour  $z = z_0 + re^{i\theta}$ , est  $ire^{i\theta}d\theta$ , et qu'il y a là-dedans un r qui tend vers l'infini.

# 29 Invariance par homotopie

Nous en arrivons maintenant aux théorèmes majeurs de ce cours d'Analyse Complexe. Soit U un ouvert dans  $\mathbf{C}$  et soit  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins dans U ayant les mêmes extrémités  $z_1$  et  $z_2$ . Pour le moment nos chemins sont seulement supposés continus : lorsque nous les utiliserons pour des intégrales nous les supposerons en plus  $C^1$  par morceaux (en fait le théorème principal de cette section a pour conséquence que lorsque f est une fonction holomorphe il est possible de définir raisonnablement  $\int_{\gamma} f(z) dz$  pour tout chemin continu, en particulier sans hypothèse d'existence de tangentes, mais nous n'irons pas dans cette direction car elle n'est pas essentielle pour ce Cours). Nous allons définir une relation d'équivalence sur les chemins ayant des extrémités fixées, relation d'équivalence qui sera compatible aux reparamétrisations (continues) qui ne changent pas le sens de parcours. Donc, pour me simplifier la vie je donne une définition qui a l'avantage d'incorporer immédiatement cette compatibilité, évidemment c'est une arnaque puisque si je voulais ensuite vraiment montrer qu'il

s'agit d'une relation d'équivalence il me faudrait justifier un certain petit détail <sup>92</sup>, et comme je suis fatigué, je veux m'épargner cette peine. Bref, je me comprends. Notre définition est donc la suivante : nous dirons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont **homotopes**, dans U, à extrémités  $z_1$  et  $z_2$  fixées, si on peut trouver un reparamétrage de  $\gamma_1$  et un de  $\gamma_2$  de sorte qu'ils soient en fait définis sur [0,1] vers U, et si il existe alors une fonction continue  $H:[0,1]\times[0,1]\to\mathbf{C}$  avec  $H(t,0)=\gamma_1(t), H(t,1)=\gamma_2(t)$  et pour tout  $u\in[0,1]$  on a  $H(0,u)=z_1$  et  $H(1,u)=z_2$ . Bon, voilà, j'affirme qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence. J'affirme et je vous laisse prouver. Voici maintenant un théorème fantastique :

Théorème 51 (Cauchy-Gauss) Soit U un ouvert non vide de C,  $z_1$  et  $z_2$  deux points de U,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins continus  $C^1$  par morceaux dans U ayant tous deux  $z_1$  comme point de départ et  $z_2$  comme point d'arrivée, et qui de plus sont homotopes dans U avec les extrémités fixées en  $z_1$  et  $z_2$ . Alors, pour toute fonction f holomorphe sur U on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz$$

Pour la preuve, si U était un ouvert étoilé, ou même seulement si l'homotopie H prenait ses valeurs dans un sous-ouvert  $V \subset U$  étoilé, alors nous pourrions affirmer que f a une primitive, et nous saurions alors que son intégrale le long d'un chemin ne dépend que des extrémités de ce chemin. On n'aurait même pas besoin de supposer  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  homotopes. Le problème c'est lorsqu'on ne peut pas trouver de tel ouvert V contenant  $H([0,1] \times [0,1])$  et tel que f admette une primitive sur V (si f est la fonction  $\frac{1}{z}$  et si  $\gamma_1$  est le cercle unité parcouru dans le sens direct c'est le cas).

Pour se ramener à la situation locale, je commence par remarquer que  $K = H([0,1] \times [0,1])$  est un compact, comme image par une application continue d'un compact. Je prétends qu'il existe r>0 tel que  $z\in K, w\notin U \Longrightarrow |w-z|>r$ . Sinon on aurait une suite  $(z_n)$  de K et une suite  $w_n$  de  $\mathbf{C}\setminus U$  avec  $|z_n-w_n|\to 0$ . Comme K est compact, quitte à passer à une sous suite je peux supposer que  $z=\lim z_n$  existe. J'ai alors aussi  $|z-w_n|\to 0$ . Mais c'est absurde car z est dans K donc dans l'ouvert U donc U contient un petit disque ouvert non vide centré en z, tandis que les  $w_n$  eux sont dans le complémentaire de U par hypothèse.

<sup>92.</sup> je vous laisse identifier lequel.

Donc on a notre r > 0, et tout nombre complexe qui est à distance au plus r d'un point de K est en fait dans l'ouvert U. La fonction H est uniformément continue sur le compact  $[0,1] \times [0,1]$  donc on peut trouver  $N \ge 1$  de sorte que  $|t-t'| \le \frac{1}{N}$  et  $|u-u'| \le \frac{1}{N}$  impliquent |H(t,u)-H(t',u')| < r. Considérons les points  $Q_{i,j}=(\frac{i}{N},\frac{j}{N})$   $(0 \le i \le N, 0 \le j \le N)$  du carré  $[0,1] \times [0,1]$  et leurs images  $P_{i,j}$  par H dans le plan complexe. Si l'on fixe un couple d'indice (i,j)  $(0 \le i,j < N)$  les quatre points  $P_{i',j'}$  avec  $i' \in \{i,i+1\}$ ,  $j' \in \{j,j+1\}$  sont dans le disque ouvert de rayon r > 0, centré en  $P_{i,j}$ , et ce disque ouvert est entièrement inclus dans l'ouvert U sur lequel la fonction f est holomorphe. La ligne brisée  $L_{i,j} = [P_{i,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i,j}]$  forme un lacet entièrement inclus dans le petit disque (tout disque est convexe). Sur ce disque la fonction holomorphe f admet une primitive, donc :

$$\int_{L_{i,j}} f(z) \, dz = 0$$

Faisons la somme de toutes ces identités pour  $0 \le i < N, \ 0 \le j < N$ . Chaque intégrale est la somme de quatre intégrales sur quatre segments. Chaque segment, sauf les segments  $[P_{0,j},P_{0,j+1}],\ [P_{i,N},P_{i+1,N}],\ [P_{N,j+1},P_{N,j}],\ [P_{i+1,0},P_{i,0}]$  contribue deux fois mais avec des sens de parcours opposés. Donc la somme des  $N^2$  intégrales portant sur les  $4N^2$  segments est en fait une somme sur les N+N+N+N=4N segments provenant du bord du carré  $[0,1]\times[0,1]$ . Parmi eux, notons qu'en fait les points  $P_{0,j}$  coïncident tous avec  $z_1$  et les points  $P_{N,j}$  avec  $z_2$ . Il ne reste plus que les segments  $[P_{i,N},P_{i+1,N}]$  et  $[P_{i+1,0},P_{i,0}]$ . Pour les premiers nous les remplaçons par le chemin  $\gamma_2(t)$  pour  $\frac{i}{N} \le t \le \frac{i+1}{N}$  ce qui est licite puisque le segment comme ce morceau de chemin ont les mêmes extrémités et sont totalement inclus dans un disque sur lequel f est holomorphe. Pour les segments  $[P_{i+1,0},P_{i,0}]$  nous les remplaçons par le chemin  $\gamma_1$  parcouru dans le sens contraire de  $t=\frac{i+1}{N}$  à  $t=\frac{i}{N}$ . La somme de toutes nos intégrales sur les  $4N^2$  segments est donc exactement égale à  $\int_{\gamma_2} f(z) \, dz - \int_{\gamma_1} f(z) \, dz$ . Par ailleurs nous savons cette somme égale à zéro. Le théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Gauss est démontré.

Remarque technique : bien que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient supposés  $C^1$  par morceaux, l'homotopie H elle est seulement supposée continue.

Note : la notion d'homotopie a été introduite formellement par Poincaré, plus de cinquante ans après les travaux de Cauchy. Plus implicitement elle est déjà très présente chez Riemann et aussi dans les travaux de Gauss sur l'électricité et le magnétisme. Nous aurons aussi souvent besoin d'une variante : l'homotopie des lacets, plutôt que l'homotopie à extrémités fixes des chemins. On dira que deux lacets  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  à valeurs dans U, tous deux paramétrés par [0,1], sont homotopes (dans U! évidemment si on change U on change la notion d'homotopie, plus U est grand plus il est facile de devenir homotopes) si l'on peut trouver une application continue  $H:[0,1]\times[0,1]\to U$  avec  $H(t,0)=\gamma_1(t)$ ,  $H(t,1)=\gamma_2(t)$ , et H(1,u)=H(0,u) pour tout  $u\in[0,1]$  (autrement dit pour chaque u,  $t\mapsto H(t,u)$  est un lacet à valeurs dans U).

**Théorème 52** Soit U un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux lacets continus  $C^1$  par morceaux dans U et qui de plus sont homotopes dans U au sens de l'homotopie des lacets. Alors, pour toute fonction f holomorphe sur U on a

$$\int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz$$

En particulier on a

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

 $pour\ tout\ lacet\ dans\ U\ qui\ est\ homotopiquement\ trivial\ dans\ U.$ 

On dit qu'un lacet est homotopiquement trivial si il est homotope à un lacet constant, autrement dit si on peut le déformer continûment tout en restant dans U et en faire un lacet constamment égal au même point de U. Supposons que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  soient deux chemins allant de  $z_1$  vers  $z_2$ . Paramétrons  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  par [0,1] et considérons le lacet  $\gamma_3$  défini par les formules  $\gamma_3(t) = \gamma_1(t)$  pour  $0 \le t \le 1$  et  $\gamma_3(t) = \gamma_2(2-t)$  pour  $1 \le t \le 2$ . Alors  $\gamma_3$  est un lacet que nous noterons  $\gamma_1\gamma_2^{(-1)}$ : d'abord  $\gamma_1$  de  $z_1$  à  $z_2$  puis  $\gamma_2$  dans le sens contraire de  $z_2$  à  $z_1$ . Exercice pour les hyper-motivés :  $\gamma_3$  est un lacet homotopiquement trivial dans U si et seulement si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont homotopes à extrémités fixes dans U. Cela montre le lien entre les deux versions du théorème d'invariance par homotopie (car  $\int_{\gamma_3} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz$ ). En ce qui concerne la preuve de la version pour les lacets, elle est quasi-identique à celle pour les chemins à extrémités fixées, donc je vous laisse le soin de la rédiger.

J'en viens maintenant à un point assez subtil. Supposons que le lacet  $\gamma$  dans U ait la propriété

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz = 0$$

pour toute fonction holomorphe f sur l'ouvert U. Est-il exact que  $\gamma$  est homotopiquement trivial? La réponse est « non, pas forcément ». On peut construire un exemple de la manière suivante : soit  $\gamma_1$  le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de +1 dans le sens direct, et soit  $\gamma_2$  le lacet partant de zéro et parcourant le cercle autour de -1 dans le sens direct. Formons le lacet  $\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{(-1)} \gamma_2^{(-1)}$ , c'est-à-dire d'abord  $\gamma_1$  puis  $\gamma_2$  puis  $\gamma_1$  dans le sens rétrograde puis  $\gamma_2$  dans le sens rétrograde. Alors, pour toute fonction f holomorphe sur l'ouvert  $U = \mathbb{C} \setminus \{-1, +1\}$  on a :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz - \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0$$

Mais, on peut (bonne chance...) prouver que  $\Gamma$  n'est pas homotopiquement trivial dans U.

En fait  $\Gamma$  a une autre propriété : il est **homologiquement** trivial. Après mûre réflexion, j'ai décidé de ne pas me lancer dans la description (précise) de l'homologie. D'abord, vous m'en voulez déjà assez à cause de mes histoires d'homotopie, ensuite, le faire sérieusement en amphithéâtre, à ce stade, même en faisant des grands moulinets avec ses bras tout en criant très fort me paraît chose quasi-impossible, enfin, le rédiger ici vraiment complètement serait un peu longuet si on voulait le faire avec tous les détails. Je dirai simplement que pour discuter de l'homologie il faut, au lieu de lacets, plutôt parler de 1-chaînes qui sont des objets de dimension 1 (nous les avons déjà définies dans un chapitre précédent), introduire la notion de 2-chaînes qui sont des objets de dimension 2, expliquer que le bord d'une 2-chaîne est une 1-chaîne (qui a la propriété que son bord à elle est nul), et définir les 1-chaînes homologiquement triviales comme étant les bords des 2-chaînes. Voilà.

Il se trouve que, par chance, il y a une caractérisation simple des 1-chaînes  $\Gamma$  (ou des lacets) qui sont homologiquement triviales dans U: cela équivaut à ce que  $\Gamma$  soit un 1-cycle (c'est-à-dire de « bord nul »  $^{93}$ ; par exemple  $\Gamma$  est un lacet) et  $\int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 0$  pour tout  $z_0$  du complémentaire de U dans  $\mathbf{C}$ . Autrement dit on a le théorème suivant :

Théorème 53 Soit U un ouvert non vide de  $\mathbb{C}$  et  $\Gamma$  un 1-cycle dans U, par exemple un 93. une discussion plus détaillée des 1-cycles est proposée plus loin.

lacet. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- 1.  $\Gamma$  est homologiquement trivial,
- 2. pour tout  $z_0 \notin U$  on a  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 0$ ,
- 3. pour toute fonction holomorphe f sur U on a  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ .

Une démonstration, assez délicate, de  $2 \implies 3$  est décrite dans une annexe  $(3 \implies 2$  est trivial). Comme je l'ai déjà dit, après mûre réflexion, j'ai décidé de ne pas trop m'attarder sur les notions de topologie algébrique en jeu dans l'homologie. Sachez cependant que si je l'avais fait alors les éléments constitutifs de la la démonstration de  $2 \implies 3$  en annexe pourraient être recyclés (sic) pour  $1 \Leftrightarrow 2$ , c'est-à-dire pour montrer qu'un cycle dans U ne tournant pas autour du complémentaire de U peut être réalisé comme le bord d'une 2-chaîne dans U, et réciproquement. <sup>94</sup> Dans certains livres d'analyse complexe on définit directement le fait d'être homologiquement trivial par le point 2, ici je n'ai pas voulu dissimuler que la véritable définition de « homologiquement trivial » est « être le bord de quelque chose », une définition donc qui n'a besoin de rien savoir de l'analyse complexe et des intégrales le long de chemins. Mais dorénavant lorsque nous dirons que  $\Gamma$  est homologiquement trivial, nous voudrons dire qu'il vérifie la propriété 2. du théorème ci-dessus.

# 30 Indices de lacets, variation de l'argument

Soit  $\gamma:[a,b]\to \mathbf{C}$  un chemin  $C^1$  par morceaux. allant de  $z_1$  à  $z_2$  et soit  $z_0$  un point par lequel ne passe pas  $\gamma$ . Posons :

$$F(t) = \int_{a}^{t} \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u) - z_0} du$$

de sorte que F(a)=0 et  $F(b)=\int_{\gamma}\frac{dz}{z-z_0}$ . La dérivée <sup>95</sup> de  $(\gamma(t)-z_0)\exp(-F(t))$  vaut  $\gamma'(t)\exp(-F(t))+(\gamma(t)-z_0)(-\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0})\exp(-F(t))$  ce qui donne exactement 0. Donc  $(\gamma(t)-z_0)\exp(-F(t))$  est constante. On a donc :

$$\forall t \in [a, b]$$
  $e^{F(t)} = \frac{\gamma(t) - z_0}{z_1 - z_0}$ 

<sup>94.</sup> dans la section suivante on explique pourquoi la condition  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0} dz = 0$  signifie « Gamma fait un nombre total de tours autour de  $z_0$  égal à zéro ».

<sup>95.</sup> comme d'habitude les t en nombre fini où on autorise à  $\gamma'$  d'avoir une discontinuité ne posent pas de problème essentiel.

Si l'on écrit en coordonnées polaires  $z_1 - z_0 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $\gamma(t) - z_0 = r(t) e^{i\theta(t)}$ ,  $z_2 - z_0 = r_2 e^{i\theta_2}$ , on obtient :

$$\forall t \in [a, b]$$
  $\operatorname{Re}(F(t)) = \log \frac{r(t)}{r_1}$  et  $\operatorname{Im}(F(t)) \equiv \theta(t) - \theta_1 \mod 2\pi$ 

Cela justifie en particulier le nom de **variation de l'argument** qui est donnée à  $\operatorname{Im}(F(t))$ : notez bien que F(t) est une fonction continue de t, et donc en **définissant**  $\theta(t)$  par  $\theta_1$  +  $\operatorname{Im}(F(t))$  on obtient une fonction **continue** de t donnant l'argument de  $\gamma(t) - z_0$ . Pour t = b la valeur  $\theta_1 + \operatorname{Im}(F(b))$  sera égale à  $\theta_2$  modulo  $2\pi$ , mais comme c'est  $\theta_1 + \operatorname{Im}(F(b))$  que l'on obtient en partant de  $\theta_1$  en t = a et en imposant la continuité de l'argument jusqu'à t = b, il vaut mieux remplacer  $\theta_2$  par cette valeur. On est donc amené à la définition suivante :

**Définition 8** Soit  $\gamma$  un chemin  $C^1$  par morceaux. allant de  $z_1$  à  $z_2$  et soit  $z_0$  un point par lequel ne passe pas  $\gamma$ . La variation de l'argument de  $z-z_0$  le long de  $\gamma$  est notée  $\Delta_{\gamma} \arg(z-z_0)$  et est définie par la formule :

$$\Delta_{\gamma} \arg(z - z_0) = \operatorname{Im} \left( \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \right)$$

Prenons maintenant le cas particulier où  $z_1=z_2$ , c'est-à-dire  $\gamma$  est un lacet. Alors avec les mêmes notations on a  $e^{F(b)}=1$  donc  $F(b)\in 2\pi i \mathbf{Z}$ . La variation de  $\arg(z-z_0)$  le long du lacet  $\gamma$  est donc un multiple entier de  $2\pi$ . Cet entier s'appelle « indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $z_0$  » (ou parfois indice du point  $z_0$  par rapport à  $\gamma$ ).

**Définition 9** Soit  $\gamma$  un lacet  $C^1$  par morceaux ne passant pas par  $z_0$ . L'indice du lacet  $\gamma$  par rapport à  $z_0$  est un nombre entier relatif qui est noté  $\operatorname{Ind}(\gamma, z_0)$  (ou  $\operatorname{Ind}_{z_0}(\gamma)$ , ou  $\operatorname{Ind}_{\gamma}(z_0)$ , ou  $\operatorname{Ind}(z_0, \gamma)$  etc...). Il est défini par la formule :

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\gamma} \arg(z - z_0)$$

On l'appelle aussi « nombre de tours fait par  $\gamma$  autour de  $z_0$  ». Il est invariant par déformation continue de  $\gamma$  et/ou de  $z_0$ , tant que  $z_0$  ne traverse pas le support de  $\gamma$ .

Je vous renvoie à la feuille de travail pour d'autres notions relatives à ces indices, en particulier une méthode simple de calcul. On peut définir l'indice ou la variation de l'argument purement topologiquement, sans avoir recours aux intégrales le long de chemins, donc en supposant seulement  $\gamma$  continu (les vétérans de l'année dernière vous renseigneront), mais je laisse tomber cela ici. En ce qui concerne l'invariance par déformation continue, c'est une conséquence immédiate du théorème d'invariance par homotopie pour les intégrales de fonctions holomorphes le long de chemins.

Soit  $\Gamma$  une 1-chaîne. Nous avons défini une 1-chaîne comme une somme formelle  $c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \cdots + c_k\gamma_k$  de chemins <sup>96</sup>. De même nous définissons une 0-chaîne comme une combinaison de points  $a_1P_1 + \cdots + a_mP_m$ . Le bord de  $\gamma$  est défini par la formule P - Q avec P le point d'arrivée et Q le point de départ de  $\gamma$  <sup>97</sup>. Le bord de la 1-chaîne  $\Gamma$  est obtenu alors par linéarité. Si ce bord est nul on dit que  $\Gamma$  est un 1-cycle. On se convainc que  $\Gamma$  est un cycle si et seulement si on peut réécrire  $\Gamma$  sous la forme  $d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$  avec les  $\delta_j$  des lacets. De plus si les  $c_i$  sont des nombres entiers, on peut re-écrire  $\Gamma$  sous cette forme avec les  $d_j$  aussi entiers.

Preuve : on peut supposer les  $c_j$  réels car si  $\sum_j c_j \gamma_j$  est un cycle c'est aussi le cas de  $\sum_j \operatorname{Re}(c_j) \gamma_j$ . Jetons les  $\gamma_i$  avec  $c_i = 0$ , puis imposons  $\forall i \ c_i > 0$  en renversant éventuellement le sens de parcours de  $\gamma_i$ . Soit  $P, P', P'', \ldots$ , les différents points de départ ou d'arrivée des  $\gamma_i$  dans un ordre quelconque. Comme  $\Gamma$  est un cycle, le point  $Q_1 = P$  ne peut pas être que le point d'arrivée de chemins  $\gamma_i$ : il est le point de départ d'au moins l'un d'entre eux. Choisissons-en un et soit  $Q_2$  son point d'arrivée. Ce point  $Q_2$  est point de départ, etc..., d'où une suite  $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ Comme il n'y a qu'un nombre fini de points, il arrive un moment où le nouveau Q est déjà dans la liste (pas forcément  $= Q_1$ ). De cette manière on forme un lacet  $\delta_1$  en mettant à la file certains des chemins composant le cycle  $\Gamma$ . Parmi les  $c_j$  attachés à ces chemins composant le lacet il y en un qui est plus petit que les autres, notons le  $d_1$ . Alors  $\Gamma - d_1\delta_1$  est à nouveau un cycle, et il est composé de moins de chemins que  $\Gamma$ . Donc en itérant un nombre fini de fois on aboutit finalement à la forme voulue  $\Gamma = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$ . De plus si les  $c_j$  sont tous entiers, les  $d_i$  le seront tous aussi, car par construction les  $d_i$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $c_j$ .

On posera, lorsque  $\Gamma$  est un cycle :

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

Si l'on a une écriture  $\Gamma = d_1\delta_1 + d_2\delta_2 + \cdots + d_m\delta_m$  avec les  $\delta_j$  des **lacets** alors :

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = d_1 \operatorname{Ind}(\delta_1, z_0) + \dots + d_m \operatorname{Ind}(\delta_m, z_0)$$

<sup>96.</sup> en fait : de classes d'équivalence pour la reparamétrisation, et avec la convention  $-\gamma = \gamma^{(-1)}$ . De plus si un chemin  $\gamma$  est obtenu en suivant d'abord  $\gamma_1$  puis  $\gamma_2$  alors en tant que chaîne on a la relation  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ . 97. P - Q est une expression formelle sans aucun rapport avec la soustraction de nombres complexes

L'indice d'un cycle appartient donc au **Z**-module <sup>98</sup> engendré par les coefficients  $c_i$  de toute expression de  $\Gamma$  sous la forme  $\sum_i c_i \gamma_i$  (puisque les  $d_j$  appartiennent à ce **Z**-module et que les indices des lacets sont toujours des nombres entiers relatifs). En particulier, les 1-chaînes à coefficients entiers qui sont des cycles ont des indices entiers (positifs ou négatifs) par rapport à tout point  $z_0$  (qui n'est pas dans le support de la chaîne).

## 31 Le théorème des résidus avec indices

Avec tout le travail accompli, les choses maintenant viennent très vite.

Théorème 54 (Théorème des résidus) Soit U un ouvert,  $z_1, \ldots, z_N$ , un nombre fini de points (distincts) dans U et soit f une fonction holomorphe sur  $U \setminus \{z_1, \ldots, z_N\}$ . Soit  $\Gamma$  un lacet homotopiquement trivial dans U ou, plus généralement, un 1-cycle homologiquement trivial dans U, ne passant par aucun des points  $z_1, \ldots, z_N$ . On a alors la formule suivante :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \le j \le N} \operatorname{Ind}(\Gamma, z_j) \operatorname{R\acute{e}s}(f, z_j)$$

Remarque : cette formule montre bien l'invariance par déformation. Lorsque l'on déforme  $\Gamma$  les indices ne changent pas, et évidemment les résidus ne changent pas non plus, puisqu'ils ne dépendent que de la fonction f.

Remarque : presque tout le temps on utilise ce théorème lorsque les singularités sont des pôles, c'est-à-dire lorsque f est une fonction méromorphe sur U. Mais le théorème vaut aussi lorsqu'il y a des singularités essentielles.

Remarque : on peut autoriser un nombre infini de singularités, à condition que ce soit toutes des singularités isolées. On sait alors qu'elles ne peuvent (par définition) pas avoir de point d'accumulation dans U. On peut prouver alors que l'indice de  $\Gamma$  par rapport à une singularité est nul, sauf pour au plus un nombre fini d'entre elles : la formule est valable, et elle est une somme finie, en fait.

<sup>98. «</sup> **Z**-module » = groupe commutatif (avec sa loi de groupe notée additivement)!

Preuve du théorème : soit  $g_j(z)$  la partie singulière du développement en série de Laurent de f en  $z_j$ . On sait que  $g_j$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ . Considérons la fonction  $F = f - g_1 - g_2 - \cdots - g_N$ . Cette fonction a en les  $z_j$  des fausses singularités. Elle est donc holomorphe sur U. On sait d'après le Théorème d'invariance par homotopie de Cauchy-Gauss que  $\int_{\Gamma} F(z) dz = 0$  lorsque  $\Gamma$  est un lacet homotopiquement trivial. On prouve en annexe que cela vaut aussi pour  $\Gamma$  un 1-cycle « homologiquement trivial », au sens de vérifier  $\operatorname{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tous les points P du complémentaire de U dans  $\mathbb{C}$ . Donc :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{1 \le j \le N} \int_{\Gamma} g_j(z) dz$$

Lorsque  $\Gamma$  est un lacet ne passant pas par  $z_j$  on a prouvé la formule :

$$\int_{\Gamma} g_j(z) dz = \text{R\'es}(f, z_j) \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_j} dz$$

Par linéarité cela vaut non seulement pour les lacets mais aussi pour les 1-cycles. De plus, l'indice est défini par la formule, pour les lacets comme pour les 1-cycles :

$$\operatorname{Ind}(\Gamma, z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{z - z_j} dz$$

En combinant tous ces éléments on a la preuve du théorème des résidus avec indices.

# 32 Le théorème des résidus en version classique

La version classique est un cas particulier de notre théorème général, mais elle est plus difficile à prouver! Comment cela peut-il être possible? J'essaie d'expliquer.

Une courbe de Jordan, aussi appelée « courbe fermée simple », est l'image d'un lacet **continu**  $\gamma: [a,b] \to \mathbf{C}$  sans intersection, c'est-à-dire, de sorte que pour  $a \le t < u < b$ on a  $\gamma(t) \neq \gamma(u)$ . Le **théorème de Jordan** 99 , qui n'est pas du tout facile à prouver, exprime quelque chose qui est intuitivement évident <sup>100</sup> : le complémentaire de  $\gamma([a,b])$ dans C (c'est un ouvert bien sûr) a exactement deux composantes connexes. L'une n'est pas bornée, l'autre, notons-là  $\Omega$ , est bornée. La courbe  $\gamma$  a l'indice nul par rapport aux points de la composante non-bornée (forcément car cet indice ne dépend pas du point P et si l'on fait tendre le point P vers l'infini, l'intégrale donnant l'indice tend vers zéro, ou plus simplement si P est suffisamment loin, le contour sera entièrement inclus dans un demi-plan ne contenant pas P, et donc on pourra déformer le contour en un point sans traverser P). La courbe de Jordan  $\gamma$  a soit l'indice +1 par rapport aux points de  $\Omega$ , on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens direct, soit l'indice -1, on dit alors qu'elle est parcourue dans le sens rétrograde. De plus  $\gamma$  est homotopiquement trivial par une homotopie qui prend ses valeurs dans  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \gamma([a,b])$ . Tout cela est franchement difficile lorsque l'on suppose la courbe seulement continue; c'est nettement plus facile lorsqu'on la suppose  $C^1$  par morceaux, mais une explication totalement détaillée n'est pas simple à rédiger.

Dans la littérature classique on trouve l'appellation « contour de Jordan » pour désigner une courbe de Jordan,  $C^1$  par morceaux, parcourue dans le sens direct  $^{102}$  (cela signifie que le domaine intérieur  $\Omega$  est toujours sur la gauche des pieds d'un petit bonhomme qui parcourerait ce contour). À chaque fois que l'on a affaire à un contour concret, en général formé d'arcs de cercle, de segments, ou d'autres formes géométriques simples, le fait que ce contour ait les propriétés que je viens d'énoncer comme valables pour toutes les courbes

<sup>99.</sup> la première preuve complète en a été donnée par Veblen en 1905.

<sup>100.</sup> Enfin, qui est censé être intuitivement évident, mais lorsque l'on enseigne les mathématiques on se rend compte rapidement qu'il n'est pas toujours intuitivement évident de déterminer ce qui est intuitivement évident.

<sup>101.</sup> Cela fait appel à un renforcement du théorème de Jordan-Veblen qui fut démontré par Schönflies en

<sup>102.</sup> plus tard, nous verrons que souvent on utilise ces contours finis comme étapes intermédiaires pour évaluer une intégrale sur un contour infini, comme l'axe réel par exemple.

de Jordan ne fait aucun doute : si l'on devait vraiment par exemple donner une formule réalisant une homotopie du contour en un point (balayant le domaine intérieur), on sait que cela serait juste un peu fastidieux d'écrire les formules, mais on ne doute pas que l'on pourrait le faire. Ou alors on peut introduire une ligne courbe supplémentaire allant d'un point du contour à un autre, de sorte que notre contour initial devient la superposition de deux contours plus simples, la ligne courbe étant parcourue pour l'un dans un sens, pour l'autre dans le sens contraire, la valeur de  $\int_{\gamma} f(z) dz$  pourra s'obtenir en additionnant les intégrales sur les deux contours plus petits, et on peut répéter jusqu'à se ramener à des contours étoilés par rapport à un point intérieur par exemple. Une fois que l'on a un contour étoilé, les questions d'homotopie ou d'indices sont triviales. Ou alors on se ramène à des contours qui, après avoir fait une rotation et une translation du système de coordonnées, entourent des domaines du type a < x < b, 0 < y < f(x), pour une fonction  $C^1$  f. Pour de tels contours on peut montrer que l'intégrale d'une fonction holomorphe est nulle en la transformant en une intégrale double (c'est la technique de la formule de Green-Riemann; je pense y revenir plus tard. En attendant demandez aux vétérans de l'année dernière.) Donc cela donne une technique de démonstration du théorème des résidus un peu différente de celle que nous avons suivie ici.

Ou encore on introduit un très fin quadrillage du plan et on essaye de remplacer le contour par un autre très proche ne comportant que des segments horizontaux et verticaux : en fait on peut démontrer le théorème de Jordan en raffinant ce genre de technique, et on peut aussi traiter des questions d'homologie que j'évoquais sans détails précédemment.

Encore une autre perspective est non plus de partir d'un contour, mais de partir d'un ouvert connexe  $\Omega$  et d'imposer des conditions à son bord topologique  $\partial\Omega$  pour pouvoir le considérer comme le support d'un lacet, le plus souvent en fait de plusieurs lacets, dont un entoure tous les autres, le long desquels on peut intégrer des fonctions. On aimera alors aussi que la formule de Stokes (théorème de Green-Riemann, formule de la divergence de Gauss, ou autre appellation) qui permet de transformer une intégrale curviligne en intégrale de surface soit valable.

Bref, tout cela pour dire qu'il y a en fait de multiples aspects, topologiques, algébriques, géométriques, analytiques, etc..., sous lesquels on peut sans cesse approfondir sa compré-

hension du théorème des résidus. <sup>103</sup> Nous nous contenterons donc modestement de :

## Théorème 55 (Théorème des résidus, version classique A)

Soit  $\gamma$  un contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, de domaine intérieur  $\Omega$ . Soit f une fonction sur un ouvert U contenant  $\gamma$  et  $\Omega$ , holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées  $z_1, \ldots, z_n$ , toutes situées dans  $\Omega$  (aucune sur le contour  $\gamma$ ; et si il y avait eu des singularités à l'extérieur du contour  $\gamma$  on s'en serait débarrassé en remplaçant U par un ouvert plus petit). Si  $\gamma$  est parcouru dans le **sens direct**:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \le j \le n} \text{Rés}(f, z_j)$$

 $Si \gamma$  est parcouru dans le **sens rétrograde** :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{1 \le j \le n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Ce théorème est un cas particulier de notre théorème général : j'ai expliqué que le contour de Jordan est homotopiquement trivial par une homotopie qui reste dans  $\overline{\Omega}$  (donc dans  $U^{104}$ ); et j'ai aussi précisé que le contour de Jordan, lorsqu'il est parcouru dans le sens direct a un indice +1 par rapport à tout point intérieur.

#### Théorème 56 (Théorème des résidus, version classique B)

Soit  $\gamma$  un contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur V. Soit  $\gamma_1$  un plus petit contour de Jordan,  $C^1$  par morceaux, parcouru dans le sens direct, tracé dans V, de domaine intérieur  $V_1$ , puis  $\gamma_2$  un autre, parcouru dans le sens direct, qui avec son domaine intérieur  $V_2$  est intièrement inclus dans  $V \setminus \overline{V_1}$ , puis  $\gamma_3$  qui avec son domaine intérieur  $V_3$  est entièrement inclus dans  $V \setminus \overline{V_1} \cup \overline{V_2}$ , etc. ... Notons  $\Omega$  l'ouvert  $V \setminus \overline{\bigcup_{1 \leq k \leq K} V_k}$ . Soit f une fonction définie sur un ouvert U contenant  $\overline{\Omega}$ , holomorphe sauf en un nombre fini de singularités isolées  $z_1, \ldots, z_n$ , toutes situées dans  $\Omega$ . Le Théorème

<sup>103.</sup> Et je n'ai même pas mentionné la question de l'intégration le long d'un contour d'une fonction multi-valuée! par exemple si on a des choses du type  $z^{\alpha}$ , à partir du moment où après avoir parcouru l'intégralité du contour on retombe sur la « même détermination » de  $z\mapsto z^{\alpha}$ , alors l'invariance par homotopie vaut et on peut souvent calculer l'intégrale en déformant le contour et en traversant des pôles qui donnent des résidus...

<sup>104.</sup> une homotopie débordant dans U nous suffirait et son existence serait beaucoup plus facile à prouver que celle d'une homotopie restant dans  $\overline{\Omega}$ .

des résidus s'exprime alors par la formule :

$$\int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{1 \le k \le K} \int_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \le j \le n} \text{Rés}(f, z_j)$$

Ce théorème est à nouveau un cas particulier de notre théorème général. Notons  $\partial\Omega$  la chaîne  $\gamma - \sum_{1 \le k \le K} \gamma_k$ , que nous pouvons appeler « bord orienté » de l'ouvert  $\Omega$ . Comme c'est une combinaison de lacets, c'est un cycle. Pour voir si le cycle est homologiquement trivial nous prenons un point  $P \in \mathbf{C} \setminus U$  et nous examinons  $\operatorname{Ind}(\partial\Omega, P)$ . Soit P est à l'extérieur de  $\gamma$  et donc aussi de tous les autres et alors  $\operatorname{Ind}(\gamma, P)$  et tous les  $\operatorname{Ind}(\gamma_k, P)$  sont nuls. Soit P est dans un et un seul des ouverts  $V_k$  alors  $\operatorname{Ind}(\gamma, P) = +1 = \operatorname{Ind}(\gamma_k, P)$  et tous les autres sont nuls. Dans tous les cas on a bien  $\operatorname{Ind}(\partial\Omega, P) = 0$  donc le cycle  $\partial\Omega$  est homologiquement trivial dans l'ouvert U. Par ailleurs son indice par rapport à chacune des n singularités  $z_j$  de f est toujours 1 puisque c'est l'indice du bord extérieur  $\gamma$  tandis que les composantes  $-\gamma_k$  du bord intérieur ont un indice nul. Nous obtenons la formule voulue :

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{1 \le j \le n} \text{R\'es}(f, z_j)$$

Je mentionne rapidement deux autres justifications dans un style plus classique : on observe tout d'abord par la technique de remplacer f par la fonction holomorphe  $F = f - g_1 - \dots - g_n$  qu'il suffit de justifier la nullité de  $\int_{\partial\Omega} F(z)\,dz$  pour toute fonction holomorphe F sur  $\overline{\Omega}$ . Représentons nous l'ouvert V sous une forme allongée, les sous-ouverts  $V_1, \ldots, V_k$  étant grosso modo alignés de la gauche vers la droite. Alors, je trace une coupure allant du haut de  $\gamma$  vers un point du haut de  $\gamma_1$ , puis une autre sur sa droite allant du haut de  $\gamma$  vers un point du haut de  $\gamma_2$ , etc. . . et je fais de même avec des coupures partant du bas. On voit que l'on a ainsi une succession l'un à côté de l'autre de domaines de Jordan  $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_K$ , les coupures introduites étant chacune parcourue dans un sens puis dans l'autre on a certainement  $\int_{\partial\Omega} F(z)\,dz = \sum_{0 \le k \le K} \int_{\partial\Omega_k} F(z)\,dz$ . Et on sait déjà que  $\int_{\partial\Omega_k} F(z)\,dz = 0$ . D'où le résultat.

Notons d'ailleurs si l'on n'utilise pas l'astuce de remplacer f par  $F = f - g_1 - \cdots - g_n$  qu'on peut à ce stade raisonner ainsi : partant d'un point  $P_0$  fixé du bord  $\gamma$  introduire une coupure jusqu'au voisinage de  $z_1$  faire un petit cercle dans le sens retrograde autour de lui, puis revenir par le chemin inverse jusqu'en  $P_0$ , puis partir vers  $z_2$  sans jamais intersecter le

lacet autour de  $z_1$ , tourner autour de  $z_2$  dans le sens retrograde, revenir en  $P_0$ , etc...etc..., puis finalement parcourir  $\gamma$  dans le sens direct. L'intégrale de f le long de ce contour qui a la propriété que les singularités sont toutes à l'extérieur sera nulle. Mais cela veut dire exactement, compte tenu de ce que nous avons prouvé dans le paragraphe précédent que  $\int_{\partial\Omega} f(z) dz$  se calcule en faisant la somme des  $\int_{|z-z_i|=\epsilon} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Rés}(f,z_i)$ .

Autre technique : je pars d'un point sur la gauche de  $\gamma$  et je trace une coupure vers  $\gamma_1$ . Puis de la droite de  $\gamma_1$  je trace une coupure vers un point de la gauche de  $\gamma_2$ , etc...etc.... Je ne rattache pas la droite du dernier contour  $\gamma_K$  au grand contour  $\gamma$ . Je prétends qu'en partant  $\gamma$  en suivant la coupure vers  $\gamma_1$  pour parcourir les moitiés du haut des  $\gamma_k$ , dans le sens rétrograde, puis de la droite vers la gauche les moitiés du bas des  $\gamma_k$  pour finalement une fois de retour sur  $\gamma$  le parcourir dans le sens direct, je trace ainsi un lacet  $\Gamma$  qui a la propriété, puisque les coupures sont toutes parcourues dans un sens puis dans l'autre que  $\int_{\Gamma} = \int_{\gamma} -\sum_{1 \leq k \leq K} \int_{\gamma_k}$ . Enfin j'affirme qu'il est intuitivement évident que ce lacet  $\Gamma$  est homotopiquement trivial dans l'ouvert U. Voilà, c'est la deuxième méthode.

La première méthode comme la deuxième méthode reposent sur l'intuition que l'on ne sacrifie en rien à la généralité en se contentant d'imaginer les sous-ouverts  $V_k$  sagement alignés de la gauche vers la droite à la queue-leu-leu. Ces méthodes sont absolument correctes dès que l'on a sous la main un contour explicite. Mais le problème c'est bien sûr de s'assurer que l'on n'aura jamais de surprise, que toujours, cela marche bien : je crois qu'il vaut mieux que nous laissions cela aux professionnels!

Conclusion : je vous ai donc donné une présentation des formes classiques du théorème des résidus. La formule avec les indices est belle <sup>105</sup>, et d'ailleurs (pour un lacet homotopiquement trivial) en fait plus simple à prouver que les énoncés ci-dessus qui emploient des contours de Jordan, ou la notion de bord régulier d'un domaine. En général les versions classiques ci-dessus, sans indices, suffisent pour les applications. <sup>106</sup>

<sup>105.</sup> un autre petit avantage c'est que les singularités à l'extérieur des contours d'intégration peuvent y figurer, on n'a pas besoin de les exclure puisque ce sont les indices qui s'en chargent, car ils sont nuls.

<sup>106.</sup> il y a des exceptions notables, par exemple lorsque l'on veut représenter une fonction hypergéométrique de Gauss-Riemann par une intégrale le long d'un chemin ; la subtilité est alors liée d'une part à l'emploi de fonctions multi-valuées, d'autre part à l'emploi de contours d'intégration qui sont certes des lacets, mais qui ne sont pas des contours de Jordan.

## 33 Annexes

### 33.1 Formules de Cauchy

**Théorème 57** Soit  $\gamma$  un contour de Jordan ( $C^1$  par morceaux), parcouru dans le sens direct, de domaine intérieur  $\Omega$ . Soit f une fonction holomorphe sur  $\overline{\Omega}$ .

$$\forall z \in \Omega \ \forall n \in \mathbf{N}$$
  $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw$ 

Au début de ce chapitre nous avons prouvé ces formules pour  $\gamma$  parcourant un cercle. Pour un contour plus général nous obtenons la formule pour n=0 par le théorème des résidus :

$$\forall z \in \Omega$$
  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$ 

En effet la fonction  $w \mapsto g(w) = \frac{f(w)}{w-z}$  ne peut avoir de singularité qu'au point w=z, c'est au pire un pôle simple et le résidu vaut  $\lim_{w\mapsto z} (w-z)g(w)$ , ce qui donne f(z). Pour obtenir les formules pour  $n\geq 1$  qui donnent les dérivées  $f^{(n)}(z)$  nous pouvons, par exemple :

- 1. appliquer la formule que nous venons de prouver à la fonction analytique  $f^{(n)}$ , puis intégrer n fois par parties pour remplacer  $f^{(n)}(w)$  par f(w) dans l'intégrale.
- 2. appliquer le théorème des résidus à  $g_n(w) = \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}$  qui a en z au pire un pôle d'ordre N = n+1. Le résidu vaut  $\lim_{w\to z} \frac{1}{(N-1)!} \left(\frac{d}{dw}\right)^{N-1} (w-z)^N g_n(w)$  ce qui donne  $\frac{1}{n!} f^{(n)}(z)$ .
- 3. partir de la formule pour f(z) et justifier la dérivation sous le signe somme, en invoquant la dérivation des intégrales à paramètres (Théorème 7 du Chapitre II).
- 4. remplacer z par z+h avec h petit et développer en série puis justifier la permutation de la série et de l'intégrale, cela donnera d'un seul coup la série de Taylor de f(z+h) par rapport à h=0 et donc tous les  $f^{(n)}(z)$ .

Lorsque l'on autorise f à avoir un nombre fini de singularités en  $z_1, \ldots, z_m$ , une formule de Cauchy plus générale s'applique :

$$\forall z \in \Omega \setminus \{z_1, \dots, z_N\} \qquad f(z) = \sum_{1 \le n \le N} g_n(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Omega} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

On a noté  $g_j(z)$  la partie principale de f en la singularité  $z_j$ . Cette formule plus générale fait l'objet d'un exercice dans la feuille de travail IV.

Une fonction analytique est déterminée par ses singularités <sup>107</sup> et par ses valeurs au bord. Retenez ce principe général. À ce propos il est important d'ajouter (ici, supposons pour simplifier qu'il n'y a pas les singularités) que f est déterminée dans  $\Omega$  non seulement par la connaissance de f(w) pour  $w \in \partial \Omega$  mais déjà, à une constante imaginaire pure près par la connaissance de Re(f(w)) sur le bord. Je le démontre rapidement : la fonction à valeurs réelles u(z) = Re(f(z)) vérifie la formule de la moyenne, donc elle obéit au principe du maximum. Si |u| est nulle sur le bord, le maximum de |u| sur  $\partial\Omega$  donc sur  $\overline{\Omega}$  est nul, c'est-à-dire u est identiquement nulle sur  $\Omega$ . On a montré dans un exercice que cela implique que f est constante (imaginaire pure, donc) : en effet v = Im(f) a, par les équations de Cauchy-Riemann, des dérivées partielles identiquement nulles, elle est donc constante car  $\Omega$  est connexe. Si deux fonctions analytiques  $f_1$  et  $f_2$  sont telles que  $\operatorname{Re}(f_1) = \operatorname{Re}(f_2)$  sur le bord, alors la différence  $f_1 - f_2$  a une partie réelle nulle sur le bord et on peut lui appliquer ce qui précède. Ainsi  $f_1 - f_2$  est une constante (imaginaire pure). L'étudiant(e) alerte se sera immédiatement dit, dans ces conditions, existe-t-il donc une formule intégrale pour reconstruire f à partir, non plus de f sur le bord, mais de Re(f) sur le bord? Très bonne question, je vous félicite. La réponse est que oui, il existe de telles formules intégrales, mais leur forme dépend de  $\Omega$ , contrairement à la formule de Cauchy qui utilise le noyau  $\frac{1}{w-z}$ qui lui marche pour tous les domaines  $\Omega$ . Si  $\Omega$  est un disque, les formules utilisent ce que l'on appelle le « noyau de Poisson ».  $^{108}$  Si l'on sait transformer  $\Omega$  en un disque par un isomorphisme analytique on peut donc transporter les formules valables pour le disque vers  $\Omega$ . Si l'on se représente  $\Omega$  comme une membrane de tambour, tendue et délimitée par son contour  $\gamma$  alors l'étude des sons qui peuvent être émis par ce tambour est à peu près la même chose que de résoudre ce problème de donner des formules faisant ce que fait Poisson pour le disque. Je ne développerai pas plus avant cela ici. Comme cela j'aurai créé en vous un état de tension et d'angoisse insupportables et cela vous décidera peut-être à chercher à en savoir plus.

<sup>107.</sup> donc ici, le mot « singularité » fait référence non seulement à  $z_j$  mais à la partie principale  $g_j$ . Lorsque la singularité est polaire, cela veut donc dire une information exprimée en un nombre fini de nombres complexes : la position  $z_j$  de la singularité et les coefficients de  $g_j$ .

<sup>108.</sup> on parlera du noyau de Poisson dans la section sur les fonctions harmoniques.

#### 33.2 Théorème de convergence uniforme de Weierstrass

Soit  $(f_n)_{n=0,1,...}$  une suite de fonctions (quelconques) sur un ouvert  $\Omega$  (non vide). Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1. pour tout compact  $K \subset \Omega$  la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur K,
- 2. pour tout disque fermé  $\overline{D(z_0,R)}\subset\Omega$  la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur ce disque,
- 3. pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe r > 0 tel que le disque fermé  $\overline{D(z_0, r)}$  est inclus dans  $\Omega$  et la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur ce disque.
- 4. pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe un compact  $K_{z_0} \subset \Omega$  qui est un voisinage de  $z_0$  et sur lequel la suite  $(f_n)$  converge uniformément.

Preuve:  $1 \implies 2 \implies 3 \implies 4$  est immédiat. Montrons  $4 \implies 1$ . À tout  $z_0$  du compact K associons un compact  $K_{z_0}$  dont l'existence est donnée par 4 et un disque ouvert  $U_{z_0} = D(z_0, \eta_{z_0})$  inclus dans  $K_{z_0}$  et centré en  $z_0$ . Du recouvrement ouvert par les  $U_{z_0}$  du compact K nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini, associé à des points  $w_1$ , ...,  $w_N$ . Alors K est inclus dans l'union finie  $K_{w_1} \cup \cdots \cup K_{w_N}$  ( $\subset \Omega$ ). Lorsque des fonctions convergent uniformément sur des ensembles K et K elles convergent uniformément sur K0 (exercice). Donc par récurrence cela marche aussi pour un nombre fini d'ensembles (d'ailleurs toute preuve pour deux se généralise immédiatement directement pour une preuve pour K1 ensembles).

J'appellerai « convergence quasi-uniforme » la propriété équivalente à chacune des ses assertions. Il doit y avoir une terminologie officielle. Mais pour vous, l'officiel, c'est moi. Donc on utilisera cette terminologie.

Théorème 58 (de Weierstrass)  $Soit(f_n)$  une suite de fonctions analytiques qui converge quasi-uniformément sur un ouvert  $\Omega$ . La fonction limite f est une fonction analytique. De plus la suite des fonctions dérivées  $(f'_n)$  converge quasi-uniformément sur  $\Omega$  vers la fonction dérivée f' (et, par récurrence, idem pour les dérivées supérieures).

Le fait que la fonction limite f soit analytique a été établi dans un chapitre précédent (la propriété d'être analytique est locale donc quitte à remplacer  $\Omega$  par des ouverts plus petits on peut supposer la convergence uniforme sur  $\Omega$ ). Soit  $z_0 \in \Omega$  et soit  $r_0 > 0$  tel que  $\overline{D(z_0, r_0)} \subset \Omega$ . Prenons  $\eta_0 = \frac{r_0}{2}$  et montrons que  $f'_n \Rightarrow f'$  sur  $\overline{D(z_0, \eta_0)}$ . Grâce aux formules de Cauchy pour les disques, c'est immédiat. Soit en effet  $\gamma$  le cercle de centre  $z_0$  et de rayon  $r_0$  parcouru dans le sens direct.

$$\forall z \in \overline{D(z_0, \eta_0)} \quad f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(w)}{(w - z)^2} dw \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw$$

$$\text{donc} \quad |f'_n(z) - f'(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{\sup_{|w - z_0| = r_0} |f_n(w) - f(w)|}{\eta_0^2} |dw| = \frac{2}{\eta_0} \sup_{|w - z_0| = r_0} |f_n(w) - f(w)|$$

On a minoré :  $|w-z|=|w-z_0-(z-z_0)|\geq |w-z_0|-|z-z_0|\geq r_0-\frac{1}{2}r_0=\frac{1}{2}r_0$ . La convergence uniforme de  $f_n$  vers f sur le compact  $|w-z_0|=r_0$  implique donc  $\lim_{n\to\infty}\sup_{|z-z_0|\leq \frac{1}{2}r_0}|f_n'(z)-f'(z)|=0$ , c'est-à-dire  $f_n'\Rightarrow f'$  sur  $\overline{D(z_0,\eta_0)}$ . Donc  $(f_n')$  converge quasi-uniformément vers f' sur  $\Omega$ .

Avant de passer à autre chose, je devrais peut-être dire que Weierstrass n'a jamais énoncé le théorème sous cette forme. Je pense que le vrai théorème de Weierstrass est quelque chose du genre : soit R>0 et soit  $a_j^{(n)}$  des nombres complexes tels qu'il existe une constante M tel que  $\forall n\geq 0, \forall j\geq 0, \ |a_j^{(n)}|\leq MR^{-j},$  de sorte que chacune des séries  $\sum_{j=0}^{\infty}a_j^{(n)}z^j$  a un rayon de convergence au moins R. On suppose que pour tout j la limite  $a_j=\lim_{n\to\infty}a_j^{(n)}$  existe. Alors la série  $\sum_{j=0}^{\infty}a_jz^j$  a un rayon de convergence au moins R et

Pour 
$$|z| < R$$
:  $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$   $(= \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{n \to \infty} a_j^{(n)} z^j)$ 

$$\forall N \ge 1 \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{j=N}^{\infty} a_j^{(n)} j(j-1) \cdots (j-N+1) z^{j-N} = \sum_{j=N}^{\infty} a_j j(j-1) \cdots (j-N+1) z^{j-N}$$

Je crois que cela s'appelle le « M-test » de Weierstrass. Vous remarquerez que la majoration  $\forall n \geq 0, \forall j \geq 0, \ |a_j^{(n)}| \leq MR^{-j}$  ne vaut plus pour les coefficients  $ja_j^{(n)}$  des séries dérivées, mais marche à nouveau en remplaçant R par n'importe quel 0 < R' < R avec une nouvelle constante M'. Il suffit pour cela de s'assurer que  $\forall j \geq 1$   $j \leq (R/R')^j M'/M$ , donc de prendre  $M' = M \sup_{j \geq 1} j(R'/R)^j$  qui est bien  $< \infty$  car  $\lim_{j \to \infty} j(R'/R)^j = 0$ . De cette façon une fois  $\lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{(n)} z^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$  justifié on a automatiquement le résultat pour les séries dérivées successives.

Je vous laisse la preuve du M-test en exercice.

#### 33.3 Fonctions harmoniques

**Théorème 59** Soit  $\Omega$  un ouvert. Soit g une fonction continue, à valeurs réelles ou complexes sur  $\Omega$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1. pour tout  $z_0$  et tout  $r_0$  tel que le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon  $r_0$  est entièrement inclus dans  $\Omega$ ,  $g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + r_0 e^{it}) dt$  (formule de la moyenne),
- 2. pour tout  $z_0 \in \Omega$  il existe  $r_0 > 0$  tel que la formule de la moyenne vaut pour les disques de centre  $z_0$  et de rayons inférieurs ou égaux à  $r_0$ ,
- 3. la fonction g est de classe  $C^2$  et vérifie l'équation de Laplace  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ ,
- 4. la fonction g est de classe  $C^{\infty}$  et vérifie l'équation de Laplace  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ ,
- 5. les fonctions Re(g) et Im(g) peuvent localement s'écrire comme des parties réelles de fonctions analytiques.

Lorsque l'une des ses propriétés est vérifiée on dit que q est une fonction harmonique.

Attention en ce qui concerne le point 5 : il n'existe pour une fonction harmonique absolument aucune connexion entre Re(g) et Im(g). Donc si l'on peut écrire Re(g) = Re(f) avec f analytique il faudra une autre fonction analytique sans aucun rapport avec f pour faire la même chose avec Im(g) (et aussi il est a priori faux que Im(g) = Im(f)).

Par ailleurs dans un Cours mené par un Professeur plus compétent et disposant de plus que onze semaines de deux heures, on vous aurait parlé d'ouverts simplement connexes et on vous aurait expliqué que si  $\Omega$  est simplement connexe alors pour toute fonction harmonique réelle g on peut trouver, non seulement localement mais globalement sur  $\Omega$  tout entier, une fonction analytique f avec g = Re(f).

En ce qui concerne le Théorème je supposerai d'emblée que g est à valeurs réelles, car la validité des assertions pour g est équivalente à la validité des mêmes assertions à la fois pour Re(g) et pour Im(g).

On a certainement  $5 \implies 4 \implies 3$ . Montrons  $3 \implies 5$ : posons  $u = \frac{\partial g}{\partial x}$  et  $v = -\frac{\partial g}{\partial y}$ . Les fonctions u et v sont de classe  $C^1$ . On a  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = +\frac{\partial v}{\partial y}$ . Et aussi on a  $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ . Donc u et v vérifient les équations de Cauchy-Riemann et la

On a déjà vu dans ce chapitre que les fonctions analytiques, et donc aussi leurs parties réelles, vérifient la formule de la moyenne. Donc  $5 \implies 1$ . Montrons maintenant  $1 \implies 3$ . Pour cela nous faisons dans un premier temps l'hypothèse supplémentaire que g est de classe  $C^2$ . Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction  $t \mapsto f(t) = g(z_0 + te^{i\theta})$ . Tout d'abord, on évalue :

$$f'(t) = \cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x} (z_0 + te^{i\theta}) + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y} (z_0 + te^{i\theta})$$

$$f''(t) = \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) (z_0 + te^{i\theta})$$

$$g(z_0 + re^{i\theta}) = g(z_0) + r \cdot (\cos(\theta) \frac{\partial g}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial g}{\partial y}) (z_0) +$$

$$\int_0^r (r - t) \left(\cos^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2\cos\theta \sin\theta \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) (z_0 + te^{i\theta}) dt$$

On intègre par rapport à  $\theta$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{0 \le t \le r} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta = g(z_0) + z\acute{e}ro +$$

Notons J l'intégrale double, et I la même intégrale à la différence près qu'au lieu d'évaluer les doubles dérivées en  $z_0 + te^{i\theta}$  on les évalue au point fixe  $z_0$ . On peut calculer I exactement puisque  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2}$ , etc. . . :

$$I = \int_0^r (r - t) \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) (z_0) dt = +\frac{1}{4} \Delta(g)(z_0) r^2$$

On a de plus  $|J-I| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{0 \leq t \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi} (r-t) M(r) d\theta dt = \frac{1}{2} M(r) r^2$  avec  $M(r) = \sup_{|z-z_0| \leq r} (|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(z_0)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(z_0)| + |\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(z_0)|)$ . Donc :

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - g(z_0) - \frac{1}{4} \Delta(g)(z_0) r^2 \right| \le \frac{1}{2} M(r) r^2$$

et comme  $\lim_{r\to 0} M(r) = 0$  on a, pour toute fonction g de classe  $C^2$ :

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta - g(z_0) \right) = \frac{1}{4} \Delta(g)(z_0)$$

Vérifions les constantes, en testant avec  $z_0 = 0$  et  $g(z) = x^2 + y^2 = r^2$ . Alors  $\Delta(g)$  est constant et égal à 4. De plus  $g(z_0 + re^{i\theta}) = r^2$ ,  $g(z_0) = 0$ , ça marche :  $1 = \frac{1}{4}$ 4. Cette formule montre immédiatement que si la fonction g de classe  $C^2$  vérifie la formule de la moyenne (même seulement pour des cercles de rayon inférieur à  $r(z_0)$  dépendant de  $z_0$ ) alors  $\Delta(g)$  est identiquement nul : g vérifie l'équation de Laplace.

Nous avons donc prouvé  $1 \implies 3$  et même  $2 \implies 3$  mais en faisant l'hypothèse supplémentaire à l'avance que g est de classe  $C^2$ . Je donne maintenant une méthode (qui utilise sans le dire la notion de régularisation par convolution) qui donne  $1 \implies 3$ , sous l'hypothèse g continue. Malheureusement cela ne permet pas sans modifications de faire  $2 \implies 3$  sous la seule hypothèse g continue.

Soit k une fonction de classe  $C^2$  sur  ${\bf R}$ , identiquement nulle pour  $x\geq 1$  et aussi pour  $x \leq \frac{1}{2}$ . On suppose de plus  $\int_{1/2}^1 k(x) x dx = \frac{1}{2\pi}$ , et l'on considère la fonction K(z) = k(|z|). La fonction K est de classe  $C^2$ , nulle pour  $|z| \ge 1$ , vérifie  $\iint_{\mathbf{C}} K(z) \, r dr d\theta = 1$ . Soit  $\epsilon > 0$  et soit  $K_{\epsilon}(z) = \frac{1}{\epsilon^2} K(\frac{z}{\epsilon})$  qui est aussi de classe  $C^2$ , est nulle pour  $|z| \ge \epsilon$ , ne dépend que de |z| et vérifie aussi  $\iint_{\mathbf{C}} K_{\epsilon}(z) \, r dr d\theta = 1$ . Enfin considérons la fonction  $g_{\epsilon}(z) = \iint_{\mathbf{C}} K_{\epsilon}(x+iy) g(z-it) dt$ (x-iy)dxdy. L'intégrale est en fait prise sur le compact  $x^2+y^2 \le \epsilon$ . Elle n'est pas définie pour tout  $z \in \Omega$ . On doit d'abord remplacer  $\Omega$  par, disons, un disque D de rayon R, tel que le disque de rayon  $R + \epsilon$  est inclus dans  $\Omega$ . Le changement de variable  $x + iy \mapsto x' + iy' =$ z-x-iy montre que l'on peut aussi écrire  $g_{\epsilon}(z)=\int_{\mathbb{C}}K_{\epsilon}(z-x'-iy')g(x'+iy')dx'dy'$ . Dans cette intégrale, qui est en fait sur un compact, la variable z est un paramètre, et elle n'apparaît que dans la fonction  $K_{\epsilon}$  qui est de classe  $C^2$ . Donc  $g_{\epsilon}$  est une fonction de classe  $C^2$  de z. Mais revenons à l'expression  $g_{\epsilon}(z) = \iint_{\mathbf{C}} K_{\epsilon}(x+iy)g(z-x-iy)dxdy$ , et passons en coordonnées polaires  $x+iy=re^{i\theta}$  on obtient  $g_{\epsilon}(z)=\iint_{0\leq r\leq \epsilon,0\leq \theta\leq 2\pi}K_{\epsilon}(re^{i\theta})g(z-re^$  $re^{i\theta}$ ) $rdrd\theta = \int_0^{\epsilon} K_{\epsilon}(r) \left( \int_0^{2\pi} g(z - re^{i\theta}) d\theta \right) r dr = \int_0^{\epsilon} K_{\epsilon}(r) 2\pi g(z) r dr = g(z)$ . La fonction  $g_{\epsilon}$  est donc la même que g! (sauf que son domaine de définition est plus petit, mais lorsque  $\epsilon \to 0$  on finit par pouvoir englober tout z de  $\Omega$ ). Donc en fait la fonction continue g est de classe  $\mathbb{C}^2$  lorsqu'elle vérifie la formule de la moyenne, et par ce que nous avons établi auparavant, elle vérifie l'équation de Laplace! 109

Comme je l'ai déjà indiqué, il ne semble pas possible avec cette méthode de traiter l'implication  $2 \implies 3$ . J'explique donc une méthode complètement différente qui permet de s'en sortir.  $^{110}$  On prend  $z_0$  et R > 0 tel que le disque fermé de centre  $z_0$  et de rayon R est inclus dans  $\Omega$ . On utilise le noyau de Poisson  $^{111}$  pour construire à partir de la fonction continue g sur le bord  $|z - z_0| = R$  une fonction G elle aussi continue sur le disque fermé  $|z - z_0| \le R$ , égale à g sur le bord, et égale sur le disque ouvert (par construction) à la partie réelle d'une certaine fonction analytique F. Bon je craque, voici la formule :  $^{112}$ 

$$|z - z_0| < R$$
:  $G(z) = \text{Re}(F(z))$   $F(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{it} + h}{Re^{it} - h} g(z_0 + Re^{it}) dt$   
 $|z - z_0| = R$ :  $G(z) = g(z)$ 

Cela demande un certain travail de montrer que G a toutes les propriétés indiquées (la plus subtile étant la continuité de G sur le disque fermé  $|z-z_0| \leq R$ ). Maintenant la fonction G-g est continue sur le disque fermé et elle vérifie la formule de la moyenne (au sens local de l'assertion 2.) dans l'intérieur, donc elle obéit au principe du maximum. Mais comme elle est nulle sur le bord, elle est donc identiquement nulle à l'intérieur. Donc en fait g=G, g est infiniment différentiable et aussi elle vérifie l'équation de Laplace sur le disque ouvert  $|z-z_0| < R$ . Ainsi  $2 \implies 3$  est établi, et avec cela toutes les équivalences du Théorème caractérisant les fonctions harmoniques.

# 33.4 Sur les cycles homologiquement triviaux

Soit U un ouvert,  $\delta_1, \ldots, \delta_m$  des lacets ( $C^1$  par morceaux) tracés dans  $U, c_1, \ldots, c_m$  des nombres complexes et  $\Gamma$  le 1-cycle  $c_1\delta_1 + \cdots + c_m\delta_m$ . Pour tout point P non situé sur l'union des supports des lacets  $\delta_j$  on peut définir l'indice  $\operatorname{Ind}(\Gamma, P)$  de  $\Gamma$  par rapport à P. Le but de cette annexe est de décrire une preuve de l'équivalence  $2 \Leftrightarrow 3$  du Théorème 7, c'est-à-dire :

<sup>109.</sup> si on avait pris la fonction k donc les fonctions  $K_{\epsilon}$  de classe  $C^{\infty}$  on aurait pu conclure dès ce stade que g est de classe  $C^{\infty}$ . Mais cela est superflu puisque nous avons déjà préalablement montré  $3 \implies 5$ .

<sup>110.</sup> et le pire, c'est que cela rend complètement superflus nos jolis calculs précédents avec le Laplacien...
111. je ne donne pas l'impression d'être très décidé à taper à l'ordinateur ce que c'est que ce noyau de

Poisson. Voir tout de même la ligne ci-dessous. 112. exercice : Re  $\left(\frac{Re^{it}+re^{i\alpha}}{Re^{it}-re^{i\alpha}}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} (r/R)^{|j|} e^{j\,i(\alpha-t)} = \frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\alpha-t)+r^2}$ .

**Théorème 60** La condition nécessaire et suffisante pour que  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  pour toute fonction holomorphe f sur U est que  $\operatorname{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tout point P du complémentaire de U.

On a  $\operatorname{Ind}(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$  et  $z \mapsto \frac{1}{z-z_0}$  est une fonction holomorphe sur U lorsque  $z_0 \notin U$ . Cela règle le cas d'une implication et il faut montrer l'autre, à savoir : si  $\operatorname{Ind}(\Gamma, P) = 0$  pour tout point P du complémentaire de U alors  $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$  pour toute fonction holomorphe f sur U. Tout d'abord une première réduction : a priori les coefficients  $c_j$  du cycle  $\Gamma$  ont le droit d'être complexes  $c_j = a_j + ib_j$ . Notons  $\operatorname{Re}(\Gamma)$  et  $\operatorname{Im}(\Gamma)$  les 1-chaînes  $\sum_j a_j \delta_j$  et  $\sum b_j \delta_j$ . Ce sont aussi des cycles (pourquoi) et il est aussi vrai qu'ils ont des indices nuls par rapport à chaque point P du complémentaire de U (pourquoi). Si l'on sait que l'intégrale sur eux de f(z)dz donne zéro on l'a aussi pour  $\Gamma$  (pourquoi). Bref, on peut d'emblée supposer que les  $c_j$  sont des nombres **réels**.

Pour commencer notons  $[a_j,b_j]$  l'intervalle paramétrant  $\delta_j$ . Lorsque  $t_1 < t_2$  sont donnés dans cet intervalle, on peut considérer, d'une part l'arc I de  $\delta_j$  allant de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$ , d'autre part la corde II allant en ligne droite de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$ , paramétrée linéairement par  $[t_1,t_2]$ , nous noterons cela  $\delta_j^*$  et en troisième part l'homotopie qui déforme I en II via  $H(t,u)=(1-u)\delta_j(t)+u\delta_j^*(t), \ 0\leq u\leq 1, \ t_1\leq t\leq t_2$ . Si  $t_1$  et  $t_2$  sont suffisamment proches alors l'homotopie a lieu dans U. Par le théorème de Cauchy-Gauss, le cycle  $\Gamma^*$  obtenu en remplaçant  $\delta_j$  par  $\delta_j^*$  vérifie  $\int_{\Gamma^*} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz$  pour toute fonction holomorphe sur U, et en particulier il est toujours vrai pour  $\Gamma^*$  qu'il a un indice nul par rapport à tout  $P \notin U$ . <sup>113</sup>

Comme les supports des  $\delta_j$  sont compacts, il existe  $\eta > 0$  tel que tout point du plan complexe à distance au plus  $\eta$  d'un point quelconque du support de  $\Gamma$  est dans U. Par l'uniforme continuité de la fonction continue  $\delta_j$  on peut subdiviser  $[a_j, b_j]$  en un nombre fini de sous-intervalles  $[t_1, t_2]$  tels que l'arc allant de  $\delta_j(t_1)$  à  $\delta_j(t_2)$  est entièrement inclus dans le disque fermé de centre  $\delta_j(t_1)$  et de rayon  $\eta$ . Ce disque est convexe, donc l'homotopie considérée plus haut reste dans ce disque. Ainsi en un nombre fini d'étapes on transforme les lacets  $\delta_j$  en des lignes brisées, linéairement paramétrées, par des homotopies dans U.

<sup>113.</sup> on a autorisé dans le cycle  $c_1\delta_1 + \cdots + c_m\delta_m$  des coefficients réels donc le mot « indice » ne se limite pas exclusivement à des valeurs entières.

Pour chaque sommet d'une telle ligne brisée, prenons un point très proche dont les coordonnées réelles et imaginaires sont des nombres rationnels. Nous pouvons réaliser une homotopie dans U en laissant immobile le sommet d'avant et le sommet d'après et en faisant glisser le sommet considéré, vers le point très proche à coordonnées rationnelles. En un nombre fini d'étapes nous avons transformé ainsi les  $\delta_j$  en des lignes brisées dont les sommets ont des coordonnées rationnelles. Maintenant pour chaque segment je le subdivise en N segments de même longueur, puis je remplace chaque petit segment par un déplacement horizontal puis un déplacement vertical. Si N est très grand, la nouvelle ligne brisée, qui est entièrement constituée de segments soit horizontaux soit verticaux, aux sommets à coordonnées rationnelles, est obtenue à partir de l'ancienne par un nombre fini d'homotopies qui restent dans U et ne changent donc pas les valeurs des intégrales des fonctions holomorphes, en particulier les indices par rapport aux points du complémentaire de U.

Finalement soit Q le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs des coordonnées horizontales et verticales de tous les sommets ainsi construits. Multiplions par Q toute la situation, ouvert U, cycle  $\Gamma$ . Les sommets sont alors à coordonnées entières. Enfin subdivisons encore les segments si nécessaire pour nous ramener à la situation suivante : le cycle  $\Gamma$  est composé de segments horizontaux et verticaux reliant chacun des points à coordonnées entières  $n_1 + in_2$  à soit  $n_1 \pm 1 + in_2$  (segment horizontal vers le plus proche voisin à droite ou à gauche) ou à  $n_1 + in_2 \pm i$  (segment vertical vers le plus proche voisin soit en haut soit en bas). Imaginons le quadrillage du plan complexe donné par toutes les droites verticales d'abscisses entières, et toutes les droites horizontales d'ordonnées entières. Les points d'intersections de toutes ces droites forment un réseau. On dit que deux tels points P et Q sont plus proches voisins si au plus une de leurs coordonnées diffère par plus ou moins un. Un lien est un segment orienté allant soit d'un sommet P à son voisin à l'Est, soit d'un sommet P à son voisin au Nord.

Revenons à notre cycle  $\Gamma$ . Il parcourt chaque lien L un certain nombre de fois dans son sens naturel et un certain nombre de fois dans le sens contraire. Notons  $n_L$  le nombre total algébrique de tels parcours. Seuls un nombre fini de liens ont  $n_L$  non nul. <sup>114</sup> On peut donc écrire  $\Gamma = \sum_L n_L \cdot L$ .

<sup>114.</sup> attention comme on autorise initialement des coefficients réels  $c_j$  dans le cycle, les  $n_L$  sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs des  $c_j$ , ce ne sont pas forcément malgré la notation des nombres entiers.

À tout carré du quadrillage C j'associe le nombre  $n_C$  de la manière suivante :  $n_C = \operatorname{Ind}(\Gamma, P)$  avec P un point quelconque de l'intérieur du carré C. Par hypothèse, si l'intérieur du carré C contient un point hors de U alors  $n_C = 0$ . Supposons même seulement que le bord du carré C a un point Q hors de U. Alors tout point Q' de l'intérieur très proche de Q peut être déformé continûment vers Q tout en évitant le support de  $\Gamma$ . L'indice  $\operatorname{Ind}(\Gamma,Q)$  est nul donc aussi  $\operatorname{Ind}(\Gamma,Q')$  donc  $n_C = 0$ . Donc tout carré fermé C qui contient ne serait-ce qu'un point hors de U vérifie  $n_C = 0$ . Il n'y aura qu'un nombre fini de carrés C avec  $n_C \neq 0$  (car tout point suffisamment éloigné du support de  $\Gamma$  a un indice nul). Soit  $\Delta$  la somme formelle finie  $\sum n_C \cdot C$ , où l'on ne retient que les carrés avec  $n_C \neq 0$ : les C que l'on retient sont donc tous entièrement inclus dans U. Soit  $\Gamma' = \partial \Delta$  le cycle égal au « bord » de  $\Delta$  : c'est-à-dire, à chaque lien orienté L du type Sud-Nord j'associe  $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$  avec  $C_1$  le carré à sa gauche et  $C_2$  le carré à sa droite, et à chaque lien orienté L du type Ouest-Est, j'associe  $n_L = n_{C_1} - n_{C_2}$  avec  $C_1$  le carré du haut et  $C_2$  le carré du bas. On peut aussi écrire, avec des notations auto-explicatives  $\Gamma' = \sum_C n_C \partial C$ .

Je prétends que  $\Gamma'$ , c'est exactement la même chose que  $\Gamma$ . En effet, considérons par exemple un lien L du type Sud-Nord avec le carré  $C_1$  à sa gauche et le carré  $C_2$  à sa droite. Prenons un point  $P_1$  dans (l'intérieur de)  $C_1$  extrêmement proche du milieu du lien L et un point  $P_2$  dans  $C_2$  extrêmement proche du milieu du lien L. Lorsque nous calculons  $n_{C_1} = \operatorname{Ind}(\Gamma, P_1)$ , la contribution du lien L est approximativement égale à  $\frac{1}{2}n_L$ :  $^{115}$  en effet vu de  $P_1$  lorsque l'on parcourt une fois L suivant son orientation la variation de l'argument  $\operatorname{arg}(z-P_1)$  est de presque  $+\pi$ , on divise par  $2\pi$  cela donne  $+\frac{1}{2}$ . De même lorsque nous calculons  $n_{C_2} = \operatorname{Ind}(\Gamma, P_2)$ , la contribution du lien L est approximativement égale à  $-\frac{1}{2}n_L$ : vu de  $P_2$  la variation de l'argument lorsque l'on fait L une fois est de presque  $-\pi$ . La contribution des autres liens formant  $\Gamma$  pour le calcul soit de l'indice par rapport à  $P_1$  soit par rapport à  $P_2$  est quasi-identique pour  $P_1$  et pour  $P_2$ . En faisant tendre  $P_1$  et  $P_2$  vers le milieu du lien L ce qui ne change rien aux indices, on conclut finalement que  $n_{C_1} - n_{C_2} = +\frac{1}{2}n_L - (-\frac{1}{2}n_L) = +n_L$ . On raisonne de même avec les liens du type Ouest-Est.

En conclusion on a  $\Gamma = \Gamma' = \sum_{C} n_{C} \partial C$ . On peut maintenant terminer la preuve : si f est une fonction holomorphe quelconque sur U on a  $\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{C} n_{C} \int_{\partial C} f(z)dz$  et

<sup>115.</sup> si l'on n'avait pas initialement fait la réduction à des  $c_j$  réels, cette affirmation serait fausse. Pourquoi?

par le théorème de Cauchy-Goursat  $\int_{\partial C} f(z)dz = 0$  pour tout carré fermé sur lequel f est holomorphe.

La preuve exhibe le cycle d'origine  $\Gamma$ , à des homotopies près dans U, comme le bord d'une 2-chaîne dans U. Comme chaque modification par homotopie est en particulier une modification par le bord de quelque chose, essentiellement on peut dire que l'on a prouvé que  $\Gamma$  est lui-même le bord de quelque chose inclus dans U. Bref, modulo quelques détails on a, pour ainsi dire prouvé que  $\Gamma$  était bien « homologiquement trivial » (dans U) au sens de la topologie algébrique. Donc en fait non seulement on a établi  $2 \Rightarrow 3$  du théorème 7 mais aussi  $2 \Rightarrow 1$ .

À propos, toute copie d'examen reproduisant la phrase « j'ai donc, modulo quelques détails et pour ainsi dire, résolu la question » se verra sanctionnée impitoyablement...

## 33.5 Ouverts simplement connexes et Théorèmes de Riemann

Sans aucune démonstration, je décris dans cette annexe plusieurs très beaux théorèmes de Riemann (1826-1866).

Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe (non vide). On dit que  $\Omega$  est **simplement connexe** si tout lacet tracé sur  $\Omega$  est homotopiquement trivial dans  $\Omega$ .

Théorème 61 Soit  $\Omega$  ouvert connexe borné. Alors  $\Omega$  est simplement connexe si et seulement si son complémentaire F a la propriété suivante : deux points P et Q dans F étant donnés, et  $\epsilon > 0$  quelconque étant donné, on peut trouver un nombre fini de points de F,  $P_0 = P, P_1, \ldots, P_N = Q$ , tels que la distance de  $P_j$  à  $P_{j+1}$  est au plus  $\epsilon$  pour chaque j.

Théorème 62 Soit  $\Omega$  ouvert connexe non borné. Si  $F = \mathbb{C} \setminus \Omega$  est borné, alors le seul cas pour lequel  $\Omega$  est simplement connexe, c'est  $\Omega = \mathbb{C}$ ,  $F = \emptyset$ . Si F n'est pas borné, alors  $\Omega$  est simplement connexe si et seulement si pour tout point de P de F, tout  $\epsilon > 0$ , tout  $C < \infty$  on peut trouver des points dans F,  $P_0 = P$ ,  $P_1$ , ...,  $P_N$ , tels que la distance de  $P_j$  à  $P_{j+1}$  est au plus  $\epsilon$  pour chaque j, et la distance de l'origine à  $P_N$  est au moins C.

Plus généralement, Riemann dit que  $\Omega$  est m-connexe si son complémentaire a m+1 composantes connexes : il est plus difficile de décrire la notion de composante connexe pour les fermés F que pour les ouverts  $\Omega$ , les énoncés ci-dessus vous donnent une idée, et en fait il faudrait prendre le complémentaire non pas dans  $\mathbf{C}$  mais dans  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$  (sphère de Riemann) pour un énoncé unifié.

Théorème 63 Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe simplement connexe. Toute intégrale le long d'un lacet d'une fonction holomorphe est nulle. Toute fonction holomorphe possède une primitive globalement définie. Toute fonction holomorphe partout non nulle est l'exponentielle d'une fonction holomorphe. Toute fonction harmonique réelle est la partie réelle d'une fonction holomorphe globalement définie.

On en arrive maintenant au théorème le plus extraordinaire de cette section (ce n'est qu'au début du vingtième siècle qu'une preuve complète a été obtenue) :

**Théorème 64** Soit  $\Omega \subset \mathbf{C}$  un ouvert connexe simplement connexe. Alors, soit  $\Omega = \mathbf{C}$ , soit il existe une bijection analytique  $\phi : \Omega \to D(0,1)$  de  $\Omega$  sur le disque unité ouvert.

À ce stade, nous avons en amphi discuté des bijections analytiques, mais pas vraiment encore dans ce polycopié. Si un jour je rédige un Cinquième chapitre, correspondant au dernier mois du cours en amphi, j'en parlerai. Je vous rappelle que nous avons vu par exemple que le demi-plan supérieur  $\mathrm{Im}(z)>0$  est en bijection analytique avec D(0,1) par  $z\mapsto w=\frac{z-i}{z+i}$ , et que la bande  $|\mathrm{Re}(z)|<\frac{\pi}{2}$ ,  $\mathrm{Im}(z)>0$  est en bijection analytique avec le demi-plan supérieur via  $z\mapsto w=\sin(z)$ . L'ouvert  $\mathbf{C}\setminus ]-\infty,0]$  est en bijection analytique avec le demi-plan  $\mathrm{Re}(w)>0$  via  $z\mapsto w=\sqrt{z}$ , et ce dernier est en bijection analytique avec D(0,1) via  $w\mapsto \zeta=\frac{w-1}{w+1}$ .

Par contre, par le théorème de Liouville il ne peut y avoir aucune application analytique  $\phi$  autre que constante de  ${\bf C}$  vers D(0,1): en effet  $\phi$  comme fonction entière bornée doit être constante.

Lorsque que l'on prend des ouverts qui ne sont plus simplement connexes comme les

anneaux  $0 < r_1 < |z| < r_2$ , alors les classes d'équivalence pour l'isomorphisme analytique sont plus nombreuses (pour les anneaux la classe est déterminée par le quotient  $\frac{r_2}{r_1} \in ]1, \infty[.)$ 

À côté du plan complexe  $\mathbf{C}$  et du disque unité D(0,1) il existe encore une troisième entité analytique simplement connexe : il s'agit de la « sphère de Riemann »  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ , qui contrairement à cette écriture est un espace topologique compact (il vaut mieux imaginer  $\infty$  comme le pôle Nord d'une sphère et identifier les autres points de la sphère à  $\mathbf{C}$  en plaçant  $\mathbf{C}$  comme plan équatorial et en projetant les points de la sphère sur le plan via l'intersection avec la droite les reliant au pôle Nord).

Toute entité analytique connexe, simplement connexe, et compacte, est analytiquement équivalente à la sphère de Riemann et cela constitue un autre théorème majeur de l'Analyse mathématique.