Exercices de Christophe Mourougane

Table des matières

I L1 **3**

1 Géométrie en petites dimensions **3**
1.1 242.01 - Inégalité triangulaire . . . 3
1.2 242.01 - Diagrammes de Voronoï . . . 4
1.3 242.01 - Pour aller plus loin . . . 5
1.4 104.05 - Manipulation des fonctions trigonométriques . . . 6
1.5 242.01 - Un peu de géométrie plane . . . 6
1.6 242.01 - Produits scalaires . . . 7
1.7 242.01 - Aires . . . 8
1.8 242.01 - Théorème de Pythagore . . . 9
1.9 242.01 - Découpage . . . 10
1.10 242.01 - Transformations, déplacements . . . 10
1.11 242.01 - Constructions élémentaires . . . 12
1.12 242.01 - Constructions diverses . . . 12
1.13 242.01 - Opérations sur les longueurs . . . 13
1.14 242.01 - Constructions au compas seul . . . 13

II L2 **16**

2 Arithmétique 2 **16**
2.1 203.01 - Groupes et sous-groupes de $\mathbb{Z}$ . . . 16
2.2 203.04 - Anneaux et structure d'anneaux sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . . . 18
2.3 203.04 - Anneaux de polynômes . . . 20
2.4 203.06 - Corps finis . . . 22
2.5 203.04 - Exemples d'anneaux . . . 24
2.6 Révisions . . . 26
2.7 203.99 - Structures algébriques . . . 28
2.8 203.01 - Groupes finis . . . 29

3 Examens **30**
3.1 203.01 - Un examen . . . 30
3.2 203.01 - Un examen . . . 30
3.3 203.04 - Devoir Maison . . . 32
3.4 203.04 - Contrôle continu . . . 32
3.5 203.99 - Examen terminal . . . 33
3.6 203.99 - Examen terminal . . . 36
3.7 203.99 - Examen . . . 38
3.8 203.99 - Examen . . . 39
3.9 203.99 - Examen . . . 40

4 106, 107, 108 - Algèbre linéaire **41**

III L3 43

5 Géométrie euclidienne **43**
5.1 240.00 - Exercices de géométrie affine . . . 43
5.2 204.00 Exercices sur les espaces vectoriels euclidiens . . . 47
5.3 242.00 - Exercices sur les espaces affines euclidiens . . . 48
5.4 242.01-02 - Isométries . . . 54
5.5 241.00 - Constructions par isométrie . . . 56

6 Géométrie euclidienne (Examen) **57**
6.1 242.01-02 Examen 1 . . . 57
6.2 242.01-02 Examen 2 . . . 58
6.3 242.01-02 Examen 3 . . . 59
6.4 242.01-02 Examen 4 . . . 62

7 Fonctions holomorphes **62**
7.1 104.01-02 - Généralités sur les nombres complexes . . . 62
7.2 229.01-07 Topologie . . . 64
7.3 440.00 - Pour apprendre le cours . . . 65
7.4 440.00 - À l'aide des équations de Cauchy-Riemann . . . 65
7.5 440.00 - Etude d'applications holomorphes . . . 67
7.6 440.00 - Biholomorphismes . . . 68
7.7 222.01 - Modes de convergence . . . 69
7.8 220.03-99 - Séries entières . . . 69
7.9 441.00 - Fonctions spéciales . . . 70
7.10 441.00 - Applications logarithmes . . . 70
7.11 444.00 - Intégrales sur les chemins du plan complexe . . . 71
7.12 444.00 - Théorie de Cauchy . . . 72
7.13 220.06 - Développement en séries entières . . . 74
7.14 440.00 - Concept d'holomorphie . . . 75
7.15 443.00 - Singularités isolées . . . 76
7.16 446.00 - Série de Laurent . . . 76
7.17 444.00 - Résidus . . . 77
7.18 444.00 - Calculs à l'aide du théorème des résidus . . . 77
7.19 444.00 - Nombre de zéros . . . 78

8 446.00 - Fonctions holomorphes (Examens) **78**

IV M1 **90**

9 Géométrie différentielle **90**
9.1 352.00 - Courbes dans $\mathbb{R}^n$ . . . 90
9.2 352.00 - Courbes en petites dimensions . . . 92
9.3 352.00 - Surfaces . . . 94
9.3.1 Exemples de surfaces dans $\mathbb{R}^3$ . . . 95
9.4 353.00 - Applications régulières . . . 95
9.5 352.00 - Etude métrique des sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$ . . . 97
9.5.1 Calcul d'aires . . . 98

10 352.00 - Géométrie différentielle (Examen) **101**

11 Théorie des groupes et géométrie **106**
11.1 314.00 - Géométrie projective . . . 112
11.2 320.00 Groupes . . . 116
11.3 320.00 - Groupes abéliens . . . 119
11.4 321.00 - Sous-groupes distingués . . . 120
11.5 320.00 - Résolubilité . . . 121
11.6 320.00 - Simplicité . . . 122
11.7 323.00 - Anneaux d'invariants . . . 122

12 328.00 - Formes bilinéaires **123**
12.1 328.00 - Décomposition et classification . . . 124
12.2 328.00 - Théorème de Witt . . . 125
12.3 314.00 - Géométrie projective . . . 125
12.4 313.00 - Groupes orthogonaux, unitaires et symplectiques . . . 126
12.5 328.00 - Formes sesquilinéaires . . . 127

V M2 - Agrégation **135**

13 Algèbre **135**
13.1 322.00 - Actions de groupes, Théorèmes de Sylow . . . 135
13.2 320.00 - Groupes diédraux ; produit semi-direct . . . 137
13.3 322.00 - Groupes d'ordre inférieur à 12 . . . 138
13.4 322.00 - Simplicité . . . 140
13.5 322.00 Générateurs et simplicité de $\mathscr{A}_5$ et $\mathscr{A}_n$ . . . 140
13.6 320.00 Groupes dérivés, résolubilité . . . 141
13.7 320.00 - Divers . . . 144
13.8 328.00 - Décomposition polaire des matrices . . . 144
13.9 328.00 - Généralités sur les formes bilinéaires et sesquilinéaires . . . 144
13.10 313.00 - Endomorphismes orthogonaux et unitaires . . . 145
13.11 328.00 - Endomorphismes symétriques et hermitiens . . . 146
13.12 313.00 - Quaternions, $SO_3(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$ . . . 148
13.13 328.00 - Classification des coniques euclidiennes affines . . . 148

Première partie
L1

1 Géométrie en petites dimensions

Exercices de Christophe Mourougane et Lionel Fourquaux.

1.1 242.01 - Inégalité triangulaire

Exercice 7249

Soient P, Q, R trois points du plan. Dans cet exercice, on notera $\vec{u}\cdot\vec{v}$ le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$(\vec{QP}+\lambda\vec{QR})^2 = \vec{QP}^2 + 2\lambda\vec{QP}\cdot\vec{QR} + \lambda^2\vec{QR}^2.$$
2. En considérant le discriminant du polynôme (en la variable λ) de droite dans l'égalité précédente, montrer que
$$\left|\vec{QP}\cdot\vec{QR}\right| \leqslant QP \times QR.$$

3. Montrer que
$$\vec{PR}^2 = \vec{QP}^2 - 2\vec{QP}\cdot\vec{QR} + \vec{QR}^2.$$
4. En déduire que
$$PR \leqslant PQ + QR.$$
5. Montrer que $PR = PQ + QR$ si et seulement si $Q \in [PR]$.
6. On considère maintenant quatre points P, Q, R et S. Montrer que
$$PS \leqslant PQ + QR + RS$$
et caractériser les configurations de quatre points P, Q, R et S qui vérifient l'égalité $PS = PQ + QR + RS$.

[007249]

1.2 242.01 - Diagrammes de Voronoï

Exercice 7250 Diagramme de Voronoï. Médiatrice, diagramme de 2 points

Un *diagramme de Voronoï* est une famille de parties du plan (ou de l'espace, mais dans cet exercice on se limitera au plan) et de points associés telle que :
— chaque partie du plan a un unique point associé, qui est contenu dedans ;
— chaque partie est exactement égale à l'ensemble des points du plan qui sont plus proches du point associé à cette partie que des points associés aux autres parties.

Autrement dit, c'est une famille $(A_i, P_i)_{i\in I}$, où :
— I est un ensemble ;
— pour tout $i \in I$, A_i est une partie (i.e. un sous-ensemble) du plan et $P_i \in A_i$;
— pour tout $i \in I$, on a (en notant $\mathscr{P}$ le plan) :
$$A_i = \left\{\, Q \in \mathscr{P} \;/\; \forall j \in I\setminus\{i\}\; P_iQ \leqslant P_jQ \,\right\}.$$

Les parties A_i sont appelées les *cellules* du diagramme de Voronoï. Le point P_i associé à la cellule A_i est appelé le *germe* de la cellule.
Les diagrammes de Voronoï sont un outil utile pour représenter les zones de couverture d'antennes radio, ou pour étudier l'implantation d'écoles, d'hôpitaux, de bureaux de poste, etc, dans une région.

1. Soient A et B deux points du plan. Montrer que l'ensemble des points équidistants de A et B (autrement dit, l'ensemble des points P du plan tels que $PA = PB$) est une droite (qu'on notera Δ, et qui est appelée la *médiatrice* du segment $[AB]$).
2. Montrer que la droite Δ est orthogonale à la droite (AB).
3. Montrer que l'ensemble des points P du plan tels que $PA \leqslant PB$ est le demi-plan de frontière Δ contenant A.
4. Quel est le diagramme de Voronoï d'un ensemble de deux points distincts ?

[007250]

Exercice 7251 Diagramme de Voronoï

Soit $(A_i, P_i)_{i\in I}$ un diagramme de Voronoï. Si $i, j \in I$ avec $i \neq j$, notons $\Pi_{i,j}$ le demi-plan de frontière la médiatrice du segment $[P_iPj]$ et qui contient le point P_i.

1. Montrer que, pour tout $i \in I$, on a :
$$A_i = \bigcap_{j\in I\setminus\{i\}} \Pi_{i,j}.$$
2. Dessiner le diagramme de Voronoï de trois points formant un triangle équilatéral.

[007251]

Exercice 7252 Diagramme de Voronoï

1. Que dire de la frontière entre deux cellules de Voronoï ?
2. Que dire du point commun à trois cellules de Voronoï, appelé sommet de Voronoï ?
3. Que dire du cercle centré en un sommet de Voronoï et passant par un germe d'une des trois cellules ?
4. Ajouter un point au triangle équilatéral de l'exercice précédent, et tracer le nouveau diagramme de Voronoï.
5. Ajouter un cinquième point très proche d'un sommet de Voronoï et tracer le nouveau diagramme de Voronoï. Toutes les cellules ont-elles changé ?

[007252]

Exercice 7253 Convexité des cellules de Voronoï

On dit qu'une partie X du plan (ou de l'espace) est *convexe* si elle vérifie :

$$\forall (P,Q) \in X^2 \quad [PQ] \subset X,$$

autrement dit, pour tout couple (P,Q) de points de X, le segment $[PQ]$ tout entier est contenu dans X.

1. Montrer qu'une intersection de parties convexes du plan est convexe.
2. En déduire que les cellules d'un diagramme de Voronoï sont convexes.

[007253]

1.3 242.01 - Pour aller plus loin

Exercice 7254

On rappelle qu'un quadrilatère d'un espace euclidien E est un *parallélogramme* si ses diagonales se coupent en leur milieu, appelé centre du parallélogramme.
Cette définition est aussi valable en dimension 1 et pour les cas où deux sommets coïncident. (Dans ces cas, le parallélogramme est plat).
On dit que deux bipoints (A,B) et (C,D) sont *équipollents* si le quadrilatère $(ABDC)$ est un parallélogramme.

1. Vérifier que pour tout couple de points (A,B), les bipoints (A,B) et (A,B) sont équipollents. On dit alors que la relation d'équipollence est *réflexive*.
2. Montrer que pour tous bipoints (A,B) et (C,D), si les bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents alors les bipoints (C,D) et (A,B) le sont aussi. On dit alors que la relation d'équipollence est *symétrique*.
3. Démontrer que la relation d'équipollence est *transitive*, c'est à dire que pour tous triplets (A,B), (C,D) et (F,G) de bipoints, si les bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents et si les bipoints (C,D) et (F,G) sont équipollents alors les bipoints (A,B) et (F,G) le sont aussi. (Indication : dans le cas où le quadrilatère $(ABGF)$ n'est pas plat, on pourra considérer la droite joignant les centres des parallélogrammes $(ABDC)$ et $(CDGF)$; dans le cas où le quadrilatère $(ABGF)$ est plat, on pourra utiliser le théorème de Thalès.)
4. On résume les trois propriétés précédentes en disant que la relation d'équipollence est *une relation d'équivalence*. La *classe d'équipollence* du bipoint (A,B) est par définition l'ensemble des bipoints équipollents à (A,B). Elle est appelée *vecteur* et notée $\vec{AB}$. Si (C,D) est équipollent à (A,B), on dit que (C,D) est un *représentant* de $\vec{AB}$. Montrer qu'étant donné un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$. On notera $B = t_{\vec{u}}(A)$.
5. Étant donnés un point A et un représentant (F,G) du vecteur $\vec{u}$, construire à la règle et au compas le point $t_{\vec{u}}(A)$.
6. Montrer que si deux bipoints (A,B) et (C,D) sont équipollents, alors les bipoints (A,C) et (B,D) le sont aussi.

7. On définit la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par le procédé suivant :
   - On choisit un point A.
   - On détermine le point B tel que $\vec{AB} = \vec{u}$.
   - On détermine le point C tel que $\vec{BC} = \vec{v}$.
   - On définit $\vec{u} + \vec{v} := \vec{AC}$.

   Montrer que la *somme* ainsi définie est indépendante du choix du point de base A, c'est à dire, montrer que si on choisit un autre point A' comme point de base, le bipoint (A', C') construit alors est équipollent au bipoint (A, C) construit en partant du point A. (Indication : On pourra montrer que (A, A') est équipollent à (C, C').)

[007254]

1.4 104.05 - Manipulation des fonctions trigonométriques

Exercice 7255

Soit θ un nombre réel.

1. À l'aide des formules d'addition, calculer $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
2. Vérifier la validité des formules obtenues pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/3$.
3. Calculer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
4. Vérifier la validité des formules obtenues pour $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/3$.

[007255]

Exercice 7256

1. Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
2. En effectuant un changement de variables à préciser, montrer que pour tous réels p et q on a :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

3. En déduire les solutions de l'équation suivante :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

[007256]

Exercice 7257

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$.
2. À l'aide une méthode similaire, résoudre l'équation $\cos(x) + \sin(x) = 1$.

[007257]

1.5 242.01 - Un peu de géométrie plane

Exercice 7258

Construire à la règle et au compas un angle de mesure $\pi/12$. [007258]

Exercice 7259

1. On dit qu'un angle est inscrit dans un cercle si son sommet appartient à ce cercle. Démontrer le théorème des angles inscrits :

   Deux angles de vecteurs inscrits dans un cercle interceptant le même arc de cercle sont de même mesure.
2. Soient $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ deux cercles ayant deux points d'intersection I et J. Soient A et M deux points distincts de $\mathscr{C}_1$ (et différents de I et J). On note B le point d'intersection de la droite (AJ) avec $\mathscr{C}_2$ et N le point d'intersection de la droite (MJ) avec $\mathscr{C}_2$.

   En considérant la somme des mesures des angles des triangles AIB et MIN, montrer que $\text{Mes}\widehat{AIB} = \text{Mes}\widehat{MIN}$.

[007259]

Exercice 7260

Soit E un plan euclidien orienté, muni d'un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé direct.

1. Soit n un entier naturel supérieur à 3. Exprimer à l'aide des fonctions trigonométriques cos et sin, le périmètre p_n d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique (c'est à dire le cercle de centre 0 et de rayon 1.)
2. On rappelle que pour tout $\theta \in]0,\pi/2[$,

$$\theta\cos\theta \leqslant \sin\theta \leqslant \theta.$$

   Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite et déterminer cette limite.

[007260]

Exercice 7261

1. Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O, P et Q deux points de $\mathscr{C}$ non diamétralement opposés. Calculer $\text{Mes}\widehat{OPQ}$ en fonction de $\text{Mes}\widehat{POQ}$.
2. Soit d la droite perpendiculaire à (OP) passant par P. En calculant la distance entre O et tout point M de la droite d, montrer que P est l'unique point d'intersection entre d et $\mathscr{C}$. La droite d est appelée *tangente au cercle $\mathscr{C}$ en P*.

1.6 242.01 - Produits scalaires

Exercice 7262

Soit E un plan et $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère. On considère l'application

$$\phi : (\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto xx' + 3yy'.$$

(a) Montrer que ϕ est un produit scalaire.

(b) Déterminer un repère $(O,\vec{I},\vec{J})$ du plan orthonormé pour ce produit scalaire.

(c) Calculer $\phi(X\vec{I}+Y\vec{J},X'\vec{I}+Y'\vec{J})$.

[007262]

Exercice 7263

Soit E un plan et $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère. Soient α et β des nombres réels. On considère l'application

$$\varphi : (\vec{u}\,(x,y)\,, \vec{u'}\,(x',y')) \mapsto \alpha xx' + \beta yy'$$

(a) Montrer que φ est un bilinéaire et symétrique.

(b) Montrer que φ est un produit scalaire si, et seulement si, α et β sont strictement positifs.

(c) Montrer que l'application

$$\psi : (\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) \mapsto 2xx' + yy' + xy' + x'y$$

est un produit scalaire. *Indication :* Chercher une identité remarquable.

[007263]

Exercice 7264

Soit E un plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{I}, \vec{J})$. Soit $\vec{u}$ un vecteur de norme 1 et de coordonnées $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ dans le repère $(0, \vec{I}, \vec{J})$.

(a) Calculer le produit scalaire $\vec{I} \cdot \vec{u}$.

(b) Calculer, à l'aide de la définition de la fonction cosinus, la quantité $||\vec{I}||\ ||\vec{u}|| \cos\widehat{(\vec{I}, \vec{u})}$.

(c) Reprendre les calculs précédents, sans l'hypothèse que $\vec{u}$ est de norme 1.

[007264]

1.7 242.01 - Aires

Exercice 7265

Montrer que si A est inclus dans une partie B d'un plan euclidien E, alors

$$\mathscr{A}(A) \leqslant \mathscr{A}(B).$$

[007265]

Exercice 7266

Soit ABC un triangle dans un plan euclidien orienté E. On notera $a = BC, b = CA$ et $c = AB$ et $\hat{A} = \widehat{(BAC)}$. Notons p la moitié de son périmètre.

(a) Montrer que

$$2p(p-a) = bc + \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$
$$2(p-b)(p-c) = bc - \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

(b) En déduire que l'aire du triangle ABC est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

[007266]

Exercice 7267

Soit ABC un triangle. Notons Δ_A, Δ_B et Δ_C les bissectrices des angles en A, B, C respectivement. On note aussi a, b, c les longueurs BC, CA et AB respectivement, et α, β, γ les mesures des angles (non orientés) $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ respectivement.

(a) Montrer que si Δ_A est parallèle à Δ_B, alors le triangle ABC est plat. On supposera dans la suite de l'exercice que ce triangle n'est pas plat.

(b) Montrer que pour tout point P de Δ_A, la distance de P à la droite (AB) est égale à la distance de P à la droite (AC).

(c) En déduire que le point d'intersection de Δ_A et de Δ_B, que l'on notera Ω, est équidistant de (AB), (BC) et (CA). On admettra que cela permet de démontrer que $\Omega \in \Delta_C$.

(d) On note A' le projeté orthogonal de Ω sur la droite (BC), c'est-à-dire l'unique point $A' \in (BC)$ tel que $(\Omega A') \perp (BC)$. De même, on note B' le projeté orthogonal de Ω sur (CA) et C' le projeté orthogonal de Ω sur (AB). Montrer que $AB' = AC'$.

(e) On admet que $A' \in [BC]$, $B' \in [CA]$, $C' \in [AB]$. Montrer que

$$2AB' + a = 2AB' + A'B + A'C = 2AB' + BC' + CB' = b + c.$$

(f) On note $p = \frac{a+b+c}{2}$. Montrer que $AB' = p - a$.

(g) On note $r = \Omega A'$. Montrer que

$$r = (p-a)\tan\frac{\alpha}{2} = (p-b)\tan\frac{\beta}{2} = (p-c)\tan\frac{\gamma}{2}.$$

(h) En utilisant les formules d'addition pour sin et cos, montrer que

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}} \quad \text{et} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

(i) Montrer que $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$. En déduire que

$$\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\tan\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}\tan\frac{\gamma}{2}}.$$

(j) En déduire que $(p-a)(p-b)(p-c) = r^2 p$, puis que l'aire du triangle ABC est

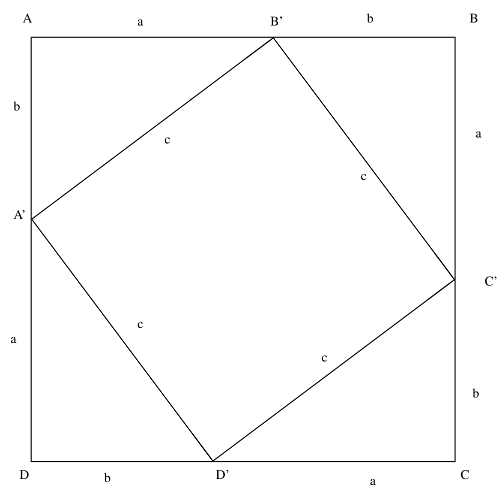
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

[007267]

1.8 242.01 - Théorème de Pythagore

Exercice 7268

Soit $\mathscr{T}$ un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit mesurent a et b, et l'hypoténuse c. On construit dans un carré $ABCD$ de côté $a+b$ les points $A'B'C'D'$ sur les côtés aux distances indiquées des extrémités.



Montrer que $A'B'C'D'$ est un carré. En déduire une démonstration du théorème de Pythagore. [007268]

Exercice 7269

Soit ABC un triangle équilatéral de côté a. Soit B' le milieu de $[AC]$. Soit L le point de $[BB']$ tel que $B'L = a/2$. Soit d la droite orthogonale à (BB') qui passe par L. Soit M un point d'intersection de d avec le cercle de diamètre $[BB']$. Calculer BM. [007269]

1.9 242.01 - Découpage

Exercice 7270

Le *théorème de Bolyai* affirme que deux polygones de même aire peuvent toujours être obtenus l'un à partir de l'autre par découpage et recollement. On va étudier le découpage d'un triangle équilatéral pour obtenir un carré de même aire.

On considère un triangle équilatéral ABC que l'on souhaite découper de façon à pouvoir le transformer en un rectangle, voire un carré.

(a) On part du triangle équilatéral ABC et on place un point D sur $[BC]$ tel que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. On construit ensuite E sur le même segment tel que $DE = \frac{1}{2}BC$. On joint D au milieu B' de $[AC]$, et on appelle H et K les projetés orthogonaux de C' et E sur $[B'D]$.
On suppose le découpage effectué selon le modèle des figures a et b donne un rectangle sur la figure *b*. Refaire des figures en choisissant D proche de B. Montrer en utilisant le fait que la figure b est un rectangle avec coïncidence de certains points que :
   i. B' et C' sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$,
   ii. $DE = \frac{1}{2}BC$,
   iii. $KE = HC'$,
   iv. $DH = KB'$.

(b) Montrer que $DEB'C'$ est un parallélogramme.

(c) En déduire que les triangles $BC'D$ et $CB'E$ ont deux côtés et un angle égaux. Peut-on en déduire qu'ils sont isométriques ?

(d) On part du triangle équilatéral ABC et on place un point D sur $[BC]$ tel que $0 < BD < \frac{1}{2}BC$. On construit ensuite E sur le même segment tel que $DE = \frac{1}{2}BC$. On joint D au milieu B' de $[AC]$, et on appelle H et K les projetés orthogonaux de C' et E sur $[B'D]$.
Montrer que l'on obtient bien un rectangle en découpant la figure comme indiqué sur les figures c et d .

(e) Calculer, en fonction du côté a du triangle, les longueurs des côtés du rectangle obtenu dans le cas où les points D et E sont au quart et trois quart du segment $[BC]$. Ce rectangle est-il un carré ?

(f) Déterminer la position de D pour laquelle on obtient effectivement un carré. On précisera la longueur $B'D$ à l'aide d'un calcul d'aire.

[007270]

1.10 242.01 - Transformations, déplacements

Exercice 7271

(a) Une translation transforme-t-elle une droite en une droite qui lui est parallèle ?

(b) Montrer qu'une translation conserve le parallélisme, c'est à dire qu'elle transforme deux droites parallèles $d_1 // d_2$ en deux droites parallèles $d_1' // d_2'$.

(c) Reprendre les questions pour une rotation.

[007271]

Exercice 7272

Soit E un plan euclidien et A et B deux points de E

(a) Déterminer la composée de l'homothétie de centre A et de rapport 2 avec l'homothétie de centre B et de rapport $1/2$. On pourra construire l'image de quelques points.

(b) Déterminer la composée de l'homothétie de centre A et de rapport 2 avec l'homothétie de centre B et de rapport 3.

(c) Que dire en général de la composé de deux homothéties ?

(d) Que dire de la composée d'une homothétie et d'une translation ?

[007272]

Exercice 7273

(a) Soit d une droite d'un plan euclidien orienté E de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur orthogonal à $\vec{u}$. Déterminer la composée de la symétrie axiale s_d d'axe d avec la translation t de vecteur $\vec{u}$. *Indication : on pourra décomposer la translation comme composée de deux symétries bien choisies.*

(b) Soit d une droite d'un plan euclidien orienté E de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit A un point de d. Déterminer la composée de la symétrie axiale s_d d'axe d avec la rotation r de centre A et d'angle $\pi/4$.

[007273]

Exercice 7274

On rappelle que l'*homothétie* de centre O et de rapport λ, pour O un point du plan $\mathscr{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est l'application de $\mathscr{P}$ dans lui-même qui à un point $P \in \mathscr{P}$ associe l'unique point Q vérifiant $\overrightarrow{OQ} = \lambda \overrightarrow{OP}$. Dans cet exercice, on considère une homothétie h de centre O et de rapport λ.

(a) Montrer que si $\lambda \neq 1$, alors O est l'unique point du plan dont l'image par h est lui-même.

(b) La propriété précédente est-elle vraie si $\lambda = 1$? (Rappel : votre réponse doit être accompagnée d'une démonstration.)

(c) Si P est un point du plan autre que O, montrer que $h(P)$ est un point de la droite (OP) (*indication : on pourra considérer les vecteurs* $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{O\,h(P)}$).

(d) En déduire que si $\mathscr{D}$ est une droite passant par le point O, alors $h(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$. (Rappel : on note $h(\mathscr{D})$ l'ensemble des points $h(P)$ pour $P \in \mathscr{D}$.)

(e) En considérant l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\lambda}$, en déduire que $h(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ (avec les mêmes notations qu'à la question précédente).

(f) Soint Δ une droite. On admet dans cet exercice que $h(\Delta)$ est aussi une droite. Montrer que si Δ et $h(\Delta)$ ont un point commun et si $\lambda \neq 1$ alors ce point commun est O.

(g) En déduire que si Δ est une droite ne passant pas par O et si $\lambda \neq 1$ alors les droites Δ et $h(\Delta)$ sont parallèles et sont deux droites distinctes.

(h) Montrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle. (Attention, dans cette question, il n'y a plus d'hypothèse particulière sur la droite considérée, ni sur le rapport de l'homothétie.)

[007274]

1.11 242.01 - Constructions élémentaires

Exercice 7275

(a) Étant donnés deux points A et B du plan, construire à la règle et au compas la médiatrice du segment $[AB]$. (Indication : on pourra, à l'aide du compas, construire deux points équidistants de A et B.)

(b) Étant donné un cercle $\mathscr{C}$ dont on ne connaît pas le centre, déterminer son centre par une construction à la règle et au compas. (*Indication :* on pourra utiliser la question précédente.)

[007275]

Exercice 7276

Étant données deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, on veut construire la bissectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$.

(a) Comment construire au compas deux points $P \in]OA)$ et $Q \in]OB)$ de sorte que le triangle OPQ soit isocèle ?

(b) Montrer que la médiatrice du segment $[PQ]$ est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{POQ}$. (Indication : utiliser une symétrie axiale bien choisie.)

(c) Expliquer comment construire à la règle et au compas la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

[007276]

Exercice 7277

Comment construire, au compas seul, le symétrique d'un point par rapport à une droite ? Comment construire à la règle et au compas le projeté orthogonal d'un point sur une droite ? [007277]

Exercice 7278

Étant donnés trois points A, B, C non alignés, construire au compas seul le point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. [007278]

1.12 242.01 - Constructions diverses

Exercice 7279

Étant données trois droites concourantes, construire un triangle dont ce sont les médiatrices. (Indication : on pourra considérer l'application composée des trois symétries axiales correspondantes, et ses points fixes.) [007279]

Exercice 7280 Construction du pentagone régulier

(a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(5\theta) = 16\cos(\theta)^5 - 20\cos(\theta)^3 + 5\cos(\theta).$$

(b) En déduire que

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On vérifiera que

$$16X^5 - 20X^3 + 5X + 1 = (X+1)(4X^2 - 2X - 1)^2.$$

(c) Quelle est la longueur des côtés d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ? celle d'un décagone régulier ?

(d) On considère la construction suivante :

Les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont deux diamètres orthogonaux d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O. Notons $\mathscr{C}_1$ le cercle de diamètre $[AO]$, et P et Q les points d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et de la droite passant par C et par le centre de $\mathscr{C}_1$. Soient R_0 et R_1 les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre C passant par P, et soient S_0 et S_1 les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et du cercle de centre C passant par Q. Calculer les longueurs CP et CQ.

(e) En déduire la mesure des angles $\widehat{COR_0}$ et $\widehat{COS_0}$.

(f) En déduire que les points $DR_0S_0S_1R_1$ forment un pentagone régulier.

[007280]

1.13 242.01 - Opérations sur les longueurs

Exercice 7281

Étant donnés quatre points A, B, C, D, construire à la règle et au compas deux points dont la distance soit $AB+CD$. Même question pour $AB-CD$. [007281]

Exercice 7282

Étant données trois longueurs a, b et c, construire à la règle et au compas la longueur $\frac{ab}{c}$. (Indication : on pourra considérer la figure ci-dessous.)

[007282]

Exercice 7283

Étant données deux longueurs a et b, construire à la règle et au compas la longueur $\sqrt{ab}$. (Indication : on pourra considérer la figure ci-dessous.)
Pourquoi, dans cet exercice et dans le précédent, a-t-on considéré les longueurs $\frac{ab}{c}$ et $\sqrt{ab}$ plutôt que ab, $\frac{a}{c}$ et $\sqrt{a}$?

[007283]

1.14 242.01 - Constructions au compas seul

Exercice 7284 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r, et soit P un point. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par P et qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points A et B. La *puissance* du point P par rapport au cercle $\mathscr{C}$ est le produit scalaire $\vec{PA}\cdot\vec{PB}$.

Montrer que la puissance de P par rapport à $\mathscr{C}$ est égale à OP^2-r^2. (Indication : utiliser le théorème de Pythagore.) Dépend-elle de la droite $\mathscr{D}$ choisie ? [007284]

Exercice 7285 Inversions

(a) Si Ω est un point et si λ est un réel non nul, l'*inversion* de centre Ω et de rapport λ est l'application du plan privé de P dans lui-même qui au point P associe l'unique point $P' \in (\Omega P)$ tel que $\vec{\Omega P} \cdot \vec{\Omega P'} = \lambda$. Montrer que les inversions sont involutives, c'est-à-dire que ce sont des bijections qui sont leur propre bijection réciproque.

(b) Montrer que l'ensemble des points fixes d'une inversion est un cercle.

(c) Montrer que si $\mathscr{C}$ est un cercle tel que la puissance de Ω par rapport à $\mathscr{C}$ est λ, et si ι est l'inversion de centre Ω et de rapport λ, alors $\iota(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$.

(d) Si Δ est une droite qui ne passe pas par Ω, montrer que son image par l'inversion de centre Ω et de rapport λ est un cercle passant par Ω privé du point Ω. (Indication : noter H le projeté orthogonal de Ω sur Δ, ι l'inversion ; en appliquant une homothétie de centre Ω bien choisie on peut supposer que $\iota(H) = H$; montrer alors que $P \in \Delta$ si et seulement si $\vec{\Omega\iota(P)} \cdot \vec{H\iota(P)} = 0$.)

(e) Montrer que l'image par une inversion d'un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion est un cercle. (Indication : utiliser une homothétie de même centre que l'inversion pour se ramener à la question 2c.)

[007285]

Exercice 7286 Intersection d'un cercle et d'une droite

On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et deux points distincts A et B. On veut construire au compas seul les points d'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et de la droite (AB).

(a) Si $O \notin (AB)$, expliquer comment construire ces deux points. (*Indication :* on pourra construire le symétrique du cercle $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (AB), en utilisant l'exercice 7277.)

(b) Si $O \in (AB)$, on se ramène à une intersection de cercles en utilisant une inversion. Plus précisément, on considère la construction suivante.

Soit $\mathscr{C}'$ un cercle passant par A, qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points D et E. Soit F le symétrique de O par rapport à la droite (DE), et soit G un point tel que le triangle OFG soit équilatéral. Montrer que $G \in (DE)$ et expliquer comment le construire au compas seul.

(c) Montrer que G a la même puissance par rapport à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$. En déduire qu'il existe une inversion ι de centre G telle que $\iota(\mathscr{C}) = \mathscr{C}$ et $\iota(\mathscr{C}') = \mathscr{C}'$.

(d) On note $\mathscr{C}''$ l'image de la droite (OA) par l'inversion ι (en ajoutant son centre G pour avoir un cercle), et on note I le centre de $\mathscr{C}''$. Montrer que les droites (GI) et (OA) sont orthogonales.

(e) Soit H l'intersection du cercle $\mathscr{C}'$ et de la droite (AG) qui n'est pas A. Montrer que $\iota(A) = H$.

(f) Montrer que I est sur la médiatrice du segment $[GH]$. Comment construire au compas seul deux points de cette médiatrice ?

(g) Comment construire deux points de la perpendiculaire à (OA) passant par G ? (*Indication :* construire le symétrique de G par rapport à (OA).)

(h) Montrer que I est l'intersection de la médiatrice de $[GH]$ et de la perpendiculaire à (OA) passant par G (voir l'exercice 7287 pour comment construire cette intersection au compas seul).

(i) En déduire comment construire $\mathscr{C}''$. (*Indication :* $G \in \mathscr{C}''$.)

(j) On note M et M' les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Montrer que $\iota(M)$ et $\iota(M')$ sont les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et (AB).

(k) Montrer que $\iota(M)$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite (GM), autre que M.

[007286]

Exercice 7287 Intersection de deux droites

On considère quatre points distincts A, B, C, D, tels que les droites (AB) et (CD) soient sécantes en un point X. On veut construire le point X au compas seul.

(a) À l'aide de l'exercice 7278, expliquer comment construire la parallèle Δ à (AB) passant par D.

(b) Construire un point O équidistant de C et D, et F le point d'intersection du cercle de centre O passant par C et D avec ma droite Δ, autre que D. On note H et H' les points d'intersection du cercle de centre C passant par F avec la droite (AB). Comment construire ces points au compas seul ?

(c) Construire le centre K de $\mathscr{C}$, un des deux cercles de rayon OC passant par C et H. De même, construire le centre K' de $\mathscr{C}'$, un des deux cercles de rayon OC passant par C et H'. Montrer que le point C est commun à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

(d) Notons α la mesure de l'angle $\widehat{AXD}$. En supposant que les points sont disposés comme sur la figure ci-dessus, montrer que :
   i. la mesure de $\widehat{CDF}$ est α ;
   ii. la mesure de $\widehat{COF}$ est 2α ;
   iii. la mesure de $\widehat{CKH}$ est 2α ;
   iv. la mesure de $\widehat{CK'H'}$ est 2α.

(e) Notons ζ le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et (AB) autre que C. Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{C\zeta H}$ est α. En déduire que $\zeta = X$.

(f) Montrer que les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont C et X.

[007287]

Exercice 7288

La notion de «construction au compas» est un peu ambiguë. On distingue :

— le *compas traçant*, qui permet, à partir de deux points A et B, de construire le cercle de centre A passant par B ;

— le *compas transporteur*, qui permet, à partir de trois points A, B et C, de construire le cercle de centre A et de rayon BC (il permet de «transporter» la distance BC, d'où son nom).

Le compas transporteur permet évidemment toutes les constructions possibles au compas traçant. Le but de cet exercice est de montrer que toute construction au compas transporteur peut être transformée en une construction au compas traçant.

On considère trois points A, B et C, deux à deux distincts.

(a) Construire, au compas traçant, deux points de la médiatrice du segment $[AB]$.

(b) Construire, au compas traçant, le symétrique C' de C par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$.

(c) Montrer que $AC' = BC$.

(d) Construire, au compas traçant, le cercle de centre A et de rayon BC.

Remarques. La question de savoir quelles constructions peuvent être faites au compas seul (sans règle) a été étudiée dans l'espoir d'obtenir des constructions plus précises. (Il est plus facile de fabriquer un bon compas qu'une règle vraiment droite.)

D'après le théorème de Mohr et Mascheroni, les constructions réalisables au compas seul sont exactement les mêmes que celles réalisables à la règle et au compas, à condition de considérer qu'une droite est construite à partir du moment où on en connaît deux points. On peut trouver plus de renseignements sur ce théorème dans le livre *Leçons sur les constructions géométriques* d'Henri Lebesgue.

[007288]

Exercice 7289

La question de trouver le centre d'un cercle à la règle et au compas a été étudiée à l'exercice 7275. On étudie maintenant une construction au compas seul.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle (dont on ne connaît pas le centre). Soit A un point de $\mathscr{C}$, et soit $\mathscr{C}'$ un cercle de centre A, qui coupe $\mathscr{C}$ en deux points B et B'. Les cercles de centres B et B' passant par A se coupent en un autre point D. Notons $\mathscr{C}''$ le cercle de centre D passant par A, et notons F et F' les points d'intersection de $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$. Finalement, notons Ω l'autre point d'intersection des cercles de centres F et F' passant par A.

(a) Notons O le centre du cercle $\mathscr{C}$, r son rayon, a le rayon du cercle $\mathscr{C}'$. Montrer que l'on a $\vec{OA}\cdot\vec{OD} = r^2 - a^2$. (Indication : considérer la puissance du point O par rapport au cercle de centre B passant par A.)

(b) En déduire que $\vec{DA} = \frac{a^2}{r^2}\vec{OA}$ et $DA = \frac{a^2}{r}$.

(c) En considérant la puissance de D par rapport au cercle de centre F passant par A, montrer de même que $\vec{\Omega A} = \frac{a^2}{DA^2}\vec{DA}$.

(d) En déduire que $\Omega = O$.

[007289]

Deuxième partie

L2

2 Arithmétique 2

2.1 203.01 - Groupes et sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Exercices à savoir faire

Exercice 7290

(a) Soit $(G,\star)$ un groupe. Donner la définition du sous-groupe engendré par une partie P de G.

(b) Soit $(G,\star)$ un groupe. Décrire le sous-groupe engendré par un élément g de G.

(c) Décrire le sous-groupe engendré par un élément n de $(\mathbb{Z},+)$.

[007290]

Exercice 7291

(a) Dire si les couples suivants sont des groupes : $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{C}^*,+)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$.

(b) Déterminer une loi de composition interne pour laquelle $\{-1,1\}$ est un groupe. Même question avec $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

(c) Soit $(G,\star)$ un groupe et E un ensemble. Montrer que l'ensemble $\mathscr{A}(E,G)$ des applications de E dans G peut être muni d'une structure naturelle de groupe.

(d) L'ensemble $\{a,b,c\}$ muni de la loi de composition interne définie par la table

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	b
c	c	b	a

admet-il un élément neutre ? est-il commutatif ? tout élément admet-il un symétrique ? est-il un groupe ?

(e) La réunion de deux sous-groupes d'un groupe G est-elle un sous-groupe ? Et l'intersection ?

(f) Donner l'exemple d'un ensemble avec une loi de composition interne sans élément neutre.

[007291]

Exercice 7292

Soit $(E,\star)$ un ensemble muni d'une loi interne associative avec un élément neutre, noté ε.

(a) Démontrer qu'il n'y a pas d'autre élément neutre.

(b) Soit x un élément qui admet un symétrique x'. Démontrer qu'il n'y a pas d'autre symétrique.

(c) Soit x et y dans E qui admettent un symétrique. Déterminer un symétrique de $x\star y$.

[007292]

Exercice 7293

(a) Montrer que 1 est dans le sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ engendré par $\{2,7\}$.

(b) Quel est le sous-groupe engendré par $\{2,7\}$?

[007293]

Exercice 7294

Soit a et b deux entiers non tous nuls et $< a,b >$ le sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ engendré par $\{a,b\}$.

(a) Montrer que $a\mathbb{Z}$ est inclus dans $< a,b >$.

(b) Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est inclus dans $< a,b >$.

(c) Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$, contenant $\{a,b\}$.

(d) Montrer que $< a,b >$ est inclus dans $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.

(e) Montrer que $< a,b >$ est $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$.

(f) Montrer que $< a,b >= a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$.

[007294]

Exercice 7295

(a) Déterminer $45\mathbb{Z}\cap 60\mathbb{Z}$.

(b) Déterminer $56\mathbb{Z}+63\mathbb{Z}$.

(c) Trouver les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $48\mathbb{Z}$ et donner les relations d'inclusion existant entre eux.

[007295]

Exercice 7296

(a) L'application $F\ :(\mathbb{Z},+)\to(\mathbb{Z},+)$, $n\mapsto 1$ est-elle un morphisme de groupes ?

(b) Déterminer deux morphismes de groupes de $(\mathbb{R},+)$ vers $(\mathbb{R}_+^\star,\times)$.

[007296]

Exercice 7297

(a) Soit F un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans lui-même. Montrer qu'il suffit de connaître $F(1)$ pour connaître l'image de chaque entier par F.

(b) Existe-t-il un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans lui-même tel que $F(2)=3$?

(c) Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans lui-même tels que $F(2)=\ 4$.

(d) Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ pour qu'il existe un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans lui-même tel que $F(2)=a$ et $F(5)=b$ est : $5a=2b$.

[007297]

Exercices de recherche

Exercice 7298

Soit $E = \{a,b\}$ un ensemble à deux éléments. On cherche à déterminer toutes les structures de groupes sur cet ensemble.

(a) Si a est l'élément neutre, quel doit être le symétrique de b ? En déduire la table de multiplication dans ce cas.

(b) Combien y a-t-il de structures de groupes différentes sur E ?

[007298]

Exercice 7299

Soit $E = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0,0)\}$, et $\star$ la loi de composition interne définie par :

$$(x,y) \star (x',y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

$(E,\star)$ est-il un groupe ? commutatif ? [007299]

Exercice 7300

Soit E un ensemble, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Si $A,B \in \mathscr{P}(E)$, on note $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ la *différence symétrique* de A et B. Montrer que pour toute partie A de E, $A^2 = A$ et que le triplet $(\mathscr{P}(E),\Delta,\cap)$ forme un anneau commutatif. [007300]

Exercice 7301

Soit G un groupe tel que $\forall x \in G, x\star x = e_G$.
Montrer que tout élément de G est son propre inverse. Calculer pour tout $(a,b) \in G^2$, le produit $a\star b\star a^{-1}\star b^{-1}$ et montrer que G est abélien. [007301]

2.2 203.04 - Anneaux et structure d'anneaux sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans tout le cours les anneaux sont munis d'une unité pour la multiplication et les morphismes d'anneaux respectent les unités.

Exercices à savoir faire

Exercice 7302 Exercice sur le cours

(a) Ecrire les tables d'opération dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

(b) Soit p un nombre premier, et soit $(G,\star)$ un groupe d'ordre p. Montrer que G est cyclique.

(c) Démontrer que le noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs est un idéal.

(d) L'application $f : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ construite de la manière suivante est-elle bien définie ? Pour un élément c de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, on choisit un représentant x et on pose $f(c) := [x]_3$.

[007302]

Exercice 7303

(a) Montrer que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ peut être muni d'une structure naturelle d'anneau.

(b) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est un anneau, et que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$I_a = \{P \in \mathbb{R}[X] \ / \ P(a) = 0\}$$

est un idéal de $\mathbb{R}[X]$.

[007303]

Exercice 7304

(a) Déterminer l'ordre de $\overline{2}$ dans $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z},+)$.

(b) Montrer que $\{\overline{0},\overline{3},\overline{6},\overline{9}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

(c) Expliciter un sous-groupe d'ordre 6 de $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z},+)$.

(d) Quels sont les ordres possibles des sous-groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$?

(e) Soient n un entier naturel non nul. Le but de cette question est de déterminer tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit d un diviseur de n.

  i. Expliciter un sous-groupe G_d de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d.

  ii. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre d. Montrer que pour tout $\bar{x} \in H$, $d \cdot \bar{x} = 0$. Combien d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vérifient cette équation ? En déduire que $H = G_d$.

  iii. Conclure.

(f) Donner la liste de tous les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$.

[007304]

Exercice 7305

Déterminer les puissances de 2 modulo 9. Que dire du groupe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$? [007305]

Exercice 7306

(a) Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. On a vu comment trouver une relation de Bézout $um+vn=1$. Montrer alors que l'application

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \\ (x,y) & \mapsto & umy+vnx \end{array}$$

est bien définie, est un isomorphisme. Déterminer son isomorphisme réciproque.

(b) Trouver l'entier entre 0 et 100 congru à 9 modulo 11 et à 3 modulo 13.

[007306]

Exercice 7307

Il est souvent important de calculer a^t modulo n avec a,t,n grands (calculer a^t dans $\mathbb{Z}$ n'est pas envisageable). Méthode : Ecrire t en binaire : $t = \Sigma t_i 2^i$ (où $t^i \in \{0,1\}$). Les a^{2^i} se calculent facilement par élévations au carré successives modulo n, et a^t modulo n est le produit (modulo n) des a^{2^i} pour lesquels $t^i = 1$.

Calculer 3^{2025} modulo 50. [007307]

Exercice 7308

Voici la table d'un groupe fini. Déterminer l'ordre de a.

$*$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

[007308]

Exercices de recherche

Exercice 7309

Le but de cet exercice est de déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Montrer que tout morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est déterminé par l'image de $[1]_{10}$.

(b) Quelles sont les valeurs possibles pour l'image de $[1]_{10}$ par un morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

(c) Déterminer tous les morphismes d'anneaux de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ dans un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[007309]

Exercice 7310

(a) L'équation $x^3+x+1=0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) L'équation $x^3+x+1=0$ a-t-elle des solutions dans $\mathbb{Z}$?

[007310]

Exercice 7311

(a) Quelle opération fait de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un groupe ?

(b) Ce groupe est-il fini ?

(c) Quel est l'ordre de $7/12$ dans ce groupe ?

(d) Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ sont d'ordre fini.

[007311]

Exercice 7312

(a) Soit p un nombre premier impair. Quels éléments de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ sont leur propre inverse ?

(b) Démontrer le théorème de Wilson.
Théorème de Wilson : Soit n un entier naturel supérieur à 3. Alors n est premier si, et seulement si, $(n-1)! = -1 \pmod{n}$.

[007312]

2.3 203.04 - Anneaux de polynômes

Exercices sur le cours

Exercice 7313

(a) Dans l'anneau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, calculer $(a+b)^3$ où a et b sont deux éléments.

(b) Dans l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, calculer $(a+b)^6$ où a et b sont deux éléments.

(c) Dans l'anneau $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, calculer $(a+b)^7$ où a et b sont deux éléments.

[007313]

Exercice 7314

(a) 20606 appartient-il à $14443+3079\mathbb{Z}$?

(b) Calculer l'élément 2169 dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

(c) Considérons une application $f : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, qui envoie x sur x^3. Est-elle injective ?

(d) $[2]_{26}$ est-il un diviseur de $[0]$ dans $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$?

(e) $187489 = 433^2$, où 433 est un nombre premier. Combien de diviseurs de zéro y a-t-il dans $\mathbb{Z}/187489\mathbb{Z}$?

(f) Déterminer les puissances de 2 modulo 9. Que dire du groupe $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$?

[007314]

Exercices à savoir faire

Exercice 7315

Soit $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application de dérivation. Est-ce un morphisme de groupes ? Un morphisme d'anneaux ? Une application linéaire ? [007315]

Exercice 7316

Déterminer le pgcd et le ppcm des polynômes $X^5 - 3X^4 + X^3 + 2X^2 - 6X + 2$ et $X^4 - 3X^3 + 3X - 1$, éléments de $\mathbb{Q}[X]$. [007316]

Exercice 7317

Soient $P = X^3 - 1$ et $Q = X^2 - 3X + 2$ des éléments de $\mathbb{R}[X]$. Quel est l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P ? L'idéal engendré par P et Q ? L'idéal $(P) \cap (Q)$? [007317]

Exercice 7318

Soit K un corps, et $P \in K[X]$. Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

(a) Si P n'a pas de racine dans K, alors P est irréductible.

(b) Si P est irréductible, alors P n'a pas de racine dans K.

[007318]

Exercice 7319

Soit $P = X^4 + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

(a) De quelle forme sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$? Factoriser P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

(b) De quelle forme sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? Factoriser P en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

(c) Montrer que P ne peut pas se factoriser en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients rationnels (on pourra supposer que c'est possible, et écrire la division euclidienne de P par l'un de ces facteurs). En déduire que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

[007319]

Exercice 7320

(a) Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur de n. Montrer que $X^d - 1$ divise $X^n - 1$.

(b) Soit n un entier naturel non nul. Soit d un entier naturel non nul et r le reste de la division euclidienne de n par d. Montrer que $X^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^d - 1$.

(c) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, et $d = \text{pgcd}(m, n)$. Montrer que $\text{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^d - 1$.

[007320]

Exercice 7321

Déterminer les racines de X^2-1 dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Comparer leur nombre au degré du polynôme. Comment expliquer ce phénomène ? [007321]

Exercices de recherche

Exercice 7322

Soit $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$. On veut déterminer si P a des racines rationnelles.

(a) On suppose que P a une racine rationnelle non nulle x, avec $x = \frac{p}{q}$ et $\operatorname{pgcd}(p,q) = 1$. Montrer que p divise a_0 et q divise a_n.

(b) Le polynôme $7X^3 - 5X^2 - 9X + 4$ a-t-il des racines rationnelles ? et $X^4 - 2X^2 - 3$?

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n}$ est soit un entier, soit un irrationnel.

[007322]

Exercice 7323

Montrer que X^2+4 est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ mais réductible dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X]$. [007323]

2.4 203.06 - Corps finis

Exercice 7324

(a) Donner la définition d'un groupe.

(b) Dire si les couples suivants sont des groupes : $(\mathbb{Z},+)$; $(\mathbb{Z},\times)$; $(\mathbb{C}^*,+)$; $(\mathbb{C}^*,\times)$. Lorsque la réponse est "non", on indiquera une propriété des groupes qui fait défaut (on ne demande pas de justification lorsque la réponse est "oui").

(c) Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$?

(d) Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}[X],+,\times)$?

[007324]

Exercice 7325

(a) L'entier 51606 appartient-il à $2569+247\mathbb{Z}$?

(b) L'entier -1601 est-il un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?

(c) Calculer l'élément 2169 dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 16.

(d) Calculer l'élément 11^{329} dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

[007325]

Exercice 7326

On note $\mathbb{F}_{11}$ le corps fini $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Considérons le groupe $(\mathbb{F}_{11})^{\times}$. Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède-t-il ? Déterminer tous les générateurs de ce groupe.

[007326]

Exercice 7327

(a) Déterminer la liste des inversibles de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Déterminer l'ordre de chaque élément dans $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times}$.

(b) Déterminer la liste des inversibles de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Déterminer l'ordre de chaque élément dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$.

(c) Donner un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/15\mathbb{Z})^{\times}$ dans $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^{\times}$.

[007327]

Exercice 7328

(a) Le polynôme $(X^2+X+1)^3$ est-il irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$?

(b) Donner la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré 2 et 3.

(c) Donner un polynôme irréductible de degré 4 de $\mathbb{F}_2[X]$.

(d) Ecrire dans $\mathbb{F}_2[X]$, une relation de Bezout pour X^3+X^2+1 et X^2+X+1.

[007328]

Exercice 7329

(a) Combien le corps $\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$ a-t-il d'éléments ?

(b) Déterminer la liste des éléments et la table de multiplication de l'anneau quotient

$$\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1).$$

(c) Multiplier $[X^5+X^4+6X]$ par $[X^4+7X^5+9X^3+4X^2]$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$ et donner le résultat avec un représentant de la liste précédente.

(d) Déterminer un inverse de $[X^3+X^2+1]$ dans $\mathbb{F}_2[X]/(X^2+X+1)$.

[007329]

Exercice 7330

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ le système de congruences

$$\begin{cases} P = X & [X^2+X+1] \\ P = 3 & [X^2+X] \end{cases}$$

[007330]

Exercice 7331

(a) Le polynôme X^2+1 est-il irréductible dans $\mathbb{F}_3[X]$?

(b) Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A=\mathbb{F}_3[X]/(X^2+1)$?

(c) Quelle relation vérifie la classe α du polynôme X dans ce quotient ?

(d) Donner la liste des éléments de A.

(e) Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans $A^{\times}$.

(f) Déterminer l'ordre multiplicatif de $a:=\alpha+2$ dans $A^{\times}$.

(g) Etablir la table des puissances de a.

(h) Calculer $(2+a)(2+2a)$.

(i) Calculer a^3+a^2 comme puissance de a.

(j) Calculer $(1+2a)^{-1}$.

[007331]

Exercice 7332

(a) Montrer que le polynôme X^3+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

(b) Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A=\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$?

(c) Quel est le cardinal de A ? Soit α la classe du polynôme X dans ce quotient A. Donner la liste des éléments de A.

(d) Sans calculs, mais en justifiant votre réponse, dire ce que valent les quantités suivantes

$$\alpha+\alpha,\ \ \alpha^3+\alpha+1,\quad \alpha^7.$$

(e) Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans $A^\times$.

(f) Etablir la table des puissances de α.

(g) Calculer $(1+\alpha)(1+\alpha^2)$.

(h) Calculer $\alpha^3+\alpha^2$ comme puissance de α.

(i) Calculer $(1+\alpha)^{-1}$.

[007332]

2.5 203.04 - Exemples d'anneaux

Exercice 7333

(a) Soit $p=13$. Trouver une racine c de -1 modulo 13.

(b) Représenter le réseau $\mathscr{R}$ de $\mathbb{Z}^2$ engendré par $(c,1)$ et $(p,0)$ et montrer que tous ses éléments ont une norme multiple de p.

(c) Trouver deux entiers x et y tels que $p=x^2+y^2$.

[007333]

Exercice 7334

(a) Le nombre 101 est-il premier ? Peut-il s'écrire comme somme de deux carrés.

(b) Déterminer une racine c de -1 modulo 101.

(c) Calculer le pgcd$(101,c+i)$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

(d) Ecrire 101 comme somme de deux carrés.

(e) Mêmes questions avec 2011.

[007334]

Exercice 7335

(a) Quelle identité obtient-on quand on écrit que la norme de $(a+ib)(c+id)$ dans $\mathbb{Z}[i]$ est le produit de la norme de $(a+ib)$ et de celle de $(c+id)$?

(b) Écrire $2425=5^2\cdot 97$ et $754=2\cdot 13\cdot 29$ comme sommes de deux carrés.

(c) Tous les entiers naturels sont-ils sommes de trois carrés ?

[007335]

Exercice 7336

Considérons l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$, le sous-anneaux de $\mathbb{C}$ engendré par $i\sqrt{3}$.

(a) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}] := \{a+bi\sqrt{3},\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

(b) À tout élément $x = a+bi\sqrt{3}$ de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ on associe son conjugué $\bar{x} = a-bi\sqrt{3}$. Montrer que pour tous $x,y \in \mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ on a
$$\overline{x+y} = \bar{x}+\bar{y} \quad \text{et} \quad \overline{xy} = \overline{xy}.$$

(c) En considérant l'application $N : \mathbf{Z}[i\sqrt{3}] \to \mathbf{Z}, x \mapsto x\bar{x}$, montrer que les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$ sont exactement les éléments de norme 1. Donner la liste des éléments inversibles.

(d) Quelles sont les normes possibles d'un diviseur de $1+i\sqrt{3}$ dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$?

(e) Montrer que éléments 2, $1+i\sqrt{3}$ sont premiers entre eux dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Peut-on leur écrire un couple de Bézout ?

(f) Donner deux factorisations différentes de 4 dans $\mathbf{Z}[i\sqrt{3}]$. Le lemme d'Euclide est-il valide dans l'anneau $\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$?

[007336]

Exercice 7337

Les polynômes symétriques élémentaires en n indéterminées sont par définition

$$\begin{aligned}
s_1(t_1,t_2,\cdots,t_n) &:= t_1+t_2+\cdots+t_n\\
s_2(t_1,t_2,\cdots,t_n) &:= t_1t_2+t_1t_3+\cdots+t_2t_3+t_2t_4+\cdots+\cdots t_{n-1}t_n\\
&\vdots\\
s_n(t_1,t_2,\cdots,t_n) &:= t_1t_2\cdots t_n.
\end{aligned}$$

(a) Soit $F(X) = a(X-t_1)(X-t_2)\cdots(X-t_n)$. Développer $F(X)$ en puissances de X.

(b) Ecrire $t_1^3+t_2^3$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2.

(c) Ecrire $t_1^4+t_2^4$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2.

(d) Ecrire $t_1^3+t_2^3+t_3^3$ comme polynôme à coefficients entiers de s_1, s_2, s_3.

(e) Ecrire f
$$f(t_1,t_2,t_3) = t_1^2t_2+t_1^2t_3+t_2^2t_1+t_2^2t_3+t_3^2t_1+t_3^2t_2.$$
comme polynôme à coefficients entiers en les polynômes symétriques élémentaires.

[007337]

Exercice 7338

Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture hexadécimale est $DA582$. [007338]

Exercice 7339

Calculer $P(2)$ où $P = 3x^4-x^2-16x-14$ par la méthode de Hörner. Effectuer la division euclidienne de P par $x-2$. [007339]

Exercice 7340

Le but de l'exercice est de factoriser le polynôme $x^4+4x^3-81x^2-16x+308$.

(a) Vérifier que 2 est racine de P et factoriser P par $x-2$ avec la méthode de Hörner.

(b) Vérfier que -2 est racine du quotient obtenu dans la question précédente et factoriser le par $x+2$ par la méthode de Hörner.

(c) Conclure.

[007340]

Exercice 7341

Soit $P = 3x^5 - 6x^4 + x^3 + 5x^2 - 3x - 4$.

(a) Effectuer la division euclidienne de P par $x-1$.

(b) Présenter les résultats selon la méthode de Hörner.

(c) Écrire P dans la base $1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^5$.

[007341]

Exercice 7342

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée de la racine cubique réelle c de 17. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 17$.

(a) Montrer que $2 < c < 3$.

(b) Déterminer par la méthode de Hörner le polynôme $R(z) := 10^3 P(2 + \frac{z}{10})$ en la variable z.

(c) Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-1} près.

(d) Déterminer une valeur approchée de c à 10^{-2} près.

[007342]

2.6 Révisions

Exercice 7343

Voici la table d'un groupe G.

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	d	j	g		h	i		e	f	b		k
b		g	j		l	e	d	i	k	a	h	
c	b	a	d			k	j	l	e	g	f	h
d			c	d				h	i			l
e		f		e	d	b	l	j	c	h	a	g
f	i	l	h			d	e	c	a	k	j	b
g	j	d		g	f	l		k	h	c	i	e
h	l	i		h	a	j	k	b		e	d	c
i	f		e	i	c	a	h		d	l	b	j
j		c	b	j	k		a	f	l	d	e	i
k	e	h	l	k	j	c	i	d			g	a
l		e	k	l	b	g		a	j	i	c	d

La compléter. Le groupe est-il commutatif ? Déterminer l'ordre de b.

[007343]

Exercice 7344

Considérons le groupe $(\mathbb{F}_{53})^{\times}$. Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède -t-il ? Déterminer en le justifiant un générateur de ce groupe. [007344]

Exercice 7345

(a) L'entier 256 appartient-il à $115+247\mathbb{Z}$?

(b) L'entier -601 est-il un représentant de la classe $[-738]_{28}$ de $\mathbb{Z}/28\mathbb{Z}$?

(c) Calculer l'élément 589 dans $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 22.

(d) Calculer l'élément 13^{923} dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 10.

[007345]

Exercice 7346

(a) Montrer que le polynôme X^9-1 de $\mathbb{F}_3[X]$ vaut $(X-1)^9$. On considère le code ternaire C de longueur 9 associé au polynôme $g=(X-1)^5$

(b) Déterminer l'alphabet, la longueur des mots, la dimension du code, le nombre de mots de code. Le code est-il cyclique ?

(c) Donner une matrice génératrice de C.

(d) Déterminer un élément de poids 3 du code.

(e) Déterminer une matrice de contrôle H de ce code.

(f) Déterminer la distance de ce code. Combien d'erreurs ce code peut-il détecter ? combien d'erreurs peut-il corriger ?

(g) On a reçu le mot $r=121102210$. Calculer son image par H. Le mot r est-il un mot du code ?

(h) Corriger le mot r en supposant qu'il n'y a eu au plus qu'une seule erreur de transmission.

[007346]

Exercice 7347

(a) Le nombre 101 est-il premier ? Peut-il s'écrire comme somme de deux carrés.

(b) Déterminer une racine c de -1 modulo 101.

(c) Calculer le $pgcd(101,c-i)$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

(d) Ecrire 101 comme somme de deux carrés.

[007347]

Exercice 7348

Alice et Bernard décident d'utiliser l'algorithme d'El Gamal. Il utilise le corps $\mathbb{F}_{19}$ avec l'élément $G=15$.

(a) Déterminer l'ordre de 15 dans $\mathbb{F}_{19}^{\times}$.

(b) Bernard choisit sa clé privée $c=4$. Déterminer sa clé publique $C=G^c$.

(c) Alice choisit une clé temporaire privée $d=5$. Quelle est sa clé publique D ? Elle souhaite envoyer le message $m=17$. Elle le chiffre en utilisant la clé publique C de Bernard par $(M_1,M_2)=(D,mC^d)$. Calculer ce message chiffré.

(d) Comment Bernard retrouve-t-il le message m ?

(e) Dans un second envoi, Bernard reçoit $(8,3)$. Quel est le message m envoyé cette fois par Alice ? Quelle clé privée a-t-elle utilisé cette fois ?

[007348]

2.7 203.99 - Structures algébriques

Exercice 7349 Questions de cours

(a) Soit $(E,\star)$ un ensemble muni d'une loi de composition interne associative avec un élément neutre, noté ε. Soit x et y deux éléments de E qui admettent un symétrique. Déterminer un symétrique de $x\star y$.

(b) Retrouver la caractérisation de l'injectivité d'un morphisme à partir de son noyau.

[007349]

Exercice 7350

Considérons le groupe $(\mathbb{Z},+)$. Le sous-ensemble $4\mathbb{Z}$ est par définition l'ensemble des multiples entiers de 4, autrement dit

$$4\mathbb{Z} = \{p \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{Z} \;\; p = 4m\}.$$

(a) Les sous-ensembles $4\mathbb{Z}$ et $6\mathbb{Z}$ sont-ils stables pour la loi $+$? Sont-ils alors des sous-groupes ?

(b) Le sous-ensemble $4\mathbb{Z}\cap 6\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe ? (indication : on pourra énumérer ses premiers éléments positifs)

(c) Le sous-ensemble $2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe ?

[007350]

Exercice 7351 Intersection-Réunion

Soit E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de ses parties.

(a) Déterminer les propriétés de la loi $(\mathscr{P}(E),\cup)$ (commutativité, associativité, existence et unicité des éléments neutres, éléments symétrisables).

(b) Déterminer les propriétés de la loi $(\mathscr{P}(E),\cap)$.

(c) La loi $\cup$ est-elle distributive par rapport à la loi $\cap$?

[007351]

Exercice 7352 Sur un ensemble à deux éléments

Soit $E = \{a,b\}$ un ensemble à deux éléments. On cherche à déterminer toutes les structures de groupe sur cet ensemble.

(a) Si a est l'élément neutre, quel doit être le symétrique de b ? En déduire la table de multiplication dans ce cas.

(b) Combien y a-t-il de structures de groupes différentes sur E ?

[007352]

Exercice 7353 Groupes ordonnés

Soit G un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ et d'une structure de groupe $\star$. On dit que $(G,\star,\leqslant)$ est un *groupe ordonné* si

$$\forall a \in G,\;\; \forall (x,y) \in G^2,\;\; \left(x \leqslant y \Rightarrow \left(a\star x \leqslant a\star y \quad \text{et} \quad x\star a \leqslant y\star a\right)\right).$$

(a) $(\mathbb{R},+,\leqslant)$ est-il un groupe ordonné ?

(b) $(\mathbb{R}^\star,\times,\leqslant)$ est-il un groupe ordonné ?

[007353]

2.8 203.01 - Groupes finis

Exercice 7354

Montrer que tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [007354]

Exercice 7355

Montrer que les deux permutations $\tau = (1,2)$ et $c = (1,2,3)$ engendrent le groupe symétrique $\mathscr{S}_3$. On pourra construire un arbre dont Id est la racine et tel qu'en chaque noeud partent deux branches, l'une marquée τ, l'autre c. [007355]

Exercice 7356

(a) Donner la liste des permutations du groupe symétrique $\mathscr{S}_4$.

(b) Les deux permutations $\tau = (1,3)$ et $c = (1,2,3,4)$ engendrent-elles le groupe symétrique $\mathscr{S}_3$?

[007356]

Exercice 7357

(a) Construire à la règle et au compas un hexagone régulier E.

(b) Une translation de vecteur non nul peut-elle conserver globalement l'hexagone E ?

(c) Quels sont les centres et les angles des rotations du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?

(d) Quelles sont les symétries orthogonales du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?

(e) Quelles sont les symétries orthogonales glissées du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E ?

(f) Soit r une rotation d'angle minimal non nul qui conserve globalement l'hexagone E et s une symétrie orthogonale qui conserve globalement E. Quel est l'ordre de r ? et celui de s ?

(g) Écrire r comme composée de s suivie d'une autre symétrie orthogonale. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques (centre, axe, angle...) de l'isométrie rs.

(h) Donner la liste des éléments du groupe D_{12} des isométries du plan euclidien orienté qui conservent globalement l'hexagone E. On n'utilisera dans les notations seulement une rotation r et une symétrie s.

(i) À l'aide de l'écriture de r comme composée de deux symétries, calculer sr.

(j) En déduire les produits $rsrs$, rsr^2s, r^3sr^4s.

[007357]

Exercice 7358

(a) Montrer que le groupe $GL_2(\mathbb{F}_2)$ des matrices inversibles de taille 2×2 à coefficients dans le corps $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un groupe de cardinal $(2^2-1)(2^2-2) = 6$.

(b) On a vu en cours que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe soit au groupe cyclique $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, soit au groupe symétrique $\mathscr{S}_3$ et que ces deux groupes ne sont pas isomorphes. Auquel de ces deux groupes, le groupe $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est-il isomorphe ?

[007358]

3 Examens

3.1 203.01 - Un examen

Exercice 7359

(a) Enoncer le théorème de Lagrange.

(b) Donner l'exemple de deux groupes finis de même ordre non isomorphes. Justifier le fait que les deux groupes choisis ne sont pas isomorphes.

(c) Donner la définition d'un sous-groupe *distingué*.

(d) L'anneau $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z},+,\times)$ est-il intègre ? Justifier.

(e) Effectuer la division euclidienne de X^3+2X^2-5X+8 par X^2-1 dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

(f) Effectuer la division euclidienne de X^3+2X^2-5X+8 par $2X^2-1$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

[007359]

Exercice 7360

(a) Calculer les produits dans $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ et $(1,2)(2,3)(1,2)$.

(b) L'ensemble des transpositions de $\mathscr{S}_7$ est-il un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$?

Correction ▼ [007360]

Exercice 7361

(a) Montrer que 1 est dans le sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$ engendré par $\{3,8\}$.

(b) Quel est le sous-groupe engendré par $\{3,8\}$?

(c) Quel est le sous-groupe engendré par $\{3,8,15\}$?

[007361]

3.2 203.01 - Un examen

Exercice 7362

(a) Le sous-ensemble $28\mathbb{Z}+18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbb{Z}$? Si oui, le déterminer.

(b) Le sous-ensemble $28\mathbb{Z}\cup 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbb{Z}$? Si oui, le déterminer.

(c) Le sous-ensemble $28\mathbb{Z}\cap 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est-il un sous-groupe de $\mathbb{Z}$? Si oui, le déterminer.

(d) Donner l'exemple d'un groupe commutatif non cyclique.

(e) Donner l'exemple d'un groupe non commutatif infini.

(f) Donner la définition d'un anneau.

(g) Démontrer que tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

[007362]

Exercice 7363

(a) Quels sont les ordres possibles des éléments d'un groupe d'ordre 6 ?

(b) Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\times)$?

(c) Ecrire la table de multiplication de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$.

(d) Déterminer s'il en existe un générateur de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$.

(e) Combien $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star, \times)$ a-t-il de générateurs ?

(f) Le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est-il cyclique ?

(g) Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ est-il cyclique ?

Correction ▼ [007363]

Exercice 7364

Dans le groupe $\mathscr{S}_7$ des permutations de l'ensemble fini $\{1,2,\cdots,7\}$ on considère les deux permutations

$$\alpha = (157)(43) \quad \text{et} \quad \beta = (26).$$

(a) Montrer que $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(b) Déterminer l'ordre de α et de β.

(c) Calculer α^{-1} et β^{-1}.

(d) Montrer que $S = \{\alpha^i\beta^j, 0 \leqslant i \leqslant 5, 0 \leqslant j \leqslant 1\}$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$.

(e) Calculer l'ordre de S.

(f) Montrer que tout sous-groupe de $\mathscr{S}_7$ qui contient α et β contient S.

(g) Que peut-on déduire des questions 4. et 6. précédentes ?

(h) Déterminer l'ordre de $\alpha\beta$.

(i) Le sous-groupe S est-il cyclique ?

Correction ▼ [007364]

Exercice 7365

(a) Calculer les produits de matrices ADA^{-1} et BDB^{-1} dans $GL(2,\mathbb{R})$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Le sous-groupe de $GL(2,\mathbb{R})$ des matrices diagonales inversibles est-il distingué dans $GL(2,\mathbb{R})$?

(c) Calculer le produit de matrices AB dans $GL(2,\mathbb{R})$.

(d) L'application trace de $GL(2,\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R},+)$ est-elle un morphisme de groupes ?

Correction ▼ [007365]

Exercice 7366

(a) Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer son ordre.

(c) Ecrire sa puissance σ^6.

(d) Ecrire son inverse en produit de cycles à supports disjoints.

(e) La décomposer en produit de moins de 7 tranpositions.

[007366]

Exercice 7367

(a) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$?

(b) Déterminer un générateur g du groupe $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.

(c) Ecrire chaque élément de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ comme puissance de g.

[007367]

3.3 203.04 - Devoir Maison

Exercice 7368 Sur le nombre de solutions d'une équation du second degré

Le but de ce problème est de montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ peut avoir un nombre arbitrairement grand de solutions dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Pour un nombre premier p, on notera $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On rappelle qu'alors le groupe $(\mathbb{F}_p^\times,\times)$ des inversibles de $\mathbb{F}_p$ est cyclique. On pourra admettre le résultat d'une question pour continuer.

(a) Si p est un nombre premier, combien au maximum l'équation $X^2+X+1=0$ a-t-elle de solutions dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

(b) Déterminer les solutions de l'équation $X^2+X+1=0$

  a dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$.

  b dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

  c dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

  d À l'aide des questions précédentes, déterminer les solutions de l'équation $X^2+X+1=0$ dans $\mathbb{Z}/91\mathbb{Z}$.

(c) Soit p est un nombre premier plus grand que 5. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ admet une solution dans le corps $\mathbb{F}_p$ si et seulement si l'équation $X^3=1$ admet une solution *différente de* 1 dans $\mathbb{F}_p$.

(d) Soit p est un nombre premier plus grand que 5. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ admet une solution dans le corps $\mathbb{F}_p$ si et seulement si $(\mathbb{F}_p)^\times$ a un élément d'ordre 3.

(e) Soit p est un nombre premier plus grand que 5. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ admet une solution dans le corps $\mathbb{F}_p$ si et seulement si p est congru à 1 modulo 3.

(f) Soit p est un nombre premier plus grand que 5. Montrer que si l'équation $X^2+X+1=0$ admet une solution a dans le corps $\mathbb{F}_p$ elle admet une autre solution disctincte $-1-a$.

(g) On admet qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3. Montrer que l'équation $X^2+X+1=0$ peut avoir un nombre arbitrairement grand de solutions dans les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

[007368]

3.4 203.04 - Contrôle continu

Exercice 7369

(a) Soit G un groupe, e son élément neutre et a un élément de G et m un entier naturel tel $a^m=e$. Que peut-on dire de l'ordre de l'élément a ?

(b) Donner la définition d'un idéal dans un anneau commutatif.

(c) Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$?

(d) Le sous-ensemble $28\mathbb{Z}\cap 18\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ est-il un idéal de $\mathbb{Z}$? Si oui, le déterminer.

(e) Donner l'exemple de deux groupes finis de même ordre non isomorphes. Justifier le fait que les deux groupes choisis ne sont pas isomorphes.

(f) Le groupe $\mathscr{S}_4$ des permutations de $\{1,2,3,4\}$ est-il cyclique ? (justifier)

Correction ▼ [007369]

Exercice 7370

(a) L'entier -1601 est-il un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?

(b) Calculer l'élément 11^{329} dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

(c) La classe $[51]$ est-elle inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Si oui, calculer son inverse dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 130.

Correction ▼ [007370]

Exercice 7371

(a) Ecrire une relation de Bezout entre X^2+X+1 et X^3+X+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

(b) La classe du polynôme X^2+X+1 est-elle inversible dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^3+X+1)$? Si oui, donner son inverse.

Correction ▼ [007371]

Exercice 7372

(a) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$?

(b) À quel groupe le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$ est-il isomorphe ?

Correction ▼ [007372]

Exercice 7373

Voici la table d'un groupe G. Quel est l'ordre de G ? Le groupe G est-il nécessairement commutatif ? Compléter la table en énonçant précisément les propriétés utilisées.

$*$	a	b	c	d	e
a			d		c
b	e		a		d
c		a			
d				d	e
e			b		a

Correction ▼ [007373]

Exercice 7374

(a) Calculer les produits dans $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ et $(1,2)(2,3)(1,2)$.

(b) L'ensemble des transpositions de $\mathscr{S}_7$ est-il un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$?

Correction ▼ [007374]

3.5 203.99 - Examen terminal

Exercice 7375

(a) Quelle loi fait de l'ensemble de inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ un groupe ? Ce groupe est-il cyclique ?

(b) Combien un groupe cyclique d'ordre 91 a-t-il de générateurs ?

(c) Décomposer en produits de cycles à supports disjoints, la permutation

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) Décomposer en produits de transpositions, la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(e) Le polynôme $P(t_1,t_2,t_3,t_4) = t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_4t_1$ en quatre variables est-il symétrique ?

Correction ▼ [007375]

Exercice 7376

(a) Combien l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ a-t-il d'éléments inversibles ?

(b) Donner un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et un groupe produit.

(c) Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? Si oui, combien a-t-il de générateurs ?

Correction ▼ [007376]

Exercice 7377

(a) Factoriser 221 en produit de nombres premiers.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions entières de l'équation

$$(X-3)(X-5) = 0 \pmod{221}.$$

Correction ▼ [007377]

Exercice 7378

(a) Sur le cercle unité, on a marqué les éléments du groupe des racines de l'unité d'ordre 8. Soit $\zeta = \exp(2i\pi/8)$. Représenter sur un cercle unité les éléments du sous-groupe engendré par ζ^3.

(b) Soit la racine de l'unité $z = \exp(16i\pi/11)$. Déterminer son ordre dans le groupe $\mathbb{C}^\star$. Déterminer l'ordre de z^8. Déterminer l'argument de z^8.

Correction ▼ [007378]

Exercice 7379

(a) Calculer, avec l'algorithme de Hörner appliqué au polynôme $P(x) = x^2 - 7$, une valeur approchée à 10^{-1} près de $\sqrt{7}$.

(b) Calculer avec l'algorithme de Hörner une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sqrt{7}$.

Correction ▼ [007379]

Exercice 7380

(a) Combien l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ a-t-il d'éléments inversibles ?

(b) Quelle loi fait de l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ un groupe ?

(c) Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? Si oui, combien a-t-il de générateurs ?

(d) Combien un groupe cyclique d'ordre 91 a-t-il de générateurs ?

(e) Décomposer en produits de cycles à supports disjoints la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 1 & 3 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(f) Décomposer en produits de transpositions la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

[007380]

Exercice 7381

(a) Donner un isomorphisme entre $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ et un groupe produit.

(b) Le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ est-il cyclique ? Si oui, combien a-t-il de générateurs ?

[007381]

Exercice 7382

(a) Factoriser 221 en produit de nombres premiers.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation

$$(X-3)(X-5) = 0 \pmod{221}.$$

[007382]

Exercice 7383

(a) Donner la définition d'un idéal dans un anneau commutatif.

(b) Soit I un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss. Montrer qu'il existe un entier de Gauss a tel que I soit l'ensemble des multiples de a.

[007383]

Exercice 7384

Voici la table d'un groupe G. Quel est l'ordre de G ? Le groupe G est-il nécessairement commutatif ? Compléter la table en énonçant précisément les propriétés utilisées.

$*$	a	b	c	d	e	f
a	e	d		b	a	
b		e		f		d
c	b	f		e		
d	f		e	c		b
e		b				
f	d	c	b			e

Le groupe est-il cyclique ? [007384]

Exercice 7385

On rappelle que $\mathbb{F}_5$ désigne le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ à cinq éléments.

(a) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{F}_{25} := \mathbb{F}_5[X]/(X^2+2X+1)$ est un corps. Combien a-t-il d'éléments ?

(b) Si a est un élément non nul de $\mathbb{F}_{25}$, que valent $5a$, a^2+2a+1 et a^{24} ?

(c) Soit x un élément de $\mathbb{F}_{25}$ tel que $x^2+3x+3=0$. Quel est l'ordre multiplicatif de x ?

[007385]

Exercice 7386

(a) Quels sont les ordres possibles des éléments de $((F_{19})^\times, \times)$?

(b) Le groupe $((F_{19})^\times, \times)$ est-il cyclique ? si oui, combien a-t-il de générateurs ?

(c) Quel est l'ordre multiplicatif de l'élément 12 du corps F_{19} ?

[007386]

Exercice 7387

On admet que 271 et 281 sont deux nombres premiers.

(a) Peut-on écrire 271 comme somme de deux carrés ? Si oui, faîtes le. On pourra trouver une racine c de -1 modulo 271, puis calculer le pgcd$(271, c+i)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

(b) Peut-on écrire 281 comme somme de deux carrés ? Si oui, faîtes le. On pourra trouver une racine c de -1 modulo 281, puis calculer le pgcd$(281, c+i)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

[007387]

3.6 203.99 - Examen terminal

Exercice 7388

(a) Rappeler la liste à isomorphisme près des groupes d'ordre 4.

(b) Rappeler la liste à isomorphisme près des groupes d'ordre 5.

(c) Le nombre premier 173 peut-il s'écrire comme somme de deux carrés ?

(d) Quelle loi fait de $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$ un groupe ? Combien le groupe $\mathbb{Z}/135\mathbb{Z}$ a-t-il de générateurs ?

[007388]

Exercice 7389

(a) Donner la définition d'un idéal dans un anneau commutatif.

(b) Soit I un idéal de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss. Montrer qu'il existe un entier de Gauss a tel que I soit l'ensemble des multiples de a.

[007389]

Exercice 7390

On admet 281 est un nombre premier.

(a) Peut-on écrire 281 comme somme de deux carrés ? Si oui, faîtes le.

(b) Factoriser 280. On choisit $x = 3$. On admet que $3^{35} = 60[281]$. Déterminer une racine c de -1 modulo 281.

(c) Calculer le pgcd$(281, c+i)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

Correction ▼ [007390]

Exercice 7391

(a) Donner la définition d'un groupe.

(b) Dire si les couples suivants sont des groupes : $(\mathbb{Z}, +)$; $(\mathbb{Z}, \times)$; $(\mathbb{C}^*, +)$; $(\mathbb{C}^*, \times)$. Lorsque la réponse est "non", on indiquera une propriété des groupes qui fait défaut (on ne demande pas de justification lorsque la réponse est "oui").

(c) Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$?

(d) Quels sont les idéaux de l'anneau $(\mathbb{R}[X], +, \times)$?

[007391]

Exercice 7392

(a) L'entier 51606 appartient-il à $2569+247\mathbb{Z}$?

(b) L'entier -1601 est-il un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$?

(c) Calculer l'élément 2169 dans $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 16.

(d) Calculer l'élément 11^{329} dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 12.

[007392]

Exercice 7393

Voici la table d'un groupe G. Quel est l'ordre de G ? Le groupe G est-il nécessairement commutatif ? Compléter la table en énonçant précisément les propriétés utilisées.

$*$	a	b	c	d	e
a			d		c
b	e		a		d
c		a			
d				d	e
e			b		a

[007393]

Exercice 7394

Considérons le groupe $(\mathbb{F}_{41})^{\times}$. Quels sont les ordres possibles d'un élément de ce groupe ? Combien d'éléments de chaque ordre ce groupe possède -t-il ? Déterminer en le justifiant un générateur de ce groupe. [007394]

Exercice 7395

(a) Montrer que le polynôme X^3+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

(b) Quelle est alors la structure de l'ensemble quotient $A=\mathbb{F}_2[X]/(X^3+X+1)$?

(c) Quel est le cardinal de A ? Soit α la classe du polynôme X dans ce quotient A. Donner la liste des éléments de A.

(d) Sans calculs, mais en justifiant votre réponse, dire ce que valent les quantités suivantes
$$\alpha+\alpha,\ \ \alpha^3+\alpha+1,\quad \alpha^7.$$

(e) Déterminer l'ordre multiplicatif de α dans $A^{\times}$.

(f) Etablir la table des puissances de α.

(g) Calculer $(1+\alpha)(1+\alpha^2)$.

(h) Calculer $\alpha^3+\alpha^2$ comme puissance de α.

(i) Calculer $(1+\alpha)^{-1}$.

[007395]

3.7 203.99 - Examen

Exercice 7396

(a) Enoncer le théorème de Lagrange.

(b) Soit G un groupe et a un élément d'ordre k dans G. Soit p un entier naturel. Quel est l'ordre de a^p ?

(c) Le groupe $\mathscr{S}_3$ des permutations de $\{1,2,3\}$ est-il cyclique ? (justifier)

(d) Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $k[X]$.

(e) Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$.

Correction ▼ [007396]

Exercice 7397

(a) La classe $[51]$ est-elle inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Si oui, calculer 92×51^{-1} dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. Le résultat doit être représenté par un nombre compris entre 0 et 130.

(b) Trouver l'ensemble des diviseurs de zéro dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$. (Dans cet exercice on ne considère pas le 0 comme un diviseur de zéro.) Représenter chaque classe par un nombre compris entre 1 et 15.

Correction ▼ [007397]

Exercice 7398

(a) On rappelle que le seul polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_2$ est X^2+X+1. Montrer que le polynôme X^4+X+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

(b) On note $A := \mathbb{F}_2[X]/ < X^4+X+1 >$ l'anneau quotient de $\mathbb{F}_2[X]$ par l'idéal engendré par P. La classe de $3X^5+X^2+X+7$ est-elle nulle dans A ? L'anneau A est-il un corps ? Combien a-t-il d'éléments ?

(c) On note α la classe du polynôme X dans A. Déterminer α^4 et α^{15} comme polynômes de degré au plus 3 en α.

(d) Le polynôme $X^{15}-1$ est-il un multiple de X^4+X+1 dans $\mathbb{F}_2[X]$?

Correction ▼ [007398]

Exercice 7399

(a) On considère le code binaire, linéaire engendré par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&1&1
\end{pmatrix}$$

Quel est son alphabet ? sa longueur ? sa dimension ? un polynôme générateur ? son nombre de mots ?

(b) Le code est-il cyclique ?

(c) Ecrire une matrice de contrôle. Montrer que la distance du code est au moins 3. Combien d'erreurs peut-on alors détecter ? combien d'erreurs peut-on alors corriger ?

(d) Le mot $(0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1)$ est-il un mot de code ? Si non, en supposant qu'il n'a qu'une erreur, écrire le mot de code dont il provient.

Correction ▼ [007399]

Exercice 7400

(a) Le nombre 613 est-il premier ?

(b) Peut-il s'écrire comme somme de deux carrés ?

(c) Calculer 35^2 modulo 613.

(d) Effectuer la division euclidienne de 613 par $35+i$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss.

(e) Ecrire 613 comme somme de deux carrés.

Correction ▼ [007400]

3.8 203.99 - Examen

Exercice 7401

(a) Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $k[X]$.

(b) Enoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[i]$.

(c) Soit G un groupe et a un élément de G d'ordre n. Soit k un entier naturel. Quel est l'ordre de a^k ?

(d) Démontrer que tout groupe d'ordre 13 est commutatif.

(e) Donner l'exemple d'un nombre premier qui ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés.

Correction ▼ [007401]

Exercice 7402

(a) Les groupes $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ?

(b) Les groupes $\mathbb{F}_7$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ? Justifier.

(c) Les groupes $(\mathbb{F}_7)^\star$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ? Justifier.

Correction ▼ [007402]

Exercice 7403

(a) On rappelle que le seul polynôme irréductible de degré 2 sur $\mathbb{F}_2$ est X^2+X+1. Montrer que le polynôme X^4+X^3+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.

(b) On note $A := \mathbb{F}_2[X]/<X^4+X^3+1>$ l'anneau quotient de $\mathbb{F}_2[X]$ par l'idéal engendré par P. L'anneau A est-il un corps ? Combien a-t-il d'éléments ?

(c) On note α la classe du polynôme X dans A. Déterminer α^4 et α^{15} comme polynômes de degré au plus 3 en α.

(d) Déterminer toutes les puissances de α, α jusqu'à α^{15}, comme polynômes de degré au plus 3 en α.

(e) Déterminer $\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9$ comme polynômes de degré au plus 3 en α.

(f) Ecrire l'inverse de $1+\alpha+\alpha^3$ comme puissance de α.

Correction ▼ [007403]

Exercice 7404

Alice et Bernard décident d'utiliser l'algorithme d'El Gamal. Il utilise le corps $\mathbb{F}_{13}$ avec l'élément $G=2$.

(a) Quels sont les ordres possibles des éléments de $\mathbb{F}_{19}^{\times}$. Déterminer l'ordre de 2 dans $\mathbb{F}_{19}^{\times}$.

(b) Bernard choisit sa clé privée $c = 3$. Déterminer sa clé publique $C = G^c$.

(c) Alice choisit une clé temporaire privée $d = 7$. Quelle est sa clé publique D ? Elle souhaite envoyer le message $m = 11$. Elle le chiffre en utilisant la clé publique C de Bernard par $(M_1, M_2) = (D, mC^d)$. Expliciter ce message chiffré.

(d) Comment Bernard retrouve-t-il le message m ?

(e) Dans un second envoi, Bernard reçoit $(8,3)$. Quel est le message m envoyé cette fois par Alice ? Quelle clé privée a-t-elle utilisé cette fois ?

Correction ▼ [007404]

3.9 203.99 - Examen

Exercice 7405 Questions de cours

(a) Énoncer le théorème de Lagrange.

(b) Donner l'exemple de deux groupes finis de même ordre non isomorphes. Justifier le fait que les deux groupes choisis ne sont pas isomorphes.

(c) Donner la définition d'un sous-groupe *distingué*.

(d) L'anneau $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, +, \times)$ est-il intègre ? Justifier.

(e) Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 - 5X + 8$ par $X^2 - 1$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

(f) Effectuer la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 - 5X + 8$ par $2X^2 - 1$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$.

[007405]

Exercice 7406

(a) Calculer les produits dans $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)$ et $(1,2)(2,3)(1,2)$.

(b) L'ensemble des transpositions de $\mathscr{S}_7$ est-il un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$?

[007406]

Exercice 7407

(a) Montrer que 1 est dans le sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ engendré par $\{3,8\}$.

(b) Quel est le sous-groupe engendré par $\{3,8\}$?

(c) Quel est le sous-groupe engendré par $\{3,8,15\}$?

[007407]

Exercice 7408

(a) Décomposer en produit de cycles à supports disjoints la permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Déterminer son ordre.

(c) Ecrire sa puissance σ^6.

(d) Ecrire son inverse en produit de cycles à supports disjoints.

(e) La décomposer en produit de moins de 7 transpositions.

[007408]

Exercice 7409

(a) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$?

(b) Déterminer un générateur g du groupe $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ des inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$.

(c) Ecrire chaque élément de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$ comme puissance de g.

[007409]

4 106, 107, 108 - Algèbre linéaire

Exercice 7410

Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les quatre vecteurs

$$v_1 = (1,0,-1,1),\ \ v_2 = (2,1,0,1),\ \ v_3 = (1,1,1,0),\ \ v_4 = (3,1,-1,2).$$

Soit $V = Vect(v_1,v_2,v_3,v_4)$. De plus, soit

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ \ -3x+y+2z-t = 0\}.$$

(a) Montrer que $\dim V = 2$. Le système (v_1,v_2,v_3,v_4) est-il libre ? Est-il générateur de $\mathbb{R}^4$?

(b) Donner une base de V, la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.

(c) Calculer des équations cartésiennes pour V.

(d) Montrer que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(e) Trouver une représentation paramétrique de H, et en déduire une base de H. Que vaut $\dim H$?

(f) Montrer que $v_3 \in H$ et que $v_1 \notin H$. En déduire $\dim(V \cap H)$ et $\dim(V + H)$.

(g) Donner une base de $V \cap H$.

Correction ▼ [007410]

Exercice 7411

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (4x+y+z, 4x+7y+2z, -6x-6y-z).$$

(a) Écrire la matrice A de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que les vecteurs $v_1 = (1,0,-2)$, $v_2 = (1,-1,0)$ et $v_3 = (0,-1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathscr{B}'$.

(c) Déterminer la matrice de passage $[Id_{R^3}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, et la matrice de passage $[Id_{R^3}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

(d) Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}'$.

(e) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction ▼ [007411]

Exercice 7412

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble de polynômes dans $\mathbb{R}$ et soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré au plus n. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\Phi(P)(X) := (2X+1)P(X) - (X^2-1)P'(X).$$

(a) Montrer que l'application Φ est un endomorphisme.

(b) Montrer que la matrice A de l'application Φ dans la base $(1, X, X^2)$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Déterminer le rang de Φ.

(d) En déduire que Φ est une application inversible.

(e) Déterminer une base du noyau de l'application $\Phi - Id$, où Id désigne l'application identité.

(f) Montrer que la dimension de l'image de $\Phi - Id$ est de dimension 2. Déterminer une base de l'image.

(g) Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant l'identité : $2X\,P = (X^2-1)\,P'$.

Correction ▼ [007412]

Exercice 7413

Pour un entier $n \geqslant 2$ et x dans $\mathbb{R}$, considérons la matrice d'ordre n :

$$D_n = \begin{pmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $det(D_2)$ et $det(D_3)$.

(b) Montrer d'abord que

$$det(D_n) = \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \dots & \dots & x+n-1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix},$$

et ensuite

$$det(D_n) = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

(c) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, calculer $det(D_n)$ pour tout n.

(d) Pour chaque n, pour quelles valeurs de x la matrice D_n est-elle inversible ?

Correction ▼ [007413]

Exercice 7414

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F l'ensemble de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent $x \mapsto ax+b$, pour certains réels a et b. Soit enfin $G = \{f \in E | f(0) = 0, f'(0) = 0\}$.

(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

(b) Montrer que

$$E = F \oplus G.$$

Correction ▼ [007414]

Troisième partie
L3

5 Géométrie euclidienne

5.1 240.00 - Exercices de géométrie affine

Exercice 7415 Questions de cours

(a) Rappeler les définitions du parallélisme et du parallélisme faible.

(b) Soit (λ_i) p nombre réels de somme égale à 1 et M_i p points d'un espace affine. Rappeler le sens de la notation $\sum_i \lambda_i M_i$. Est-il nécessaire que les points M_i soient distincts ?

[007415]

Exercice 7416

Donner la liste des sous-espaces affines du plan affine $\mathbb{R}^2$ et de l'espace affine $\mathbb{R}^3$. [007416]

Exercice 7417 Avec le cours

— Deux plans de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ peuvent-ils avoir un unique point d'intersection ?

— Dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$, quelle est la dimension d'un sous-espace affine défini par deux équations affines indépendantes ?

[007417]

Exercice 7418 Avec le cours

Soit A,B,C,D quatre points d'un plan affine. Soit I le milieu de $[C,D]$. L'isobarycentre des points A,B,C,D est-il le centre de gravité du triangle A,B,I ? [007418]

Exercice 7419 Dans $\mathbb{R}^3$, à partir d'équations

Soit l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0,A_1,A_2,A_3.

(a) Montrer que le sous-ensemble A de l'espace affine $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \iff \begin{cases} 2x-y-z-3=0 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$$

est un sous-espace affine. Préciser sa dimension, l'espace vectoriel directeur et un repère affine.

(b) Même question avec B d'équation

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in B \iff \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+2y=3z+1 \\ 5x+5y=10z \end{cases}$$

[007419]

Exercice 7420 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver des équations

Soit l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0,A_1,A_2,A_3.

(a) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{A}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $(2x-y-z=5)$.

(b) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{B}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de direction $\mathbb{R}\vec{u}\oplus\mathbb{R}\vec{v}$ où $\vec{u}$ est le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ dans la base $(A_0\vec{A}_1, A_0\vec{A}_2 A_0\vec{A}_3)$.

(c) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{C}$ engendré par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

[007420]

Exercice 7421 Dans $\mathbb{R}^3$, trouver encore des équations

---

Soit l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0, A_1, A_2, A_3.

(a) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{D}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et parallèle à la droite d'équation $\left\{\begin{array}{c} 2x-y-z=5\\ x+y+z=3\end{array}\right.$.

(b) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{E}$ passant par le point $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ où $\vec{u}$ est le vecteur de coordonées $\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$ dans la base $(A_0\vec{A}_1, A_0\vec{A}_2 A_0\vec{A}_3)$.

(c) Trouver un système d'équations pour le sous-espace affine $\mathscr{F}$ engendré par les points $A\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$.

[007421]

Exercice 7422 Calcul en coordonnées cartésiennes dans le plan

---

Soit a et b deux réels non nuls distincts. Dans un plan affine muni d'un repère, calculer une équation cartésienne de la droite Δ passant par le point de coordonnées (a,b) et par le point d'intersection des deux droites D d'équation $x/a+y/b=1$ et D' d'équation $x/b+y/a=1$. [007422]

Exercice 7423 Deux droites sécantes dans l'espace

Dans un espace affine de dimension 3 muni d'un repère affine.

(a) Montrer que les droites D et D' d'équations cartésiennes

$$D\ :\ x+y-z-2=0 \quad \text{et} \quad 2x-y+3z-1=0$$

et

$$D'\ :\ x-2y-3 \quad \text{et} \quad 3x+6y-1$$

sont concourantes.

(b) Trouver une équation cartésienne du plan qu'elles déterminent.

[007423]

Exercice 7424 Sur les médianes

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$, on considère le triangle ABC. Choisir un repère affine A_0,A_1,A_2 adapté pour montrer simplement que les médianes du triangle ABC sont concourantes. On devra calculer une équation pour chaque médiane et montrer qu'elles sont concourantes. [007424]

Exercice 7425 Dessiner

Dans le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère A_0,A_1,A_2, représenter l'enveloppe convexe des points donnés en coordonnées cartésiennes $A\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, E\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$. [007425]

Exercice 7426 Une propriété des tétraèdres

Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension 3, et A,B,C,D un tétraèdre de $\mathscr{E}$. Montrer que les droites joignant les milieux des cotés opposés du tétraèdre sont concourantes. [007426]

Exercice 7427 Centre de gravité

Dans un plan affine, soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles de centre de gravité G et G' respectivement.

(a) Calculer $\vec{AB'}+\vec{BC'}+\vec{CA'}$ en fonction de G et G'.

(b) Montrer que ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité si et seulement s'il existe un point D tel que $DBA'C$ et $DB'AC'$ soient des parallélogrammes.

[007427]

Exercice 7428 Localiser des points en coordonnées barycentriques

(a) Soit (AB) une droite dans un espace affine déterminée par deux points distincts A et B. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère AB les trois régions de la droite découpées par les points A et B.

(b) Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine E. Décrire à l'aide des coordonnées barycentriques dans le repère ABC les sept régions découpées par les droites qui portent les cotés du triangle ABC.

[007428]

Exercice 7429 Exercice de construction

On suppose savoir tracer la parallèle à une droite donnée passant par un point donné. On peut utiliser un compas mais seulement pour reporter des longueurs égales. Partager en sept parties de même longueur un segment donné. [007429]

Exercice 7430 Dans un plan affine

On considère dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ un triangle non aplati ABC. Soit (a,b), (c,d) et (e,f) trois couples de nombre réels de somme non nulle. On désigne par C' le barycentre de $(A,a;B,b)$, A' le barycentre de $(B,c;C,d)$ et B' le barycentre de $(C,e;A,f)$. Montrer que A',B' et C' sont alignés si et seulement si $ace=-bdf$. [007430]

Exercice 7431

Une application affine peut-elle avoir exactement deux points fixes distincts ?

Donner un exemple d'application affine sans point fixe, qui n'est pas une translation. [007431]

Exercice 7432

Soit le plan affine E muni du repère cartésien $(A,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f qui à tout $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M'\begin{pmatrix} 2x-5y+3 \\ -4x+10y-1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que f est affine et écrire la matrice de son application linéaire associée $\vec{f}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$.

(b) Déterminer les points fixes de f.

(c) Montrer que $Im\vec{f}$ et $Ker\vec{f}$ sont supplémentaires dans $\vec{E}$. Donner une base de chacun de ces sous-espaces.

[007432]

Exercice 7433 Les translations

Montrer à l'aide de la règle du parallélogramme que les seules applications affines dont la partie linéaire est l'identité sont les translations. [007433]

Exercice 7434 Les homothéties

Soit E un espace affine et f une application affine dont la partie linéaire est multiple de l'identité de $\vec{E}$. On suppose que $\vec{f}=\lambda Id_{\vec{E}}$ avec $\lambda \neq 1$. Décrire les valeurs propres de $\vec{f}$. Montrer que f a un unique point fixe. Montrer alors que f est une homothétie. [007434]

Exercice 7435 Les projections

Soit E un espace affine et F et G deux sous espaces affines de direction supplémentaire dans $\vec{E}$. Décrire $F\cap G$.

(a) Soit M un point de E. Montrer que le sous-espace affine passant par M et parallèle à G rencontre F en un unique point noté $p(M)$.

(b) Montrer que l'application p est affine.

(c) Déterminer les points fixes de p.

(d) Montrer que $p\circ p=p$.

[007435]

Exercice 7436 Les symétries

Soit E un espace affine et F et G deux sous espaces affines de direction supplémentaire dans $\vec{E}$.

(a) Décrire la symétrie s par rapport à F parallèlement à G. Est-elle bijective ?

(b) Soit M un point de E. Quel est le milieu du segment $[M,s(M)]$?

(c) Déterminer $ker(\vec{s}-Id_{\vec{E}})$ et $ker(\vec{s}+Id_{\vec{E}})$.

(d) Soit $\vec{u}$ un vecteur de G. Déterminer l'application $s\circ t_{\vec{u}}\circ s^{-1}$.

[007436]

Exercice 7437 Les affinités et transvections

Dans l'espace affine $E=\mathbb{R}^3_{aff}$, on considère un endomorphisme affine f qui admet un hyperplan de points fixes F. Soit A un point de E qui n'est pas dans F.

(a) Que dire de f si $f(A)=A$?

(b) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ coupe le plan F en un point Ω. Expliquer comment construire $f(M)$? On dit alors que l'application f est une affinité.

(c) On suppose maintenant que $f(A)$ est différent de A. On suppose de plus que la droite $(Af(A))$ ne rencontre pas le plan F. Expliquer comment construire $f(M)$? On dit alors que l'application f est une transvection.

[007437]

Exercice 7438 Écrire des expressions analytiques

Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère affine A_0,A_1,A_2,A_3, donner l'expression analytique

(a) i. de l'homothétie h de centre $C\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et de rapport 4.

ii. de la symétrie s d'axe $(x+y+z=1)$ parallèlement à $\vec{A_0A_1}$.

iii. de l'affinité a de base $(x+y+z=1)$ de rapport 3 parallèlement à $\vec{A_0A_1}$.

iv. de la transvection t de base $(x+y+z=1)$ qui envoie A_0 sur $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$

(b) Donner des expressions analytiques des applications affines précédentes dans des repères mieux adaptés à déterminer.

[007438]

Exercice 7439 Constructions

(a) Deux droites se coupent hors de la feuille en un point I. Soit A un point de la feuille. Tracer la droite (AI).

(b) Soit d et d' deux droites parallèles et M un point du plan. Tracer avec une règle (non graduée) la parallèle à d passant par M.

[007439]

Exercice 7440

Dans un plan affine, quel est l'ensemble des milieux des segments dont les extrémités appartiennent respectivement à deux segments donnés. [007440]

5.2 204.00 Exercices sur les espaces vectoriels euclidiens

Notation : dans tous les exercices qui suivent, E désigne un espace vectoriel euclidien.

Exercice 7441

Soit x_i n nombres réels. Montrer que $\left(\sum_1^n x_i\right)^2 \leqslant n\sum_1^n x_i^2$. [007441]

Exercice 7442

On suppose que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$. [007442]

Exercice 7443 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base orthonormée. [007443]

Exercice 7444

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel. Soit F le sous espace engendré par $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,-1,1)$. Déterminer une base orthonormée de F et la compléter pour obtenir une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. [007444]

Exercice 7445 Vrai ou faux, Préciser

Soit $(E, < . >)$ un espace vectoriel euclidien. Répondre par vrai ou faux, puis dire sous quelles hypothèses supplémentaires sur la base l'affirmation est vraie.

(a) La matrice A d'une application linéaire orthogonale u dans une base $\mathscr{B}$ de E vérifie ${}^tAA = Id$.

(b) Dans toute base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, la matrice d'une rotation est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

[007445]

Exercice 7446

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique et de la base canonique. Soit H le plan d'équation $x + 2y + 2z = 0$. Soit π la projection orthogonale sur H et s la symétrie orthogonale par rapport à H.

(a) Déterminer un vecteur ε_1 normal à H et unitaire.

(b) Pour tout vecteur V de E, écrire $V - \pi(V)$, puis $\pi(V)$ à l'aide de V et ε_1 seulement. (On pourra utiliser des produits scalaires comme coefficients).

(c) Déterminer les matrices de π et de s dans la base canonique. Sont-elles orthogonales, symétriques ?

[007446]

5.3 242.00 - Exercices sur les espaces affines euclidiens

Exercice 7447 Cours

Démontrer que dans un espace affine euclidien E la fonction $E \times E \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \|x-y\|$ est une fonction distance. [007447]

Exercice 7448 Distance entre deux droites de l'espace

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3. Pour tout couple de droites (D_1, D_2) on appelle

$$d(D_1,D_2) = \inf\{\|y_1 - y_2\|, y_1 \in D_1, y_2 \in D_2\}.$$

(a) Calculer $d(D_1,D_2)$ quand D_1 et D_2 sont concourantes.

(b) Soit $a_1 \in D_1$ et $a_2 \in D_2$. En décomposant $a_1 - a_2$ dans $\vec{D_1} + \vec{D_2} + (\vec{D_1} + \vec{D_2})^\perp$ montrer qu'il existe $x_1 \in D_1$ et $x_2 \in D_2$ tels que $d(D_1,D_2) = d(x_1,x_2)$.

(c) Montrer que pour $z_1 \in D_1$ et $z_2 \in D_2$,

$$d(D_1,D_2) = d(z_1,z_2) iff z_1 - z_2 \in \vec{D_1}^\perp \cap \vec{D_2}^\perp.$$

(d) Montrer que si e_i est un vecteur directeur de D_i

$$d(D_1,D_2)^2 = \frac{Gram(a_1 - a_2, e_1, e_2)}{Gram(e_1, e_2)}$$

où $Gram(u_1,u_2,\cdots,u_r) := det(\langle u_i, u_j\rangle)_{1 \leqslant i,j \leqslant r}$.

(e) Calculer la distance entre les deux droites données par les équations cartésiennes dans un repère orthonormé de $\mathscr{E}$:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_1 \iff \begin{cases} x+y=1 \\ x+y+2z=1 \end{cases} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_2 \iff \begin{cases} y+z=1 \\ x+y-2z=3 \end{cases}$$

[007448]

Exercice 7449 Angle de deux demi-droites de même origine

Dans le plan euclidien orienté $\mathscr{P}$, on considère deux demi-droites d_1 et d_2 de même origine Ω.

(a) Rappeler la forme générale d'une matrice de rotation vectorielle dans une base orthonormée directe de $\vec{\mathscr{P}}$. Comment change cette matrice quand on change de base orthonormée ?

(b) Montrer qu'il existe une unique rotation de centre Ω qui envoie d_1 sur d_2. On pourra donc définir l'angle orienté de deux demi-droites comme l'angle de la rotation qui envoie la première sur la seconde.

[007449]

Exercice 7450

Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé on considère les points $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer selon la valeur de r l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - 2MB^2 = r$.

(b) Déterminer selon la valeur de r l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = r$.

[007450]

Exercice 7451 Sur les homothéties translations

On travaille dans un espace affine euclidien. On rappelle que les homothéties-translations sont caractérisées par le fait qu'elles transforment toute droite en une droite parallèle. On appelle dilatation une application affine dont la partie linéaire est une homothétie vectorielle.

(a) Montrer que l'ensemble des dilatations coïncide avec l'ensemble des homothéties-translations.

(b) Montrer que l'ensemble des dilatations est un sous-groupe distingué du groupe des applications affines.

(c) On travaille maintenant dans le plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Montrer qu'il existe exactement deux dilatations qui transforment un cercle donné en un cercle donné.

[007451]

Exercice 7452 Inégalité isopérimétrique

On considère dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé la courbe C d'équation polaire $r = f(\theta)$ où f est une fonction continue positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $f(-\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(a) Représenter C dans le cas où $f = cos$.

(b) On rappelle que l'aire de la surface S délimitée par la courbe C est donnée par

$$a(S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} f^2(\theta) d\theta.$$

Montrer que

$$a(S) \leqslant \frac{\pi}{4} (diam(S))^2.$$

[007452]

Exercice 7453 Cours

Dans un espace vectoriel euclidien, deux sous-espaces vectoriels non nuls orthogonaux sont-ils toujours en somme directe ?

(a) Montrer en utilisant la forme réduite que le déterminant d'une isométrie est $(-1)^{codimE_1}$ où E_1 est l'espace propre de valeur propre 1.

(b) Rappeler toutes les isométries du plan euclidien et de l'espace euclidien de dimension 3, en précisant leur partie linéaire, leur point fixe, leur axe, leur composante à point fixe et leur composante de glissement.

(c) Rappeler la construction de l'axe radical de deux cercles non sécants.

(d) Déterminer le groupe d'isométries d'un segment dans le plan euclidien.

[007453]

Exercice 7454

Soit A et B deux points fixés dans un plan affine euclidien. Déterminer le lieu des points M du plan où $MA \perp MB$. [007454]

Exercice 7455

Le but de cet exercice est de démontrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle non plat ABC par rapport à un des cotés (par exemple (AC)) est sur le cercle circonscrit.

Soit ABC un triangle non plat. La hauteur issue de A coupe (BC) en A' et la hauteur issue de C coupe (AB) en C'. Démontrer que les points A', B, C' et H sont cocycliques. Démontrer que les angles de droites $((BC'), (BA'))$ et $((HC'), (HA'))$ sont égaux. Conclure. [007455]

Exercice 7456

Deux cercles sont dits orthogonaux si les tangentes aux points d'intersection sont orthogonales. Montrer que les cercles Cet C' sont orthogonaux si et seulement si la puissance du centre de C par rapport à C' est égale au carré du rayon de C. [007456]

Exercice 7457

Soit A et B deux points d'un plan affine euclidien. Déterminer suivant la valeur de la constante k,

(a) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 + MB^2 = k$

(b) l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = k$

(c) et l'ensemble des points M du plan tels que $MA/MB = k$

(d) l'ensemble des points M du plan tels que $MA/MB < k$

[007457]

Exercice 7458

En décomposant les rotations en produits de réflexions, déterminer le centre d'une composée de deux rotations dont la somme des angles n'est pas nulle modulo 2π. [007458]

Exercice 7459 Décomposition des isométries planes

(a) Que peut-on dire d'une isométrie plane qui a trois points fixes non alignés ?

(b) Soit ϕ une isométrie plane qui a deux points fixes distincts A et B. Soit C un point hors de la droite (AB) et C' son image par ϕ. Si C' est différent de C, déterminer la médiatrice du segment $[CC']$ et montrer que $s_{(AB)} \circ \phi$ est l'identité. En déduire la nature de ϕ.

(c) Soit ϕ une isométrie différente de l'identité qui a un point fixe A. Soit B un autre point du plan et B' son image. Si B' est différent de B, soit d la médiatrice du segment $[BB']$ Montrer que $s_d \circ \phi$ a deux points fixes. Montrer que ϕ est composée de réflexions.

(d) Montrer qu'une isométrie plane qui n'a pas de point fixe peut s'écrire composée de moins de trois réflexions.

[007459]

Exercice 7460

On munit le plan affine euclidien d'un repère orthonormé (O,i,j) et on l'identifie au plan complexe. Écrire à l'aide des affixes complexes, la symétrie glissée d'axe d'équation $x+y=2$ et de vecteur $(3,3)$.
[007460]

Exercice 7461 Déterminer une rotation à partir d'images

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé. Soient A, B, C et D les points de E dont les coordonnées sont

$$A:(0,3), \quad B:(2,1), \quad C:(2,3) \text{ et } D:(0,1).$$

(a) Montrer que les droites (A,B) et (C,D) sont orthogonales et expliciter les coordonnées de leur point d'intersection.

(b) Prouver l'existence d'une *rotation* qui envoie A sur C, C sur B, B sur D et D sur A. Expliciter une représentation matricielle de cette rotation.

[007461]

Exercice 7462 Trouver l'isométrie

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé. On note v la transformation de E dans E qui envoie le point de coordonnées (x,y,z) sur le point de coordonnées (x',y',z') définies par :

$$x' = \frac{2x-2y+z+1}{3}; y' = \frac{2x+y-2z+2}{3}; z' = \frac{x+2y+2z+5}{3}.$$

Montrer que v est une isométrie de E. Préciser de quel type d'isométrie il s'agit. Expliciter son axe et son vecteur de glissement. [007462]

Exercice 7463 Composée d'isométries

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé (O,i,j,k). On désigne par D la droite d'équation $(x=0,z=1)$ et par D' la droite d'équation $(y=0,z=0)$. On note S_D la symétrie par rapport à la droite D et R_θ la rotation d'axe D' et d'angle θ (en considérant la base (j,k) comme directe). On pose $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

(a) Écrire dans la base (i,j,k) la matrice de $\overrightarrow{S_D}$, celle de $\overrightarrow{R_\theta}$ et celle de $\overrightarrow{\varphi}$. Écrire les expressions analytiques de S_D et de R_θ dans le repère (O,i,j,k).

(b) Montrer que φ est une symétrie éventuellement glissée d'axe une droite Δ.

(c) Pour tout point M de E, prouver que les milieux de $\big(M,s_\Delta(M)\big)$ et de $\big(M,\varphi(M)\big)$ sont sur Δ.

(d) En utilisant le point O, montrer que Δ passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$. et est contenue dans le plan affine d'équation $x=0$.

(e) Donner les composantes du vecteur de glissement de φ en fonction de θ.

[007463]

Exercice 7464

(a) Soit C un cercle et $\vec{u}$ un vecteur. Construire une corde $[AB]$ du cercle C telle que $\vec{AB} = \vec{u}$.

(b) Construire un segment $[AB]$ connaissant son milieu I et sachant que A appartient à une droite donnée d et B à un cercle donné C.

(c) Construire un carré $ABCD$ sachant que A et C sont sur une droite donnée d_1 que B est sur une droite donnée d_2 et que D est sur une droite donnée d_3.

[007464]

Exercice 7465

Soit d une droite. Soit $\mathscr{C}$ un cercle et A un point de $\mathscr{C}$. Construire un cercle tangent à la droite d et tangent en A au cercle $\mathscr{C}$. [007465]

Exercice 7466

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2+xy+y^2+x-y=0$$

(a) Montrer que cette courbe possède un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$

(b) Montrer que dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ la première bissectrice Δ est axe de symétrie.

(c) On considère le repère orthonormé direct $(\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de Δ. Donner l'équation de (C) dans ce repère.

(d) Montrer que dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ la seconde bissectrice $\Delta^{'}$ est axe de symétrie.
Donner les équations de Δ et $\Delta^{'}$ dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$.
Sachant que (C) est une ellipse, tracer (C) dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$.

Reprendre cet exercice mais en utilisant la théorie des formes quadratiques et leur application aux coniques. Notamment retrouver les axes de (C). [007466]

Exercice 7467

On considére le plan muni d'un un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2-3xy+2y^2+2x-3y+1=0$$

(a) Montrer que cette courbe possède un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$

(b) En déduire que (C) est la réunion de deux droites dont on donnera les équations dans le règere $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$

[007467]

Exercice 7468

On considère le plan muni d'un un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$2x^2+3xy-2y^2-10=0$$

(a) Vérifier que O est un centre de symétrie. Trouver une base orthonormale tel que l'équation de (C) soit de la forme $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b$ réels).

(b) Donner l'équation des asymptotes de (C) et tracer (C) dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$.

[007468]

Exercice 7469

On considère le plan euclidien muni d'un un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$4x^2-4xy+y^2-3x-y-1=0$$

(a) Montrer que (C) est une parabole.

(b) Trouver un repère orthonormé $(S,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ tel que (C) ait une équation de la forme $x^2=2py$ dans ce repère.

[007469]

Exercice 7470

On considère le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$x^2-2xy+y^2-6x-10y+9=0$$

(a) Montrer que (C) est une parabole.

(b) Trouver un repère orthonormé $(S,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ tel que (C) ait une équation de la forme $x^2=2py$ dans ce repère.

Indication. On devra trouver que dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ le sommet a pour coordonnées $(0,1)$ et pour axe la droite $y=x+1$.

[007470]

Exercice 7471

Etudier les coniques suivantes dont les équations sont données dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$
On précisera suivant la nature le centre, les axes, le sommet et les asymptotes.

(a) $x^2+8xy-5y^2-28x+14y+3=0$.

Indication. On trouvera une hyperbole de centre $(2,3)$ dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et d'équation réduite (donc rapportée à ses axes) $3x^2-7y^2=4$.

(b) $2x^2+xy+y^2+4x-y-2=0$

Indication. On trouvera une ellipse de centre $(\frac{-9}{7},\frac{8}{7})$ dans le repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et d'équation réduite (donc rapportée à ses axes) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}x^2+\frac{3-\sqrt{2}}{2}y^2-\frac{36}{7}=0$

[007471]

Exercice 7472

On considére le plan euclidien muni d'un un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation

$$sqrt3x^2+6xy+\sqrt{3}y^2+2(\sqrt{3}-6)x-2(3+\sqrt{3})y+1=0$$

(a) Montrer que cette courbe posséde un centre de symétrie Ω et donner son équation dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$

(b) Montrer que dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ la droite Δ d'équation $y=\sqrt{3}x$ est axe de symétrie.

(c) On considère le repère orthonormé direct $(\Omega,\overrightarrow{I},\overrightarrow{J})$ où $\overrightarrow{I}$ est un vecteur unitaire de Δ. Donner l'équation de (C) dans ce repère.

(d) Montrer que dans le repère $(\Omega,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$ la perpendiculaire $\Delta^{'}$ à Δ est axe de symétrie.

(e) Sachant que (C) est une hyperbole dessiner graphiquement (C) dans le repère $(O,\overrightarrow{\imath},\rightarrow)$.

[007472]

5.4 242.01-02 - Isométries

Exercice 7473 Questions de cours

Rappeler toutes les isométries du plan euclidien et de l'espace euclidien de dimension 3, en précisant leur partie linéaire, leur point fixe, leur axe, leur composante à point fixe et leur composante de glissement.

[007473]

Exercice 7474 Déterminer une rotation à partir d'images

Soit E un plan affine euclidien muni d'un repère cartésien orthonormé. Soient A, B, C et D les points de E dont les coordonnées sont

$$A:(0,3),\quad B:(2,1),\quad C:(2,3)\quad \text{et}\quad D:(0,1).$$

(a) Montrer que les droites (A,B) et (C,D) sont orthogonales et expliciter les coordonnées de leur point d'intersection.

(b) Prouver l'existence d'une *rotation* qui envoie A sur C, C sur B, B sur D et D sur A. Expliciter une représentation matricielle de cette rotation.

[007474]

Exercice 7475 Reconnaître une application affine

Soit E un plan affine euclidien. Soient $\mathscr{R}$ un repère cartésien orthonormé de E, et $f:E\to E$ l'application affine définie dans $\mathscr{R}$ par l'égalité

$$f\big((x,y)\big)=\left(\frac{3x+4y+8}{5},\frac{4x-3y-1}{5}\right).$$

(a) L'application f possède-t-elle des points fixes ?

(b) Démontrer que lorsque M décrit E, le milieu de $(M,f(M))$ décrit une droite dont on précisera l'équation.

(c) Démontrer que f est une isométrie dont on précisera la nature, l'axe et la composante translation.

[007475]

Exercice 7476 Trouver l'isométrie

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé. On note v la transformation de E dans E qui envoie le point de coordonnées (x,y,z) sur le point de coordonnées (x',y',z') définies par :

$$x' = \frac{2x-2y+z+1}{3}; y' = \frac{2x+y-2z+2}{3}; z' = \frac{x+2y+2z+5}{3}.$$

Montrer que v est une isométrie de E. Préciser de quel type d'isométrie il s'agit. Expliciter son axe et son vecteur de glissement. [007476]

Exercice 7477 Composée d'isométries

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé (O,i,j,k). On désigne par D la droite d'équation $(x=0, z=1)$ et par D' la droite d'équation $(y=0, z=0)$. On note S_D la symétrie par rapport à la droite D et R_θ la rotation d'axe D' et d'angle θ (en considérant la base (j,k) comme directe). On pose $\varphi = S_D \circ R_\theta$.

(a) Écrire dans la base (i,j,k) la matrice de $\overrightarrow{S_D}$, celle de $\overrightarrow{R_\theta}$ et celle de $\overrightarrow{\varphi}$. Écrire les expressions analytiques de S_D et de R_θ dans le repère (O,i,j,k).

(b) Montrer que φ est une symétrie éventuellement glissée d'axe une droite Δ.

(c) Pour tout point M de E, prouver que les milieux de $\big(M, s_\Delta(M)\big)$ et de $\big(M, \varphi(M)\big)$ sont sur Δ.

(d) En utilisant le point O, montrer que Δ passe par le point de coordonnées $(0,0,1)$. et est contenue dans le plan affine d'équation $x=0$.

(e) Donner les composantes du vecteur de glissement de φ en fonction de θ.

[007477]

Exercice 7478 Sur un groupe d'isométries

Dans un plan affine euclidien orienté on considère deux points distincts O et A. On note r la rotation de centre O et d'angle $2\pi/3$ et ρ la rotation de centre A et d'angle $2\pi/3$. On pose $B = r(A)$ et $C = r(B)$. Enfin on note G le groupe d'isométries engendré par r et ρ.

(a) Montrer que G ne contient que des translations et des rotations d'angle $2\pi/3$ et $-2\pi/3$.

(b) Expliciter une relation de dépendance entre les vecteurs $\vec{OA}, \vec{OB}$ et $\vec{OC}$ (on pourra remarquer que la somme de ces vecteurs est invariante par r).

(c) Montrer que $r \circ \rho^{-1}$ et $r^{-1} \circ \rho$ sont des translations dont on précisera le vecteur (on pourra étudier l'image de A).

(d) Montrer que G contient toutes les translations de vecteur $p\vec{OA} + q\vec{OB}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $p+q \in 3\mathbb{Z}$.

[007478]

Exercice 7479 Groupe laissant stable une partie

Soient E un espace affine euclidien de dimension 3 et $\mathscr{R}$ un repère cartésien orthonormé de E. Soit n un entier $\geqslant 3$. On considère l'ensemble X des points de E dont les coordonnées (x,y,z) dans $\mathscr{R}$ satisfont aux deux conditions suivantes :

(a) Les nombres x, y et z sont dans $\mathbb{Z}$;

(b) Le nombre $x+y+z$ est divisible par n.

On note O l'origine de $\mathscr{R}$ et A, B, C et D les points de coordonnées dans $\mathscr{R}$:

$$A = (n,0,0), \quad B = (0,n,0), \quad C = (0,0,n) \quad \text{et} \quad D = (1,-1,0).$$

Soient G le sous-groupe des isométries affines de E qui conservent globalement l'ensemble X et G_0 le sous-groupe de G formé des éléments qui fixent O.

(a) Soient P et Q deux éléments de X. Montrer que la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$ appartient à G. En déduire une caractérisation des translations qui appartiennent à G.

(b) Quels sont les centres des symétries par rapport à un point qui appartiennent à G ?

(c) Décrire l'ensemble des éléments P de X tels que $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = 2$.

(d) On considère l'ensemble $\mathscr{T}$ des transformations affines qui laissent fixe O et conservent globalement l'ensemble $\{A,B,C\}$. Montrer que les éléments de $\mathscr{T}$ sont des isométries et qu'ils conservent X. Montrer que $\mathscr{T}$ est un sous-groupe de G_0 isomorphe au groupe de permutations S_3. Expliciter la représentation matricielle de des transformations de $\mathscr{T}$.

(e) Déduire des questions précédentes l'orbite de D sous l'action de G_0. Montrer que tout élément de G_0 laisse globalement invariant le plan H d'équation $x+y+z=0$.

(f) Expliciter une représentation matricielle de la symétrie orthogonale par rapport à H. Cette symétrie appartient-elle à G ?

(g) On considère l'ensemble G_0' des restrictions à H des éléments de G_0. En étudiant l'action de G_0' sur H montrer que l'ordre de G_0' est 12. Montrer que G_0 est d'ordre 12 ou 24 suivant la valeur de n.

[007479]

5.5 241.00 - Constructions par isométrie

Exercice 7480

Construire un segment $[A,B]$ connaissant son milieu I et sachant que A appartient à une droite donnée d et B à un cercle donné $\mathscr{C}$. [007480]

Exercice 7481

Construire un triangle équilatéral ABC connaissant A et sachant que B appartient à un cercle donné $\mathscr{C}$ et C à un autre cercle donné $\mathscr{C}'$. [007481]

Exercice 7482

Soit $\mathscr{C}$ un cercle et $\vec{u}$ un vecteur. Construire une corde AB de $\mathscr{C}$ telle que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. [007482]

Exercice 7483

Construire un carré $ABCD$ sachant que A et C sont sur une droite D_1 donnée, B sur une droite D_2 donnée et D sur une droite D_3 donnée. [007483]

Exercice 7484

Soit d une droite. Soit $\mathscr{C}$ un cercle et A un point de $\mathscr{C}$. Construire un cercle tangent à la droite d et tangent en A au cercle $\mathscr{C}$. [007484]

Exercice 7485

Dans un triangle ABC rectangle en A trouver la relation entre la longueur de la hauteur $[AH]$ issue de A et la longueur des segments $[BH]$ et $[CH]$. Étant donné un segment de longueur a construire un segment de longueur $\sqrt{a}$. [007485]

Exercice 7486

Étant donné un segment de longueur a contruire un segment de longueur $a\sqrt{5}$. [007486]

6 Géométrie euclidienne (Examen)

6.1 242.01-02 Examen 1

Exercice 7487

Dans le plan affine P réel, muni d'un repère affine (A_0, A_1, A_2), à quelle condition le point M de coordonnées barycentriques (α, β, γ) et les points $A(1,5,-2)$ et $B(3,2,0)$ sont-ils alignés ? [007487]

Exercice 7488

(a) Donner la définition d'un sous-espace affine d'un espace affine E.

(b) Donner l'exemple d'une application $f\ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui n'est pas affine.

(c) Enoncer et démontrer le sens direct du théorème de Thalès.

[007488]

Exercice 7489

Dans le plan affine P réel, muni d'un repère affine (A_0, A_1, A_2), on considère les points donnés en coordonnées barycentriques par $A(2,-1,5)$ et $B(1,1,2)$ et $C(2,3,0)$. Déterminer les coordonnées barycentriques normalisées, du barycentre G des points massiques $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,-1)$. [007489]

Exercice 7490

Dans l'espace affine E réel, on considère une homothétie h de centre Ω et de rapport $1/2$ et une translation t de vecteur $\vec{u}$. Quelle est la nature de $t \circ h$? [007490]

Exercice 7491

Dans l'espace affine E réel, muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, donner un système d'équations pour la droite passant par le point $A(1,2,3)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$. [007491]

Exercice 7492

Dans l'espace affine E réel, muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, soit f une application affine dont la partie linéaire a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on dire de l'ensemble des points fixes de f ? [007492]

Exercice 7493

Dans l'espace affine E réel, muni d'un repère cartésien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, donner un système d'équations pour la droite passant par le point $A(3,2,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{\imath} - \vec{k}$. [007493]

Exercice 7494

Dans l'espace affine E réel, muni d'un repère cartésien $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère une application affine f dont la partie linéaire a pour matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Que peut-on dire de l'ensemble des points fixes de f ? [007494]

6.2 242.01-02 Examen 2

Exercice 7495

Soit $A(0,0)$ et $B(3,0)$ deux points d'un plan affine euclidien muni d'un repère $\mathscr{R} = (O,i,j)$ cartésien orthonormé. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que

$$2MA^2 - MB^2 = -2.$$

[007495]

Exercice 7496 Reconnaître une application affine

Soit E un plan affine euclidien. Soit $\mathscr{R} = (O,i,j)$ un repère cartésien orthonormé de E.

(a) Déterminer l'expression analytique de la translation t de vecteur $\vec{u} = 3i + j$.

(b) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale s d'axe la droite d d'équation $(x+y = 1)$.

(c) Déterminer l'expression analytique de la composée $f = t \circ s$.

(d) Démontrer que f est une isométrie. Préciser le déterminant de sa partie linéaire. Que peut-on en déduire ?

(e) Déterminer l'ensemble des points fixes de f. Déterminer son axe (on pourra montrer que pour tout point M du plan le milieu du segment $[M, f(M)]$ est sur une droite dont on précisera l'équation).

(f) Déterminer la composante de translation de f.

[007496]

Exercice 7497

On reprend les notations de l'exercice précédent. Soit E un plan affine euclidien. Soit $\mathscr{R} = (O,i,j)$ un repère cartésien orthonormé de E. On considère la translation t de vecteur $\vec{u} = 3i + j$ et la symétrie orthogonale s d'axe la droite d d'équation $(x+y = 1)$.

(a) Décomposer le vecteur $\vec{u}$ dans la somme directe orthogonale $\vec{E} = \vec{d}^{\perp} \oplus \vec{d}$ en $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

(b) Déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t_{\vec{v}} \circ s$. On pourra décomposer chaque isométrie en produits de réflexions.

(c) Déterminer géométriquement la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t \circ s$.

[007497]

Exercice 7498

Rappeler la construction des centres d'homothéties qui envoient un cercle sur un autre de rayon différent.

Construire un cercle tangent à deux droites données et passant par un point donné. [007498]

Exercice 7499 Questions de cours

(a) Dans un espace affine, quel est le sens de la notation $1/3\ A + 1/3\ B + 1/3\ C$ où A, B, C sont trois points ?

(b) Soit A, B, C, D quatre points d'un plan affine. Soit I le milieu de $[C, D]$. L'isobarycentre des points A, B, C, D est-il le centre de gravité du triangle A, B, I ?

(c) Une isométrie est-elle caractérisée par sa partie linéaire ?

(d) Deux isométries d'un espace affine euclidien de dimension trois qui ont exactement le même plan P de points fixes sont-elles égales ?

[007499]

Exercice 7500 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard et de la base canonique $\mathscr{C}$, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathscr{B}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

pour obtenir une base orthonormée $\mathscr{B}'$. [007500]

6.3 242.01-02 Examen 3

Exercice 7501 Questions de cours

(a) Soit P un plan affine et (A, B, C) un repère affine. Donner la condition d'alignement de trois points en coordonnées barycentriques.

(b) Démontrer que si f est une application linéaire orthogonale d'un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$ de dimension finie, alors $Ker(f - Id_{\vec{E}})$ et $Im(f - Id_{\vec{E}})$ sont supplémentaires orthogonaux.

(c) Donner l'exemple d'une application affine qui n'est pas une isométrie.

(d) Les isométries de déterminant -1 dans un espace affine euclidien de dimension trois ont-elles toutes un point fixe ?

(e) Peut-on écrire une rotation dans le plan euclidien comme composée de cinq réflexions ?

(f) Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère le cube de sommets $A(-1,-1,-1), B(-1,-1,1), C(-1,1,1), D(-1,1,-1), E(1,-1,-1), F(1,-1,1), G(1,1,1), H(1,1,-1)$. Existe-t-il une isométrie de l'espace qui envoie A sur B et G sur F ? Si oui, la déterminer.

[007501]

Exercice 7502 Ligne de niveau d'une fonction de Leibniz

On munit le plan affine euclidien $(P, <,>)$ d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On considère les points $A(-1, 2)$ et $B(5, 4)$.

(a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massiques $A(-3)$ et $B(1)$.

(b) Calculer $-3GA^2 + GB^2$.

(c) Démontrer que pour tout point M du plan, on a

$$-3MA^2 + MB^2 = -2MG^2 - 3GA^2 + GB^2.$$

(d) Déterminer l'ensemble $\mathscr{L}$ des points M du plan tels que $-3MA^2 + MB^2 = 50$.

[007502]

Exercice 7503 Isométries et constructions

(a) On considère dans le plan euclidien orienté un point A et la rotation r de centre A d'angle $+\pi/2$. Soit M un point et $M' = r(M)$ son image par r. Soit d une droite passant par M. Décrire un point et la direction de l'image $r(d)$ de la droite d.

(b) Soit d_1 et d_2 deux droites et $B \in d_1$ et $C \in d_2$ tel que ABC soit un triangle rectangle isocèle en A (avec $mes(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = +\pi/2$). Démontrer que C appartient à l'image de la droite d_1 par r.

(c) Soit δ_1 et δ_2 deux droites non perpendiculaires et E un point du plan. Construire un triangle EFG rectangle isocèle en E et tel que $F \in \delta_1$ et $G \in \delta_2$.

[007503]

Exercice 7504 Produits de réflexions et composition

Dans le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère la translation t de vecteur $\vec{u} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et la rotation r de centre $A(-3,-1)$ et d'angle $+\pi/2$.

(a) Montrer que $t \circ r$ a un unique point fixe.

(b) Décomposer la translation t en produit $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ de réflexions par rapport à des droites d_1 et d_2 que l'on décrira.

(c) Décomposer la rotation r en produit $s_{d_4} \circ s_{d_3}$ de réflexions par rapport à des droites d_3 et d_4 que l'on décrira.

(d) Est-il possible de choisir $d_1 = d_4$ dans les questions précédentes ?

(e) Déterminer par une méthode géométrique la nature et les éléments caractéristiques de la composée $t \circ r$.

[007504]

Exercice 7505

On munit le plan affine euclidien $(P,<,>)$ d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On considère les points A de coordonnées $(-2,1)$ et B de coordonnées $(4,4)$.

(a) Déterminer les coordonnées du barycentre G des points massiques $A(2)$ et $B(1)$.

(b) Calculer $2GA^2 + GB^2$.

(c) Démontrer que pour tout point M du plan, on a

$$2MA^2 + MB^2 = 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2.$$

(d) Déterminer l'ensemble $\mathscr{L}$ des points M du plan tels que $2MA^2 + MB^2 = 42$.

Correction ▼ [007505]

Exercice 7506

(a) On identifie le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard à l'espace vectoriel $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $(z,z') = re(z\overline{z'})$ par l'application linéaire $(1,0) \mapsto 1$, $(0,1) \mapsto i$. Parmi les transformations suivantes, lesquelles sont des isométries du plan euclidien

a. $z \mapsto 3z + 4$

b. $z \mapsto 3\overline{z} + 4$

c. $z \mapsto \overline{z} + 4$

d. $z \mapsto i\overline{z} + 4$

(b) Pour chacune des isométries, dire s'il s'agit d'une translation, d'une rotation ... (sans préciser les éléments caractéristiques).

Correction ▼ [007506]

Exercice 7507

(a) Démontrer que si A, B, C sont trois points distincts d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$ la somme des angles de vecteurs
$$((\vec{AB}, \vec{AC})) + ((\vec{BC}, \vec{BA})) + ((\vec{CA}, \vec{CB}))$$
est un angle plat.

(b) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de $\mathscr{P}$ et A un point de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{C}'$ l'image par une rotation r de centre A du cercle $\mathscr{C}$. Soit B l'autre point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit D le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$. Soit $D' = r(D)$ son image par r. Montrer que D, D' et B sont alignés.

(c) Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. Montrer que M, $M' = r(M)$ et B sont alignés.

Correction ▼ [007507]

Exercice 7508

Soit $\mathbb{R}^2$ le plan affine euclidien muni du produit scalaire standard et de la base canonique.

(a) Ecrire la matrice A de la forme bilinéaire symétrique donnée en coordonnées par
$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y.$$

(b) Diagonaliser A dans une base orthonormée.

(c) Déterminer la nature de la conique d'équation
$$x^2 + 19y^2 + 24xy + 5y = 0.$$

Correction ▼ [007508]

Exercice 7509 Une symétrie

Soit E un espace affine euclidien de dimension trois et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère. Soit $A(1,2,3)$ et $B(3,2,1)$ deux points de E.

(a) Déterminer l'expression analytique dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur du segment $[AB]$.

(b) Vérifier votre résultat en déterminant l'image du point A.

[007509]

Exercice 7510 Conique

Dans l'espace affine $\mathscr{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère le cône $\mathscr{C}$ d'équation $y^2 + z^2 = 3(x-2)^2$.

(a) Déterminer un plan dont l'intersection avec le cône $\mathscr{C}$ soit un cercle.

(b) Déterminer la nature de l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan d'équation $z = 1$. On précisera (s'ils existent) le centre, les axes de symétrie et les asymptotes .

[007510]

Exercice 7511

Écrire la table de toutes les isométries d'un espace affine euclidien de dimension 3. [007511]

6.4 242.01-02 Examen 4

Exercice 7512

Soit A,B,C un repère affine d'un plan affine E.

(a) Déterminer les équations barycentriques des médianes du triangle ABC.

(b) En utilisant la question précédente, montrer que les médianes du triangle ABC sont concourantes.

Correction ▼ [007512]

Exercice 7513

Soit P un plan euclidien orienté.

(a) Donner la liste des éléments du groupe des isométries du plan qui conservent un carré.

(b) Ce groupe est-il commutatif ?

(c) Le groupe des déplacements du plan qui conservent un carré est-il commutatif ?

Correction ▼ [007513]

Exercice 7514

Construire un point A sur le cercle $\mathscr{C}$ dont le symétrique par rapport à O est sur la droite d.

Justifier votre construction.

Correction ▼ [007514]

Exercice 7515

Démontrer que si f est une application linéaire orthogonale d'un espace vectoriel euclidien $\vec{E}$ de dimension finie, alors $Ker(f-Id_{\vec{E}})$ et $Im(f-Id_{\vec{E}})$ sont supplémentaires orthogonaux. [007515]

Exercice 7516

Soient E un espace affine de dimension 3, et A,B,C,D un tétraèdre de E. Montrer que les droites joignant les milieux des cotés opposés du tétraèdre sont concourantes.

Correction ▼ [007516]

Exercice 7517

Soit $(\mathbb{R}^3_{ev}, standard)$ l'espace euclidien standard muni de la base canonique.
Déterminer une base orthonormée du sous-espace $vect(e_1, e_1+e_2+e_3)$. La compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Correction ▼ [007517]

7 Fonctions holomorphes

7.1 104.01-02 - Généralités sur les nombres complexes

On rappelle qu'un plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \rightarrow)$ s'identifie à l'ensemble des nombres complexes : le point M de coordonnées (a,b) est associé au nombre complexe $z=a+ib$. On dit alors que M est le point *d'affixe* z. On rappelle qu'un nombre complexe $z=a+ib$ a une écriture polaire $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ où r est le module $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ de z et θ un *argument de* z, c'est à dire une mesure modulo 2π de l'angle de vecteurs $(\widehat{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}})$ où M est le point d'affixe z.

Exercice 7518 Parties réelles et imaginaires

(a) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de l'inverse de z.

(b) Soit t un nombre réel et $z = a + ib$ un nombre complexe. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z-t}{z+t}$.

(c) Soit z un nombre complexe. Démontrer que z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

[007518]

Exercice 7519 Modules

(a) Soit z et w deux nombres complexes. Démontrer que

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) + |w|^2 \\ |z+w|^2 + |z-w|^2 &= 2(|z|^2 + |w|^2) \\ |z+w| &\leqslant |z| + |w| \\ ||z| - |w|| &\leqslant |z-w|. \end{aligned}$$

(b) Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes muni de la distance définie par

$$d(z,w) := |w-z|$$

est un espace métrique, c'est à dire que pour tous $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$,

i. $d(x,y) \geqslant 0$

ii. $d(x,y) = 0 \iff x = y$

iii. $d(y,x) = d(x,y)$

iv. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

[007519]

Exercice 7520 Arguments

(a) Soit θ et θ' deux nombres réels. En utilisant les formules d'addition pour le calcul de $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$, montrer que

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}.$$

(b) Soit z et z' deux nombres complexes. Déterminer $\arg(zz')$ en fonction de $\arg(z)$ et $\arg(z')$.

(c) En déduire l'écriture polaire de z^n, puis ses parties réelles et imaginaires.

(d) Déterminer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

[007520]

Exercice 7521 Racines

(a) Déterminer les racines carrées et les racines cubiques de i.

(b) Déterminer les racines cubiques de 1.

(c) Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3} + 3i$.

(d) Résoudre les équations $z^2 + 2z - 2 + 4i = 0$ et $z^6 - z^3 + 1 = 0$.

[007521]

7.2 229.01-07 Topologie

Dans l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$, si z est un nombre complexe et ε un nombre réel positif, on notera $B(z,\varepsilon)$, la boule de centre z et de rayon ε, c'est à dire

$$B(z,\varepsilon) := \{w \in \mathbb{C}, d(z,w) < \varepsilon\}.$$

Un sous-ensemble U de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est dit *ouvert* si pour tout point u de U il existe un réel strictement positif ε tel que la boule $B(u,\varepsilon)$ soit complètement incluse dans U.

Un sous-ensemble F de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est dit *fermé* si son complémentaire est ouvert.

L'intérieur $\mathring{A}$ d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est le plus grand ouvert contenu dans A, ou encore la réunion de tous les ouverts contenus dans A.

L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est le plus petit fermé contenant A, ou encore l'intersection de tous les fermés contenant A.

Le bord ∂A d'une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est $\partial A := \overline{A} - \mathring{A}$.

Une partie A de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ est dite *connexe* si elle ne peut pas s'écrire comme réunion de deux ouverts non vides disjoints.

Exercice 7522 Intérieur, adhérence

Soit A une partie de l'espace métrique $(\mathbb{C}, |\ \ |)$ et z un nombre complexe.

(a) Montrer que z appartient $\mathring{A}$ si et seulement si il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que $B(z,\varepsilon)$ soit incluse dans A.

(b) Montrer que z appartient à $\overline{A}$ si et seulement si pour tout réel $\varepsilon > 0$, la boule $B(z,\varepsilon)$ rencontre A.

[007522]

Exercice 7523 Connexité

Le but de cet exercice est de montrer qu'une partie P ouverte de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement si pour tout couple (a,b) de points de P il existe une ligne polygonale incluse dans P qui joint a et b.

(a) On suppose d'abord que pour tout couple (a,b) de points de P il existe une ligne polygonale incluse dans P qui joint a et b. Supposons que P n'est pas connexe. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints A et B, un point a de A, un point b de B tel que le segment $[ab]$ soit inclus dans P.

(b) Noter

$$\begin{array}{rcl} \alpha & := & \{t \in [0,1] \ / \ ta + (1-t)b \in A\} \\ \beta & := & \{t \in [0,1] \ / \ ta + (1-t)b \in B\} \end{array}$$

Montrer que α et β sont non vides ouverts et disjoints et utiliser la connexité de $[0,1]$ pour obtenir une contradiction.

(c) On suppose réciproquement que P est connexe et on fixe un point o de P. On considère

$$A := \{b \in P \text{ il y a une ligne polygonale incluse dans } P \text{ qui joint } o \text{ et } b.\}.$$

Montrer que A est ouvert dans P, en montrant que pour tout point b de A, il existe une boule $B(b,\varepsilon)$ incluse dans A.

(d) Avec les notations précédentes, montrer que $P - A$ est ouvert dans P, en montrant que pour tout point z de $P - A$ et toute boule $B(z,\varepsilon)$ incluse dans P, $B(z,\varepsilon)$ est incluse dans $P - A$.

(e) Conclure.

[007523]

7.3 440.00 - Pour apprendre le cours

Exercice 7524 $\mathbb{C}$-dérivabilité

(a) Écrire en termes d'ε et δ la définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité d'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ en un point a de D.

(b) Soit n un entier naturel non nul. Soit a un point de $\mathbb{C}$. Déterminer une fonction $f_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que sur $\mathbb{C}$,
$$z^n = a^n + (z-a)f_1(z).$$
En déduire que l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ est $\mathbb{C}$-dérivable en a et déterminer sa dérivée en a.

(c) Démontrer que si f et g sont deux applications d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont $\mathbb{C}$-dérivables en a, alors leur produit est $\mathbb{C}$-dérivable en a. Déterminer alors la dérivée du produit en a à l'aide des dérivées en a de f et de g.

(d) Donner un exemple d'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continue mais nulle part $\mathbb{C}$-dérivable.

[007524]

Exercice 7525 Équations de Cauchy-Riemann

(a) Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{C}$-dérivable en un point a de D. Énoncer les équation de Cauchy-Riemann.

(b) Écrire les équations de Cauchy-Riemann pour l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$.

(c) Donner l'exemple d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ différentiable en tout point et qui ne vérifie en aucun point les équations de Cauchy-Riemann.

[007525]

Exercice 7526 Holomorphie

(a) Donner l'exemple d'une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}$.

(b) Vérifier en calculant Δu, que sa partie réelle u est harmonique.

[007526]

7.4 440.00 - À l'aide des équations de Cauchy-Riemann

Exercice 7527 Un exemple

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto x^3y^2 + ix^2y^3$ et $g = f_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application réelle associée.

(a) En quels points de $\mathbb{R}^2$, g est-elle différentiable ?

(b) En quels points de $\mathbb{R}^2$, g vérifie-t-elle les équations de Cauchy-Riemann ?

(c) En quels points de $\mathbb{C}$, f est-elle $\mathbb{C}$-dérivable ?

(d) En quels points de $\mathbb{C}$, f est-elle holomorphe ?

[007527]

Exercice 7528 Exponentielle

(a) Reprendre l'exercice précédent pour la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto e^x \cos y + ie^x \sin y$.

(b) Déterminer la dérivée de cette application, là où elle est $\mathbb{C}$-dérivable.

(c) Démontrer ou réfuter : la fonction $f(z) = \exp(\bar{z})$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$.

[007528]

Exercice 7529 Logarithme

On considère $D := \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Re}(z) \neq 0.\}$ et l'application

$$\begin{array}{rccc} \ell : & D & \to & \mathbb{C} \\ & z = x+iy & \mapsto & \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan\frac{y}{x}. \end{array}$$

(a) Montrer que ℓ est $\mathbb{C}$-dérivable sur D.

(b) Déterminer sa dérivée sur D.

[007529]

Exercice 7530 En coordonnées polaires

Déterminer les équations de Cauchy Riemann en coordonnées polaires. [007530]

Exercice 7531 Exemples

Montrer qu'un polynôme $P(z,\bar{z})$ est holomorphe si et seulement aucun monôme ne contient le facteur $\bar{z}$. [007531]

Exercice 7532 Fonctions localement constantes

(a) Montrer qu'une fonction holomorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$ qui ne prend que des valeurs réelles est localement constante.

(b) Que dire d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est constante ?

(c) Que dire d'une fonction holomorphe $f = u + iv$ sur un ouvert de $\mathbb{C}$ dont la conjuguée $\overline{f} := u - iv$ est aussi holomorphe ?

(d) Montrer qu'une fonction holomorphe qui ne prend que des valeurs de module 1 est localement constante. *On pourra montrer que* $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ *puis que* $u(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x}) = \frac{\partial u}{\partial x}$.

[007532]

Exercice 7533 Fonctions harmoniques

(a) Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 + y^2$.

(b) Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 - y^2$.

(c) Montrer sans calcul que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto 2xy$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

[007533]

Exercice 7534 Fonctions holomorphes

(a) Déterminer, si possible, une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = e^{-y}\sin(x) - e^{y}\cos(x)$.

(b) Déterminer toutes les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = e^{-y}\sin(x) - e^{y}\cos(x)$.

[007534]

Exercice 7535 Polynômes harmoniques

Soit $u(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polynôme harmonique. Montrer que la fonction

$$p(z) := 2u(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}) - u(0,0)$$

est holomorphe de partie réelle u. [007535]

Exercice 7536 Laplacien

Soit une fonction holomorphe f définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que

$$\Delta(|f|^2) = 4|f'|^2 \quad ; \quad \Delta \ln(1+|f|^2) = \frac{4|f'|^2}{(1+|f'|^2)^2}$$

[007536]

7.5 440.00 - Etude d'applications holomorphes

Exercice 7537 Conservation des angles

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^2$.

(a) Montrer que f conserve les angles.

(b) Soit a un nombre réel non nul. Montrer que l'image de la droite d'équation $x = a$ est incluse dans la parabole d'équation $v^2 = 4a^2(a^2 - u)$. Représenter cette parabole pour $a = 1$ et $a = 2$.

(c) Soit b un nombre réel non nul. Déterminer une parabole contenant l'image de la droite d'équation $y = b$. Représenter cette parabole pour $b = 1$ et $b = 2$.

(d) Vérifier l'orthogonalité aux points d'intersection des quatre paraboles.

[007537]

Exercice 7538 Conservation des angles

On considère l'application $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

(a) Déterminer le lieu où f préserve les angles.

(b) Montrer que si on note $r = |z|$, $u = re(f)$ et $v = im(f)$, alors

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\frac{x}{r} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\frac{x}{r}.$$

puis

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{u^2}{\frac{x^2}{r^2}} - \frac{v^2}{\frac{y^2}{r^2}} = 1.$$

(c) Déterminer l'image par f des cercles de centre o et de rayon 1 et 2.

(d) Déterminer l'image par f des segments radiaux $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t$ et $z = \frac{1-i}{\sqrt{2}}t$, quand t varie dans $]0,1[$.

(e) Montrer que f est surjective.

(f) Montrer que l'image réciproque d'un point de $\mathbb{C} - [-1,1]$ est composée de deux points, l'un dans $\Delta^\times$ l'autre dans $\mathbb{C} - \Delta$.

(g) Montrer que f est une bijection holomorphe de $\Delta^\times$ sur $\mathbb{C} - [-1,1]$.

[007538]

7.6 440.00 - Biholomorphismes

Exercice 7539 Applications linéaires fractionnaires

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $GL(2,\mathbb{C})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$f_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(a) Vérifier que $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$.

(b) On choisit désormais la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Expliciter le biholomorphisme $h = f_C$ et son inverse h^{-1}.

(c) Montrer que

$$1 - |h(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}$$
$$Im(h^{-1}(z)) = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$$

(d) En déduire l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h.

[007539]

Exercice 7540 Biholomorphismes entre domaines

On rappelle que $\Delta := \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$, $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$ et $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = 0 \quad \text{et} \quad Re(z) \leqslant 0\}$.

(a) Montrer que l'application

$$q : \begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \longrightarrow & \mathbb{C}^- \\ z & \longmapsto & -z^2 \end{array}$$

est holomorphe et bijective.

(b) En déduire une application holomorphe et bijective de Δ sur $\mathbb{C}^-$.

[007540]

Exercice 7541 Biholomorphisme de $\mathbb{H}$

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$h_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-\frac{-d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(a) Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

(b) Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

[007541]

7.7 222.01 - Modes de convergence

Exercice 7542 Le cas très particulier des polynômes

Soit d un entier naturel. Montrer qu'une suite de polynômes $(P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ de degré au plus d converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ si et seulement si les $d+1$ suites de ses coefficients convergent, si et seulement si, il existe $d+1$ points c_i de $\mathbb{C}$ tels que les suites $(P_n(c_i))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. [007542]

Exercice 7543 Un exemple

(a) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{z+n}$ converge de façon compacte sur $\mathbb{C}-\{-1,-2,-3\cdots\}$.

(b) La convergence est-elle normale ?

[007543]

7.8 220.03-99 - Séries entières

Exercice 7544 Calcul de rayon de convergence

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum 2^{2n}z^{2n}$.

(b) Déterminer la limite de $\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}$.

[007544]

Exercice 7545 Opérations sur les rayons de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_1 et R_2.

(a) Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_n+b_n)z^n$ est supérieur à $\min(R_1,R_2)$ avec égalité si $R_2\neq R_1$.

(b) Montrer que le rayon de convergence de $\sum(a_nb_n)z^n$ est supérieur à R_1R_2.

[007545]

Exercice 7546 Estimations de reste

Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}$, et tout $z\in\Delta$,

$$\left|\exp(z)-\sum_0^N\frac{z^n}{n!}\right|\leqslant\frac{2}{(N+1)!}.$$

[007546]

Exercice 7547 Dérivation

Montrer que pour tout entier naturel k et tout $z\in\Delta$,

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}z^{n-k}.$$

[007547]

7.9 441.00 - Fonctions spéciales

Exercice 7548 trigonométrie hyperbolique

On définit $\cosh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sinh z$ comme la somme de la série $\sum \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

(a) Déterminer leur rayon de convergence.

(b) Exprimer cosh et sinh à l'aide de la fonction exponentielle.

(c) Démontrer les formules d'addition pour $\cosh(z+w)$ et $\sinh(z+w)$ pour z et w dans $\mathbb{C}$.

(d) Démontrer que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos(x+iy) &= \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y) \\ \sin(x+iy) &= \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y). \end{aligned}$$

[007548]

Exercice 7549 Exponentielle

(a) Trouver la valeur minimale de $|f(z)|$ où $f(z) = e^{z^2}$ sur le disque unité.

(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $2i\sin(z) = e^{-iz}(e^{2iz} - 1)$. En déduire les zéros de la fonction sinus sur $\mathbb{C}$ et en particulier que la fonction sinus ne s'annule que pour des valeurs réelles.

(c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes : $e^z = -5$; $\sin(z) = 2$.

[007549]

Exercice 7550 Logarithme

On considère la branche principale du logarithme, toujours notée log.

(a) Calculer $\log(i)$.

(b) Calculer i^i.

(c) Démontrer que pour tout α et β fixés dans $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}^-$,

$$(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1} \quad \text{et} \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta.$$

(d) En utilisant la détermination principale du logarithme, on définit les fonctions suivantes :

a. $z \longmapsto z^{1/2}$

b. $z \longmapsto (1-z)^{1/3}$.

Déterminer leurs domaines de définition.

[007550]

7.10 441.00 - Applications logarithmes

Exercice 7551 Une autre application logarithme ?

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}, re(z) = 0\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = x+iy & \longmapsto & \frac{1}{2}\log_{\mathbb{R}}(x^2+y^2) + i\arctan(\frac{y}{x}). \end{array}$$

(a) Montrer que L est holomorphe.

(b) L'application L coïncide-t-elle avec la branche principale log du logarithme sur $\{z \in \mathbb{C}, re(z) > 0\}$?

(c) L'application L est-elle un logarithme sur $\{z \in \mathbb{C}, re(z) < 0\}$?

[007551]

Exercice 7552 Propriétés de la branche principale du logarithme

---

(a) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$ le nombre complexe $\exp(z)$ est-il dans $\mathbb{C} - \mathbb{C}^-$?

(b) Vérifier que $\exp : B \to \mathbb{C}^-$ et $\log : \mathbb{C}^- \to B$ sont deux biholomorphismes réciproques.

(c) A-t-on pour tous $z, w \in \mathbb{C}^-$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

(d) A-t-on pour tous $z, w \in \mathbb{C}$ tels que $re(z) > 0$ et $re(w) > 0$,
$$\log(zw) = \log z + \log w?$$

[007552]

Exercice 7553 La fonction zeta de Riemann

On rappelle que pour tout entier naturel n, et tout nombre complexe z, n^z désigne $p_z(n) = \exp(z \log n)$.

(a) Déterminer le module de n^z.

(b) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^z}$ converge normalement sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}/re(z) > 1\}$.

[007553]

7.11 444.00 - Intégrales sur les chemins du plan complexe

Exercice 7554 Pour apprendre le cours

(a) Soit $I = [a, b]$ $(a < b)$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi : I \to \mathbb{C}$ une application continue. Montrer que
$$\left| \int_a^b \phi \right| \leqslant \int_a^b |\phi|.$$
On pourra considérer un nombre complexe c tel que $\left| \int_a^b \phi \right| = c \int_a^b \phi$.

(b) Vérifier que la relation définie sur les chemins paramétrés par $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ s'il existe une bijection $\alpha : J \to I$ dérivable à dérivée continue et partout strictement positive telle que $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ est une relation d'équivalence.

(c) Donner l'exemple de D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une application continue, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\gamma_1 : I \to D$ une application continue, J un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\alpha : J \to I$ une application continue bijective et $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \alpha$ tels que
$$\int_I f(\gamma_1(t))dt \neq \int_J f(\gamma_2(\tau))d\tau.$$

(d) Donner l'exemple d'une fonction $f : D \to \mathbb{C}$ holomorphe et de deux chemins Γ_1 et Γ_2 de même origine et fin, tels que
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz \neq \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

(e) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ une application continue, Γ un chemin dans D. A-t-on
$$re\left(\int_\Gamma f(z)dz \right) = \int_\Gamma re(f(z))dz?$$

[007554]

Exercice 7555 Calcul d'intégrales

On paramètre le cercle C_r de centre 0 et de rayon $r > 0$ orienté dans le sens trigonométrique du plan complexe en définissant pour $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ comme le point d'intersection de la droite d'équation $y = t(x+r)$ avec le cercle C_r différent de $-r$.

(a) Montrer que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.

(b) Vérifier que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.

(c) En déduire que

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

(d) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi.$$

[007555]

Exercice 7556 Calculs

(a) On considère le bord $\mathscr{C}$ du triangle de sommet : $z = 0$, $z = 1$, et $z = i$, orienté dans le sens direct. Calculer les intégrales $\int_{\mathscr{C}} x dz$ et $\int_{\mathscr{C}} z e^z dz$.

(b) Soit le cercle unité $\mathscr{C}$ parcouru dans le sens direct. Pour tout entier relatif n, calculer l'intégrale $\int_{\mathscr{C}} z^n dz$. Expliquer le cas particulier où $n = -1$.

(c) Montrer $\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \leqslant \frac{\pi}{3}$, lorsque $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

(d) Montrer $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z} dz\right| \leqslant \pi e$, lorsque $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

[007556]

Exercice 7557 Intégrale elliptique

Soient deux réels strictement positifs a et b, on pose $\gamma = a\cos(t) + ib\sin(t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$. Calculer l'intégrale $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et en déduire : $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}$. [007557]

Exercice 7558 Existence de primitive

Soit $D := \mathbb{C} - [0,1]$ et $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z(z-1)}$.

(a) D est-il un ouvert étoilé ?

(b) La fonction $F : z \mapsto \log(1 - \frac{1}{z})$ est-elle bien définie et continue sur D ?

(c) Montrer que pour tout chemin orienté Γ de D, $\int_\Gamma f(\zeta)d\zeta = 0$.

[007558]

7.12 444.00 - Théorie de Cauchy

Exercice 7559 Lemme de Goursat

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit T un triangle (plein) inclus dans le domaine D. On notera p son périmètre. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\int_{\partial T} f(z)dz = 0.$$

(a) En considérant les quatre triangles obtenus en traçant les segments entre deux milieux de côtés de T, montrer que pour l'un de ces triangles noté T_1,

$$|\int_{\partial T} f(z)dz| \leqslant 4|\int_{\partial T_1} f(z)dz|.$$

(b) En itérant cette construction, montrer que pour tout n, il existe un triangle $T_n \subset T_{n-1}$ de périmètre $\frac{p}{2^n}$ tel que

$$|\int_{\partial T} f(z)dz| \leqslant 4^n|\int_{\partial T_1} f(z)dz|.$$

(c) Montrer que l'intersection des T_n est un point c de D.

(d) Montrer qu'un existe une fonction continue h sur D nulle en c telle que pour tout $z \in D$,

$$f(z) = f(c) + (z-c)f'(c) + (z-c)h(z).$$

(e) Calculer $\int_{\partial T_n} f(c)dz$ et $\int_{\partial T_n} (z-c)f'(c)dz$.

(f) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour $n \geqslant N$,

$$|\int_{\partial T_n} (z-c)h(z)dz| \leqslant (\frac{p}{2^n})^2\varepsilon.$$

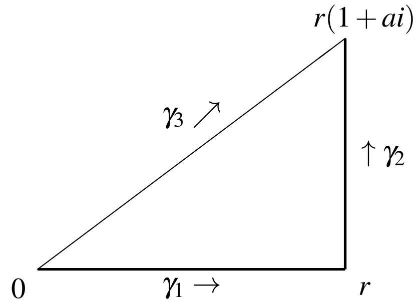
(g) Conclure.

(h) Montrer en choisissant un découpage de T avec un petit triangle autour de a que si $f : D \to \mathbb{C}$ est une application continue et holomorphe sur $D - \{a\}$, alors pour tout triangle de sommet a dans D, $\int_{\partial T} f(z)dz = 0$.

[007559]

Exercice 7560 Calcul d'intégrales par chemin fermé

Soit a un nombre réel tel que $|a| \leqslant 1$. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{-z^2}$ et pour tout réel strictement positif r, les chemins suivants dans le plan complexe



(a) Calculer $\int_{\gamma_1} f(z)dz$.

(b) Montrer que $|\int_{\gamma_2} f(z)dz| \leqslant \frac{1}{r}$.

(c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+ai)^2t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{1+ia}.$$

(d) En déduire les valeurs des intégrales $\int_0^{+\infty}\cos(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty}\sin(t^2)dt$.

[007560]

Exercice 7561 Calcul d'intégrales par la formule intégrale de Cauchy

Calculer

$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z-3)^2}dz\ ,\ \int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)}dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Delta_2} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}dz.$$

[007561]

Exercice 7562 Calcul d'intégrales et théorème de Liouville

(a) Soit $r>0$ et D un voisinage ouvert de $\overline{\Delta_r}$. Soit $f : D \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit a et b deux points distincts dans Δ_r. Calculer

$$\int_{\partial\Delta_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)} d\zeta.$$

(b) En déduire le théorème de Liouville : Toute fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$ est constante.

[007562]

Exercice 7563

(a) Déterminer toutes les fonctions holomorphes définies sur le plan complexe tout entier vérifiant : $|f(z)| \geqslant 1$.

(b) On considère une fonction f holomorphe dans le disque unité, vérifiant $|f(z)| \leqslant 1$, que peut on dire de $|f^{'}(0)|$?

(c) Soit n_0 un nombre entier naturel et f une fonction holomorphe définie sur le plan complexe tout entier vérifiant $|f(z)| \leqslant |z|^{n_0}$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus n_0.

(d) Soient Ω un ouvert connexe et D une droite, f une fonction continue sur Ω, holomorphe sur la restriction $\Omega - \{D\}$. Montrer que f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω tout entier.

[007563]

7.13 220.06 - Développement en séries entières

Exercice 7564 Calculs

Développer si possible en séries entières au voisinage de 0 les applications

(a) $f(z) = \sin(z)^2$.

(b) $g(z) = \cos(z^2 - 1)$.

(c) $h(z) = \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}$.

[007564]

Exercice 7565 Intégrale

Soit a et b deux nombres complexes tels que $|a| < 1 < |b|$ et m,n deux entiers naturels. Déterminer la valeur de

$$\int_{\partial\Delta} \frac{d\xi}{(\xi-a)^m(\xi-b)^n}.$$

[007565]

Exercice 7566 Equation différentielle

Déterminer toutes les applications holomorphes f sur $\mathbb{C}$ telles que $f'' + f = 0$. [007566]

Exercice 7567 Prolongement

Soit c un point de $\mathbb{C}^-$.

(a) Déterminer un développement en séries entières $\sum_n a_n(z-c)^n$ centré en c de la branche principale du logarithme log.

(b) Déterminer le rayon de convergence du développement précédent.

(c) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-c)^n$ coïncide-t-elle avec log sur l'intersection de $\mathbb{C}^-$ et de son disque de convergence.

[007567]

Exercice 7568 Nombres de Bernouilli

On définit les nombres de Bernouilli comme les nombres complexes B_n tels que sur le domaine de convergence

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}z^n.$$

(a) Montrer que le rayon de convergence de la série précédente est 2π.

(b) A partir de la relation $\frac{z}{e^z-1}\frac{e^z-1}{z}=1$ déterminer une relation de récurrence entre les B_n.

(c) Exprimer $\frac{e^z-1}{z}$ en fonction de $\frac{\sinh(z/2)}{\cosh(z/2)}$ et en déduire que pour n impair plus grand que 3, $B_n=0$.

(d) Calculer $B_0,B_1\cdots B_8$.

(e) Montrer que tous les B_n sont rationnels.

(f) La suite des B_n est-elle bornée ?

[007568]

7.14 440.00 - Concept d'holomorphie

Exercice 7569 Polynômes

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f:D\to\mathbb{C}$ une application holomorphe. Montrer qu'il y a équivalence entre

(a) f est polynomiale.

(b) Il existe $c\in D$ tel que en dehors d'un nombre fini de $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(c)=0$.

[007569]

Exercice 7570 Propriétés

Pour chacune des propriétés suivantes, donner un exemple d'application holomorphe au voisinage de 0 qui la satisfait, ou bien démontrer qu'il n'existe pas de telles applications.

(a) Pour presque tout $n\in\mathbb{N}$, $f(\frac{1}{n})=(-1)^n\frac{1}{n}$.

(b) Pour presque tout $n\in\mathbb{N}$,$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n^2-1}$.

(c) Pour presque tout $k\in\mathbb{N}$,$|f^{(k)}(0)|\geqslant(n!)^2$.

(d) Pour presque tout $n\in\mathbb{N}$,$|f(\frac{1}{n})|\leqslant e^{-n}$ et f est non nulle.

[007570]

Exercice 7571 Prolongement

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ $a\in D$ et $f:D-\{a\}\to\mathbb{C}$ holomorphe. On suppose que f' admet un prolongement holomorphe à D. Est-ce aussi le cas pour f ? [007571]

Exercice 7572 Contraintes

(a) Soit une fonction holomorphe f entière définie sur le plan complexe tout entier, on suppose que $Re(f)\leqslant 0$. Montrer que f est une fonction constante. On pourrait considérer la fonction $e^{f(z)}$.

(b) Soit une fonction holomorphe f au voisinage de 0. Montrer que si $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{2n}\right)$ pour tout n assez grand alors f est une constante.

(c) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f=u+iv:D\to\mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que sur D, $v=u^2$. Montrer que f est une fonction constante.

(d) Soit une fonction entière f telle que $|f|$ tend vers l'infini si $|z|$ tend vers l'infini. Montrer que :

   i. f n'admet qu'un nombre fini de zéros.

   ii. f est un polynôme.

(e) Soit une fonction entière f non constante, montrer que l'image du plan complexe par f est dense dans $\mathbb{C}$.

(f) Soit une fonction f holomorphe sur le plan complexe en entier, vérifiant $f(x+1) = f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction périodique de période 1.

[007572]

7.15 443.00 - Singularités isolées

On notera $\mathbb{H}$ le demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$. Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, on notera $P(f)$ le lieu de ses pôles.

Exercice 7573 Exemples de singularités isolées

Décrire le type singularité (apparente, pôle ou essentielle) des applications suivantes

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)^2} \quad , \quad g(z) = \frac{z}{e^z - 1} \qquad \text{et} \qquad h(z) = e^{1/z}.$$

[007573]

Exercice 7574 Théorème d'identité

Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, on notera $P(f)$ le lieu de ses pôles.

(a) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux applications méromorphes sur D. Montrer qu'on a équivalence entre

   i. $f = g$

   ii. $\{z \in D - P(f) - P(g), f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans D.

(b) Peut-on construire une application méromorphe sur $\mathbb{C}^\star$ non nulle mais nulle en tous les réels de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}$?

[007574]

Exercice 7575 Fonctions rationnelles

Si f est une fonction méromorphe sur un ouvert D de $\mathbb{C}$, on notera $P(f)$ le lieu de ses pôles. Soit f une application méromorphe sur $\mathbb{C}$ et n un entier naturel et r un nombre réel strictement positif tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} - P(f) - \Delta_r, |f(z)| \leqslant |z|^n.$$

Montrer que f est une application rationnelle. [007575]

7.16 446.00 - Série de Laurent

Exercice 7576 Série de Laurent

Calculer la série de Laurent de $1/(z^2 + z^3)$ au voisinage de l'origine. [007576]

7.17 444.00 - Résidus

Exercice 7577 Propriété

Soient deux fonctions g et h holomorphes sur un ouvert connexe du plan complexe, a un pôle de g/h tel que $h(a) = 0$ et $h'(a)$ soit non nul. Montrer que :

$$Res(a, \frac{g}{h}) = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

[007577]

Exercice 7578 Calculs de résidus

(a) L'application $\cot(\pi z) := \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ est-elle méromorphe ? Si oui, déterminer ses résidus.

(b) Calculer les résidus en tous les pôles de

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \quad \text{et} \quad g(z) = \frac{z^2+z+5}{z(z^2+1)^2}.$$

[007578]

Exercice 7579 Calcul d'intégrales

(a) Montrer que

$$\int_{\partial\Delta_2} \frac{dz}{\sin^2 z \cos z} = 0.$$

(b) Calculer les intégrales suivantes, où les chemins fermés simples γ sont parcourues dans le sens direct.

i. $\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2)} dz$ où $\gamma = \partial\Delta_{1/2}(2)$ est le cercle centré en 2 de rayon 1/2 ;

ii. $\int_\gamma \frac{\exp(z)}{z^2(z-9)^2} dz$ où $\gamma = \partial\Delta$ est le cercle centré en l'origine de rayon 1.

[007579]

Exercice 7580 Somme de résidus

Soit $f(z)$ une fonction rationnelle, quotient d'un polynôme $P(z)$ par un polynôme $Q(z)$. On suppose que $\deg P + 2 < \deg Q$. Montrer que

$$\sum_{c\in\mathbb{C}} Res_c(f) = 0.$$

[007580]

7.18 444.00 - Calculs à l'aide du théorème des résidus

Exercice 7581 Calcul d'intégrales trigonométriques

(a) Soit a un nombre complexe de module différent de 1. Montrer que

$$i\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta + a^2} = \int_{\partial\Delta} \frac{dz}{(z-a)(1-az)}.$$

(b) Déterminer les résidus des pôles de $\frac{1}{(z-a)(1-az)}$ contenus dans le disque unité ouvert.

(c) En déduire la valeur de $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$.

[007581]

Exercice 7582 Calcul d'intégrales rationnelles

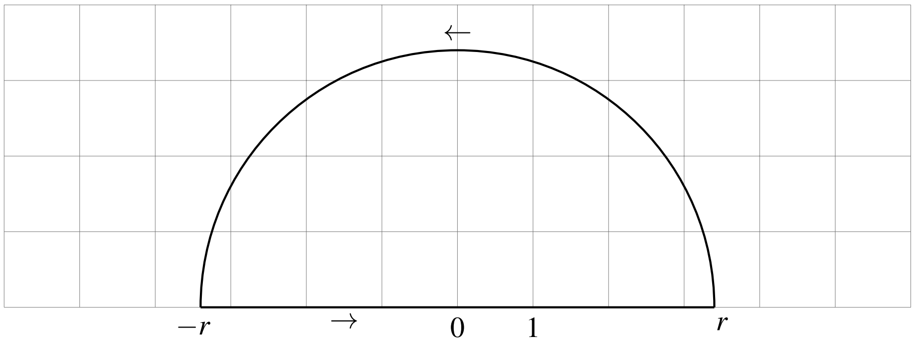
On considère la fonction méromorphe $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ sur $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $zf(z)$ a une limite quand $|z|$ tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ converge.

(c) Déterminer les pôles de f contenus dans le demi-plan $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ et leurs résidus.

(d) En intégrant sur le chemin Γ défini par



montrer que

$$\int_{-r}^{r} f(x)dx + \int_{\partial(\Delta_r \cap \mathbb{H})} f(z)dz = 2i\pi \sum_{c\in\mathbb{H}} Res_c(f).$$

(e) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

[007582]

7.19 444.00 - Nombre de zéros

Exercice 7583 Contraintes

(a) Montrer que le polynôme $f(z) = 3+7z+2z^4$ a, comme le polynôme $3+7z$, exactement un zéro dans Δ.

(b) Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ dans Δ.

(c) Déterminer le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de $z^5 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{4} + \frac{1}{3}$ dans $\Delta_{\frac{1}{2}}$.

(d) Déterminer le nombre de zéros du polynôme $z^4 - 5z - 1$ dans la couronne $1 < |z| < 2$.

[007583]

---

8 446.00 - Fonctions holomorphes (Examens)

On rappelle que

- $\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ est le disque unité ouvert; son bord orienté dans le sens trigonométrique est $\partial\Delta := \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$,
- pour tout $a \in \mathbb{C}$ et $r \in]0, +\infty[$, $\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C}, |z-a| < r\}$ est le disque ouvert de centre a et de rayon r. Si le centre est 0, on l'omettra dans la notation $\Delta_r := \Delta_r(0)$.

- et $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}, Im(z) > 0\}$ est le demi-plan de Poincaré.

Exercice 7584 Questions de cours

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

(b) Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$. Montrer que la série $\sum a_n z^n$ diverge sur $\mathbb{C} - \Delta_R(0)$.

[007584]

Exercice 7585 Une équation

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 + 2z^3 - 3 = 0$. [007585]

Exercice 7586 Applications holomorphes

Déterminer toutes les applications holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est $u(x,y) = x^2 - y^2 + 3x^2y - y^3$. [007586]

Exercice 7587 Biholomorphismes

Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}/Im(z) > 0\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{R})$ (i.e. à coefficients réels et de déterminant 1.) Soit l'application linéaire fractionnaire $f_A : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que f_A est définie sur $\mathbb{H}$ et réalise un biholomorphisme de $\mathbb{H}$ dans lui-même. [007587]

Exercice 7588 Séries entières

(a) Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R,R[, f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_R(0), f(z) = g(z)$.

[007588]

Exercice 7589 Questions de cours

(a) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.

(b) Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.

(c) Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui n'admet pas de primitive. Sinon, appliquer un théorème pour montrer que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ admet une primitive.

[007589]

Exercice 7590 Une équation

On fixe la branche principale du logarithme. Résoudre dans $\mathbb{C}^-$, l'équation $z^i = -1$. [007590]

Exercice 7591 Applications holomorphes

Développer $z \mapsto \frac{z^2+z-1}{z+1}$ en éléments simples et calculer $\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2+z-1}{z+1} dz$. [007591]

Exercice 7592 Questions de cours

(a) L'application $\mathbb{C} - \{3\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{3\}$? Justifier.

(b) Donner l'exemple d'un ouvert non étoilé de $\mathbb{C}$. Justifier que l'exemple proposé n'est pas étoilé.

[007592]

Exercice 7593 Calcul d'intégrales

Calculer
$$\int_{\partial\Delta_1} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2}dz\,,\ \int_{\partial\Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2}dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+1)^2(z+2)^2}dz.$$

[007593]

Exercice 7594 Singularités

(a) Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$. Quelle est la nature de la singularité isolée 0 ? (apparente, polaire ou essentielle) Justifier.

(b) Donner l'exemple d'une application holomorphe avec une singularité essentielle. Justifier.

[007594]

Exercice 7595 Applications holomorphes

(a) Rappeler la définition de l'indice $Ind_\Gamma(a)$ d'un point a de $\mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé compact orienté Γ de $\mathbb{C}$.

(b) On suppose que Γ est paramétré sous la forme $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ où r et θ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux sur $[0,1]$, r à valeurs strictement positives et $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1)$ mod 2π montrer que
$$Ind_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \theta'(t)dt$$
et correspond donc au nombre de tours, comptés positivement dans le sens direct, que fait Γ autour de a.

[007595]

Exercice 7596 Questions de cours

(a) Démontrer que la partie imaginaire d'une fonction holomorphe est harmonique.

(b) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\Delta_\varepsilon - \{0\}$.

(c) Soient Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω. L'intégrale de f le long de tout chemin fermé contenu dans Ω est-elle nulle ?

[007596]

Exercice 7597 Deux équations

(a) Trouver toutes les solutions complexes de l'équation $\cosh(z) = 4i$.

(b) Trouver toutes les solutions complexes de l'équation $z^i = -1$.

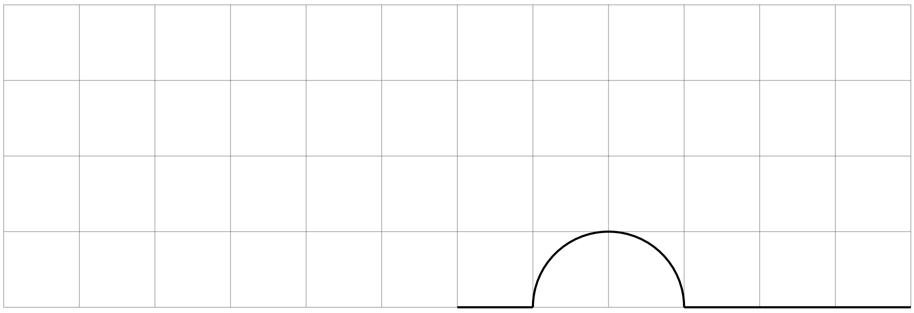
Correction ▼ [007597]

Exercice 7598 Logarithmes

(a) Peut on définir une détermination de la fonction logarithme sur $\mathbb{C}\backslash\{\, x \in \mathbb{R} \,/\, x \geqslant 0 \,\}$? Dans le cas affirmatif, donner une définition de cette détermination.

(b) Même question sur le plan complexe privé de l'ensemble

$$L = [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \;/\; |\, z-2\,| = 1 \textit{ et } Im(z) \geqslant 0\,\} \cup [\,3,\infty\,[.$$



Correction ▼ [007598]

Exercice 7599 Intégrales

(a) Paramétrer le cercle unité parcouru dans le sens trigonométrique.

(b) Calculer à l'aide du paramétrage précédent $\int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz$.

(c) La fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C}^{\times}$? Si oui, l'expliciter.

Correction ▼ [007599]

Exercice 7600 Intégrales

(a) Enoncer la formule de Cauchy pour les disques, en précisant les hypothèses.

(b) Calculer $I_1 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z} dz$.

(c) Calculer $I_2 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^2} dz$.

(d) Calculer $I_3 := \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^3} dz$.

(e) Parmi les applications $\sin(z)$, $\frac{\sin(z)}{z}$, $\frac{\sin(z)}{z^2}$ et $\frac{\sin(z)}{z^3}$ sur $\mathbb{C}^{\times}$, lesquelles ont une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^{\times}$?

Correction ▼ [007600]

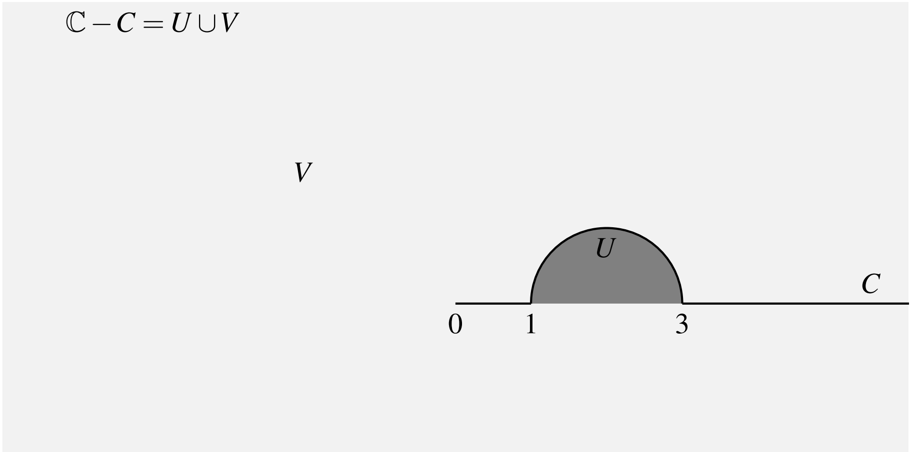
Exercice 7601 Logarithmes

(a) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.

(b) Peut on définir un logarithme sur $\mathbb{C} - C$ le plan complexe privé de l'ensemble

$$C := [\,0,1\,] \cup \{\, z \in \mathbb{C} \;/\; |\, z-2\,| = 1 \;\mathbb{H}oxet\; Im(z) \geqslant 0\,\} \cup [\,3,\infty\,[?$$

On appelle $U := \{z \in \mathbb{C}, |\, z-2\,| < 1, Im(z) \geqslant 0\}$ la partie grisée, et $V := \{z \in \mathbb{C}, z \notin C, z \notin U\}$ le reste de $\mathbb{C} - C$.



On précisera sur U et sur V l'argument choisi dans la définition du logarithme.

Correction ▼ [007601]

Exercice 7602 Application entière dans $\mathbb{H}$

(a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante. Montrer que l'image du plan complexe par f rencontre tous les disques ouverts non vides $\Delta_r(a)$ de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.

(c) On considère
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-i\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array}.$$
Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} - \{-i\}, \quad 1 - |h(z)|^2 = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}$.

(d) En déduire que l'image du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ par h est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

(e) En déduire par une nouvelle démonstration que toute application holomorphe de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{H}$ est constante.

Correction ▼ [007602]

Exercice 7603 Primitive et résidus

(a) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$, c un point de D et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Rappeler la définition du résidu de f en c.

(b) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que f admet une primitive sur $D - \{c\}$. Que peut-on dire du résidu de f en c ?

(c) Soit c un point de Δ et $f : \Delta - \{c\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un pôle d'ordre 3 en c. Sous quelle condition f admet-elle une primitive sur $\Delta - \{c\}$?

Correction ▼ [007603]

Exercice 7604 Résidus et représentation

(a) Énoncer le théorème des résidus.

(b) À l'aide du théorème des résidus, retrouver la formule de représentation de Cauchy pour les disques : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,
$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$

(c) Montrer plus généralement : Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall b \in \Delta_r(a), \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{(z-b)^{k+1}} = \frac{f^{(k)}(b)}{k!}.$$

Correction ▼ [007604]

Exercice 7605 Racine de polynômes

(a) Énoncer le théorème de Rouché.

(b) Montrer que les zéros du polynôme $p(z) = z^4 - 7z - 1$ sont tous inclus dans le disque $\Delta_2(0)$ centré en l'origine de rayon 2. On vérifiera soigneusement toutes les hypothèses du théorème utilisé.

Correction ▼ [007605]

Exercice 7606 Questions de cours

(a) Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ indéfiniment dérivable au sens réel, mais non holomorphe. On justifiera ces deux propriétés.

(b) L'application $\mathbb{C} - \{3\} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{3\}$? Justifier.

(c) Donner l'exemple d'un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. On précisera le point par rapport auquel l'ouvert est étoilé.

(d) Donner l'exemple d'un ouvert non étoilé de $\mathbb{C}$. On justifiera que l'exemple proposé n'est pas étoilé.

Correction ▼ [007606]

Exercice 7607 Calcul d'intégrales

On paramètre le cercle C_r privé du point $-r$ de centre 0 et de rayon $r > 0$ orienté dans le sens trigonométrique du plan complexe en définissant pour $t \in \mathbb{R}$, $\xi(t)$ comme le point d'intersection de la droite d'équation $y = t(x+r)$ avec le cercle C_r différent de $-r$.

(a) Montrer que $\xi(t) = r\frac{1+it}{1-it}$.

(b) Vérifier que ξ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\frac{\xi'(t)}{\xi(t)}$.

(c) En déduire que

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$$

(d) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

Correction ▼ [007607]

Exercice 7608 Biholomorphisme de $\mathbb{H}$

On rappelle qu'à toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2,\mathbb{R})$, on associe l'application linéaire fractionnaire

$$h_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C} - \{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(a) Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

(b) Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tel que $h_A(i) = z$.

Correction ▼ [007608]

Exercice 7609 Représentation

(a) Énoncer la formule de représentation de Cauchy pour les disques.

(b) À l'aide de la formule de représentation de Cauchy, montrer que si une fonction holomorphe sur Δ ne prend que des valeurs réelles sur le cercle $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$, alors f prend une valeur réelle en 0.

(c) À l'aide du théorème de représentation de Cauchy et sans le théorème des zéros isolés, montrer que si une fonction holomorphe sur Δ est constante sur le cercle $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$, alors f est constante sur $\overline{\Delta_{\frac{1}{2}}}$.

Correction ▼ [007609]

Exercice 7610 Croissance à l'infini

On rappelle la formule de Gutzmer : soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R. Alors, pour tout $r<R$,

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(a) Démontrer à l'aide de la formule de Gutzmer que toute application holomorphe $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ bornée est constante..

(b) Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ application holomorphe. On suppose que

$$\forall r\in]0,+\infty[, M(r) := \sup_{|z|<r} |f(z)| \leqslant r.$$

Montrer que f est une application affine.

Correction ▼ [007610]

Exercice 7611 Séries entières

(a) Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R>0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x\in]-R,R[, f(x)=g(x)$. Montrer que pour tout $z\in\Delta_r, f(z)=g(z)$.

(c) En déduire que pour tout $a\in\mathbb{R}$, et pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\sin(a+z)=\sin(a)\cos(z)+\cos(a)\sin(z)$.

Correction ▼ [007611]

Exercice 7612 Équations

(a) Soit $c\in\mathbb{C}$. Montrer que si $z\in\mathbb{C}$, alors $\sin z=c \iff (e^{iz})^2-2ice^{iz}-1=0$.

(b) Soit $c\in[-1,1]$. Montrer que toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de $\sin z=c$ sont réelles.

(c) Soit a et b deux nombres complexes. Calculer $e^{i(a+b)}$ et $e^{-i(a+b)}$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.

(d) Soit a et b deux nombres complexes. Démontrer la formule pour $\sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.

(e) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $\cos z+\sin z=2$.

Correction ▼ [007612]

Exercice 7613 Biholomorphisme de $\mathbb{H}$

On rappelle qu'à toute matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *de* $SL(2,\mathbb{R})$*, on associe l'application linéaire fractionnaire*

$$h_A: \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-\{-\frac{d}{c}\} & \longrightarrow & \mathbb{C}-\{\frac{a}{c}\} \\ z & \longmapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

(a) Montrer que h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

(b) Montrer que pour tout élément z de $\mathbb{H}$, il existe $A \in SL(2,\mathbb{R})$ tel que $h_A(i)=z$.

Correction ▼ [007613]

Exercice 7614 Logarithmes

(a) Déterminer et représenter l'ensemble $D := \{z \in \mathbb{C}, z^3 \in \mathbb{C}^-\}$.

(b) Soit $f : D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \log(z^3)$. En quels points de $\mathbb{C}-D$ peut-on prolonger f par continuité ?

(c) Comparer les fonctions f et $3\log$ sur l'intersection $D \cap \mathbb{C}^-$ de leur domaine de définition.

Correction ▼ [007614]

Exercice 7615 À partir des définitions

(a) Rappeler la définition de l'holomorphie d'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en un point a de $\mathbb{C}$.

(b) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Déterminer si l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ ou pas. Si oui, déterminer sa $\mathbb{C}$-dérivée en fonction de celle de f.

[007615]

Exercice 7616 Séries entières

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

(b) Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum (1+\frac{1}{n+1}) a_n z^n$.

[007616]

Exercice 7617 Applications holomorphes

On rappelle les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires (r,θ) pour une fonction $f = u+iv$ d'un ouvert D de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(a) L'application $u : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \log_{\mathbb{R}}(x^2+y^2)$ est-elle harmonique sur son domaine de définition ?

(b) En utilisant les équations de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires, déterminer s'il existe ou pas une fonction holomorphe f sur $\mathbb{C}-\{0\}$ dont la partie réelle est u.

[007617]

Exercice 7618 Biholomorphismes

Soit a un nombre complexe de module strictement inférieur à 1. Montrer que l'application $f_a: \quad z \longmapsto \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ réalise un biholomorphisme du disque Δ sur lui-même. [007618]

Exercice 7619 Séries entières

(a) Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ une série entière convergente (avec un rayon de convergence strictement positif). Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n!} z^n$.

(b) Soit deux séries entières centrées en 0 de rayon de convergence $R > 0$ et de somme respective f et g. On suppose que pour tout $x \in]-R,R[, f(x) = g(x)$. Montrer que pour tout $z \in \Delta_R(0), f(z) = g(z)$.

[007619]

Exercice 7620 Questions de cours

(a) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.

(b) Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.

(c) Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ qui n'admet pas de primitive. Sinon, appliquer un théorème pour montrer que toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ admet une primitive.

[007620]

Exercice 7621 Une équation

On fixe la branche principale du logarithme. Résoudre dans $\mathbb{C}^-$, l'équation $z^i = -1$. [007621]

Exercice 7622 Applications holomorphes

Développer $z \mapsto \frac{z^2+z-1}{z+1}$ en éléments simples et calculer $\int_{\partial\Delta_2(0)} \frac{z^2+z-1}{z+1} dz$. [007622]

Exercice 7623 Questions de cours

(a) L'application $\mathbb{C} - \{3\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-3}$ admet-elle une primitive sur $\mathbb{C} - \{3\}$? Justifier.

(b) Donner l'exemple d'un ouvert non étoilé de $\mathbb{C}$. Justifier que l'exemple proposé n'est pas étoilé.

[007623]

Exercice 7624 Calcul d'intégrales

Calculer

$$\int_{\partial\Delta_1} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz\,, \int_{\partial\Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+2)^2} dz \quad \text{et} \quad \int_{\partial\Delta_3} \frac{\sin(z)}{(z+1)^2(z+2)^2} dz.$$

[007624]

Exercice 7625 Singularités

(a) Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. On suppose que $\lim_{z\to 0} |f(z)| = +\infty$. Quelle est la nature de la singularité isolée 0 ? (apparente, polaire ou essentielle) Justifier.

(b) Donner l'exemple d'une application holomorphe avec une singularité essentielle. Justifier.

[007625]

Exercice 7626 Applications holomorphes

(a) Rappeler la définition de l'indice $Ind_\Gamma(a)$ d'un point a de $\mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé compact orienté Γ de $\mathbb{C}$.

(b) On suppose que Γ est paramétré sous la forme $\gamma(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$ où r et θ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ par morceaux sur $[0,1]$, r à valeurs strictement positives et $r(0) = r(1)$, $\theta(0) \equiv \theta(1)$ mod 2π montrer que
$$Ind_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \theta'(t)dt$$
et correspond donc au nombre de tours, comptés positivement dans le sens direct, que fait Γ autour de a.

[007626]

Exercice 7627 Questions de cours

(a) Rappeler la définition de la branche principale du logarithme.

(b) Rappeler la définition d'une primitive d'une fonction continue f sur $\mathbb{C}$.

(c) Donner si possible l'exemple d'une fonction continue non holomorphe f sur $\mathbb{C}$ qui admet une primitive.

(d) Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de Δ dans $\mathbb{C}$. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

(e) Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{C}$ dans Δ. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

(f) Donner si possible l'exemple d'une fonction holomorphe non constante de $\mathbb{H}$ dans Δ. Dans le cas contraire, démontrer la non-existence.

Correction ▼ [007627]

Exercice 7628 Calcul d'intégrales

Calculer
$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}dz.$$

Correction ▼ [007628]

Exercice 7629 Applications entières

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe non constante.

(a) Montrer que le point 0 est dans l'adhérence de l'image de f.

(b) Déterminer l'adhérence de l'image de f.

Correction ▼ [007629]

Exercice 7630 Singularités

Soit $D = \mathbb{C}^\star$ et $f : D \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) - \frac{1}{z}$.

(a) Déterminer la nature de la singularité de f en 0 (apparente, polaire ou essentielle)

(b) L'application admet-elle une primitive sur D ?

(c) Calculer $\int_{\partial\Delta} \exp(\frac{1}{z})dz$.

Correction ▼ [007630]

Exercice 7631 Applications sur le disque

Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité Δ. Le but de l'exercice est de montrer que $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1.

(a) Vérifier l'énoncé pour l'application $\Delta \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{z^6-1}$.

(b) Supposons d'abord que f n'a pas de zéro dans Δ. Soit r_n une suite de réels de $[0,1[$, tels que pour tout entier naturel non nul n et tout z de Δ de module supérieur à r_n, $f(z)$ est de module supérieur à n. Montrer alors que pour tout n, $|f(0)| \geqslant n$ et conclure.

(c) Dans le cas général, supposons que $|f(z)|$ tende vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1. Montrer qu'on peut écrire f comme produit sur Δ d'un polynôme et d'une application holomorphe g qui n'a pas de zéro dans Δ. Conclure.

Correction ▼ [007631]

Exercice 7632 Questions de cours

(a) Calculer les intégrales $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z}$ et $\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z-2}$ à l'aide d'un paramétrage et d'un développement en séries entières, sans utiliser les théorèmes généraux.

(b) Énoncer le lemme de Goursat.

(c) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Donner la définition d'un logarithme de f.

(d) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe qui admet un logarithme g sur D. Donner l'exemple d'un autre logarithme de f. Montrer que f n'a pas de zéro dans D et calculer la dérivée complexe de g.

(e) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de D. Soit $f : D - \{a\} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Définir le résidu de f en a.

(f) Définir l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé orienté dans $\mathbb{C}$.

[007632]

Exercice 7633 Applications entières

Existe-t-il une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe non constante et bi-périodique de périodes 1 et i i.e.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z+1) = f(z+i) = f(z).$$

Si oui, donner un exemple. Si non, démontrer la non-existence d'une telle application.

Correction ▼ [007633]

Exercice 7634 Applications proportionnelles

Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ contenant le disque unité fermé. Soient f et g deux applications holomorphes sur D telles que pour tout $z \in \partial\Delta$, $|f(z)| = |g(z)|$.

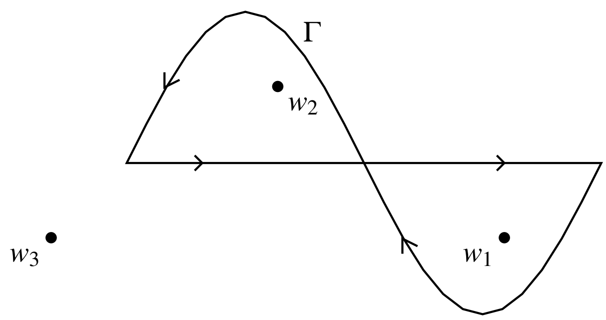
(a) On suppose que f et g n'ont pas de zéro dans D. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f = \lambda g$ sur D.

(b) La conclusion est-elle encore vraie si on ne suppose plus que f et g n'ont pas de zéro dans D ?

Correction ▼ [007634]

Exercice 7635 Singularités

On considère le contour Γ et les points w_1, w_2, w_3 comme sur la figure ci-dessous



Exprimer la valeur des intégrales suivantes à l'aide des nombres complexes w_1, w_2, w_3 :

(a) $A = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$.

(b) $B = \int_\Gamma \sin(z)dz$.

(c) $C = \int_\Gamma \frac{\sin(z)}{(z-w_1)^2}dz$.

Correction ▼ [007635]

Exercice 7636 Localisations de racines

On considère le polynôme $P(z) = z^4 + 6z + 3$.

(a) Démontrer que P a ses quatre racines dans le disque Δ_2.

(b) Démontrer que P n'admet qu'une racine dans Δ.

(c) Démontrer que P n'admet pas de racine dans $\Delta_{\frac{1}{3}}$.

(d) Soit a la racine de P dans le disque Δ. Démontrer que

$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3} z dz.$$

Correction ▼ [007636]

Exercice 7637 Questions de cours

(a) Une application holomorphe sur $\mathbb{C}$ de dérivée partout non nulle est-elle nécessairement injective ?

(b) Rappeler la définition de la branche (ou détermination) principale du logarithme.

(c) Ayant fixé la détermination principale $\mathbb{H}oxLogz$ du logarithme, définir les fonctions puissances $z \mapsto z^\alpha$ pour tout nombre complexe α en précisant leur domaine de définition.

(d) Montrer à l'aide d'un théorème du cours qu'une application holomorphe sur un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs sont de module 1 est constante.

(e) Définir une singularité essentielle pour une application holomorphe définie sur un ouvert de $\mathbb{C}$.

(f) Donner un exemple d'automorphisme du demi-plan de Poincaré qui n'est pas une translation.

[007637]

Exercice 7638 Logarithme

Soit $\mathbb{H}oxLogz$ la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C}^-$.

(a) On considère $z = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; les nombres complexes $\mathbb{H}oxLog(z^2)$ et $2\mathbb{H}oxLogz$ sont-ils égaux ?

(b) On considère $z = e^{\frac{3i\pi}{4}}$; les nombres complexes z^{2i}, $(z^2)^i$ et $(z^i)^2$ sont-ils égaux ?

[007638]

Exercice 7639 Laplacien

On rappelle que le Laplacien $\Delta\varphi$ d'une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ est la fonction sur U donnée par $\Delta\varphi(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(x,y)$.

(a) Soit D un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Exprimer $\Delta|f|^2$ à l'aide de f'.

(b) Soit D un ouvert connexe et $(f_i : D \to \mathbb{C})_{i=1}^N$ une famille finie d'applications holomorphes. On suppose que

$$\forall z \in D, \quad \sum_{i=1}^N |f_i(z)|^2 = 1.$$

Montrer que toutes les f_i sont constantes sur D.

Correction ▼ [007639]

Exercice 7640 Application bornée

Montrer que pour tout nombre complexe z dans le disque unité Δ,

$$\left|\frac{4z+3}{4+3z}\right| \leqslant 1.$$

Correction ▼ [007640]

Exercice 7641 Singularités

Que vaut, en fonction du nombre réel $r>0$, l'intégrale

$$I_r := \int_{\Delta_r} \frac{dz}{2z^2-5z+2} \quad ?$$

On précisera les valeurs de r exclues.

Correction ▼ [007641]

Quatrième partie
M1

9 Géométrie différentielle

9.1 352.00 - Courbes dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n.

Exercice 7642 Hélice

(a) Soient r et h deux nombres réels strictement positifs. La courbe paramétrée suivante, appelée hélice, est-elle régulière ?

$$\begin{array}{rccc} c : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Les courbes paramétrées suivantes sont-elle régulières ?

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} e : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{array}$$

[007642]

Exercice 7643 Reparamétrage d'une courbe régulière

(a) Montrer que le reparamétrage d'une courbe régulière est encore régulier.

(b) Peut-on reparamétrer toute courbe paramétrée par sa longueur d'arc ?

(c) Déterminer un reparamétrage de la courbe $\left\{ \begin{array}{rccc} c : & [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \right.$ qui en change l'orientation.

[007643]

Exercice 7644 Equivalence

(a) Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Les courbes paramétrées suivantes sont-elles équivalentes ?

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad d : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array}$$

(c) Deux courbes paramétrées équivalentes ont-elles même image ? La réciproque est-elle vraie ?

(d) Peut-on retrouver une courbe à partir de son image ?

[007644]

Exercice 7645 Calcul de longueur

(a) Calculer la longueur de la portion d'hélice

$$c : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) Déterminer un paramétrage de cette portion d'hélice par sa longueur d'arc.

[007645]

Exercice 7646 Différents paramétrages par longueur d'arc

Montrer que deux paramétrages par longueur d'arc d'une même courbe régulière orientée diffèrent au plus par un changement de paramétrage de la forme $t \mapsto t_0 + t$. [007646]

Exercice 7647 Approximation par lignes polygonales

Vérifier l'approximation polygonale pour un cercle de rayon r approché par des polygones réguliers à n côtés. [007647]

Exercice 7648 Les cycloïdes

On considère un cercle $\mathscr{C}_1$ de rayon 1 qui glisse sur l'axe des x du plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$, et pour tout nombre réel r strictement positif le cercle $\mathscr{C}_r$ de rayon r, concentrique avec $\mathscr{C}_1$ et solidement attaché à $\mathscr{C}_1$.

(a) Déterminer par un paramétrage, la trajectoire T_r, appelée “cycloïde“ du point M de coordonnées $(0,1-r)$ de $\mathscr{C}_r$ lorsque $\mathscr{C}_1$ glisse sur l'axe des x.

(b) Faire une ébauche de T_r suivant la position de r par rapport à 1.

(c) T_r est-elle une courbe régulière ?

(d) Calculer la longueur de T_1 quand $\mathscr{C}_1$ fait un tour.

[007648]

Exercice 7649 Approximation par lignes polygonales

(a) On rappelle qu'une ligne polygonale P de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'un uplet $P = (a_0, a_1, \cdots, a_k)$ de points de $\mathbb{R}^n$. On supposera aussi que deux points consécutifs sont distincts. Rappeler la formule pour la longueur d'une ligne polygonale P.

(b) On cherche à montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit $c\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$ de pas inférieur à δ,*

$$L[P] \leqslant L[c] \leqslant L[P] + \varepsilon$$

où $P = (c(t_0), c(t_1), \cdots, c(t_m))$ est la ligne polygonale simplement inscrite dans la courbe c associée à la partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$.

i. Écrire en termes de quantificateurs, en partant d'un $\varepsilon_1 > 0$, le théorème des sommes de Riemann pour la fonction $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|$.

ii. Écrire en termes de quantificateurs en partant d'un $\varepsilon_2 > 0$ la propriété de continuité uniforme des fonctions composantes $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dot{c}_j(t)$.

iii. Soit une partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$. Écrire en termes de quantificateurs le théorème des accroissements finis pour la fonction $[t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto c_j(t)$.

(c) Majorer la quantité $|\|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| - \|\dot{c}(t_{i+1})\|(t_{i+1} - t_i)|$ par $\sqrt{n}\varepsilon_2(t_{i+1} - t_i)$.

(d) Majorer la quantité $|L[c] - L[P]|$ par $\varepsilon_1 + \sqrt{n}\varepsilon_2(b-a)$.

(e) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta >$ tel que pour toute partition $(t_0 = a < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = b)$ de $[a,b]$ de pas inférieur à δ,
$$L[P] - \varepsilon \leqslant L[c] \leqslant L[P] + \varepsilon.$$

(f) Conclure à l'aide de l'inégalité triangulaire sur les polygones.

[007649]

9.2 352.00 - Courbes en petites dimensions

Courbes planes

Exercice 7650 Calculs de courbure

On considère l'espace affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(a) Calculer la fonction courbure d'un cercle de rayon $r > 0$.

(b) Soit $c\ : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. Soit R la rotation de centre 0 et d'angle α, et S la symétrie d'axe $x = y$. Déterminer la fonction courbure de $R \circ c$ et celle de $S \circ c$.

(c) Calculer la fonction courbure de la courbe de Lissajous $\left\{ \begin{array}{cccc} c\ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \end{array} \right.$

(d) Déterminer une courbe fermée à courbure partout strictement négative.

(e) Montrer qu'une courbe plane régulière de courbure nulle est un segment de droite.

[007650]

Exercice 7651 Courbure en un point extrémal

Soit $c\ : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon r et qu'au point de paramètre τ, $\|c(\tau)\| = r$.

(a) Montrer en dérivant une fois la fonction $t \mapsto \|c(t)\|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$?

(b) Montrer en dérivant à nouveau la fonction $t \mapsto \|c(t)\|^2$ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geqslant 1/r$.

[007651]

Exercice 7652 Construction d'une courbe plane à courbure prescrite

Le but de l'exercice est de montrer le théorème suivant.

Théorème. *Soit I un intervalle et $\kappa : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Alors, il existe une courbe plane $c : I \to \mathbb{R}^2$ paramétrée par la longueur d'arc et de fonction courbure κ. Cette courbe est unique à composition au but par un déplacement près.*

(a) On considère le système d'équations différentielles linéaire du premier ordre

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ v \\ n \end{pmatrix}.$$

où les fonctions $c, v, n : I \to \mathbb{R}^2$ sont les inconnues. Montrer que ce système admet une unique solution $(c(t), v(t), n(t))$ avec pour valeur initiale un vecteur fixé (c_0, v_0, n_0) avec (v_0, n_0) base orthonormée directe.

(b) Écrire un système d'équations différentielles linéaire du premier ordre satisfait par le vecteur $(<v,v>, <n,n>, <v,n>)$.

(c) Montrer que pour les solutions obtenues précédemment, $(v(t), n(t))$ reste un repère orthonormé direct.

(d) En déduire que la courbe c obtenue est paramétrée par la longueur d'arc et que sa fonction courbure est κ.

(e) Conclure.

[007652]

Exercice 7653 Nombre de rotation

Calculer le nombre de rotation de la courbe régulière fermée suivante

[007653]

Exercice 7654 Courbure totale

(a) Calculer la somme des mesures des angles extérieurs d'un triangle et d'un carré.

(b) Déterminer la fonction courbure et la courbure totale de l'ovale paramétré par $c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$.

[007654]

Courbes de $\mathbb{R}^3$

Exercice 7655 Formules de Frenet

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$. [007655]

Exercice 7656 Torsion

(a) Calculer la torsion de l'hélice $\left\{\begin{array}{cccc} c: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \end{array}\right.$.

(b) Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $t \mapsto (4\cos t, 5-5\sin t, -3\cos t)$.

(c) La courbe précédente est-elle plane ?

[007656]

Exercice 7657 Courbes sur une surface

Soit C la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée C' définie par $x = t$, $y = t^2$ pour t parcourant $[0,1]$.

(a) Donner une expression intégrale pour la longueur de C' puis celle de C, puis les comparer.

(b) Calculer la longueur de C' puis celle de C.

[007657]

Exercice 7658 Construction des courbes de $\mathbb{R}^3$

Énoncer pour les courbes de l'espace $\mathbb{R}^3$, le théorème analogue à la caractérisation des courbes planes à déplacements près par leur courbure. [007658]

9.3 352.00 - Surfaces

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites

Exercice 7659 Difféomorphisme local, global

(a) Soit U le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'origine. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} f: U & \to & U \\ (x,y) & \mapsto & (x^2-y^2, 2xy) \end{array}$$

est un difféomorphisme au voisinage de chacun des points de U.

(b) Est-ce un difféomorphisme de U ?

[007659]

Exercice 7660 Sous-variété de $\mathbb{R}^2$

Soit

$$\mathscr{C} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^3 + y^3 - 3xy = 0\}.$$

(a) Au voisinage de quels points de $\mathscr{C}$, cette équation définit-elle y comme fonction de x ? Quelle est alors la dérivée de cette fonction ?

(b) Paramétrer $\mathscr{C}$ à l'aide de t tel que $y = tx$.

(c) Représenter $\mathscr{C}$ avec ses asymptotes.

(d) Le sous-ensemble $\mathscr{C}$ est-il une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^2$?

[007660]

9.3.1 Exemples de surfaces dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 7661 Surfaces paramétrées

La surface paramétrée par $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ est-elle régulière au voisinage de $A(1,-1,-1)$?

[007661]

Exercice 7662 Surfaces implicites

(a) L'ensemble d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.

(b) L'ensemble d'équation $(x^2+y^2+z^2-4)^2=0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire.

(c) L'ensemble d'équation $x^2+y^2-z^2=0$ est-il une surface régulière de $\mathbb{R}^3$. Le décrire. Montrer que tous les chemins du point $A(1,0,1)$ au point $B(1,0,-1)$ passent par un même point à déterminer.

(d) Les ensembles d'équations respectives

$$a) x^2+3y^2+z^2+4xy+2z=5 \qquad b) 2x^2+3y^2=1$$
$$c) \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=1 \qquad d) \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=-1$$

sont-ils des surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$? Les décrire.

[007662]

Exercice 7663 Paramétrages de la sphère

On considère la sphère S unité dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer par une expression en coordonnées de la projection stéréographique d'un ouvert U de S (à déterminer) depuis le pôle nord sur le plan d'équation $z=0$. Vérifier qu'il s'agit bien de paramétrage de U.

(b) Faîtes de même depuis le pôle sud.

(c) Montrer que le changement de paramétrage est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(d) Interpréter les coordonnées sphériques comme un paramétrage de la sphère S.

[007663]

9.4 353.00 - Applications régulières

Exercice 7664 Applications régulières ?

(a) La restriction à la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-6x=-5$ de la fonction $(x,y,z) \mapsto 5x^6+7xy^4-2$ est-elle différentiable ?

(b) La restriction à la surface d'équation $x^2+y^2+z^2-6x=-5$ de la fonction $(x,y,z) \mapsto \sqrt{|x|}$ est-elle différentiable ?

[007664]

Exercice 7665 Difféomorphismes

(a) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Montrer que le graphe de f est difféomorphe à U.

(b) Les surfaces $\mathscr{E}$ d'équation $2x^2+3y^2+4z^2=1$ et $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ sont-elles difféomorphes ?

(c) Les surfaces $\mathscr{C}$ d'équation $2x^2+3y^2=1$ et $\mathscr{S}$ d'équation $x^2+y^2+z^2=4$ sont-elles difféomorphes ?

[007665]

Plans tangents

Exercice 7666 Détermination de plan tangent

(a) Déterminer le plan tangent en $A(1,-1,-1)$ à la surface paramétrée par $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$.

(b) Déterminer le plan tangent en $A(1,1,-1)$ à la surface d'équation $x^5+y^5+z^5=1$.

(c) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Déterminer le plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

[007666]

Exercice 7667 Plan tangent

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2+y^2)+x=0$.

(a) La surface S est-elle régulière ?

(b) Paramétrer la surface S (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.

(c) Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6,1,-1)$.

(d) Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6,1,-1)$.

(e) Le vecteur $V=(27,-29,-1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6,1,-1)$?

[007667]

Exercice 7668 Plan tangent

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par F : $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ au point $M(u_0,v_0)$ de paramètres (u_0,v_0).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5+y^5+z^5=1$ au point $M(x_0,y_0,z_0)$ de coordonnées (x_0,y_0,z_0).

(c) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

[007668]

Exercice 7669 Détermination de minima

Dans tout l'exercice, r et h parcourent $]0,+\infty[$.

(a) Déterminer le volume $V(r,h)$ d'un cylindre plein de hauteur h et de rayon r.

(b) Déterminer l'aire $A(r,h)$ d'une casserole de hauteur h et de rayon r.

(c) Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ avec coordonnées (r,h,v) d'équation $1=V(r,h)$ est une surface régulière.

(d) Déterminer le gradient de la fonction $\alpha : (r,h,v) \mapsto A(r,h)$ et celui de la fonction $\nu : (r,h,v) \mapsto V(r,h)-1$

(e) Soit (r_0,h_0,v_0) un minimum de la fonction α sur la surface d'équation $1=V(r,h)$. Comparer $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\alpha$ et $grad_{(r_0,h_0,v_0)}\nu$.

(f) Déterminer le minimum de $A(r,h)$ sur la surface d'équation $V(r,h)=1$. Interpréter ce résultat.

[007669]

9.5 352.00 - Etude métrique des sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 7670 Paramétrage

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Déterminer des déplacements de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conservent l'image de F.

(b) Montrer que l'image de F est l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.

(c) L'image de F est-elle une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$?

[007670]

Applications différentiables entre surfaces

Exercice 7671 Applications différentiables entre surfaces

Soit S_1 et S_2 deux sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. On suppose que $g(S_1) \subset S_2$. On note $f : S_1 \to S_2$ la restriction de g à S_1. Montrer f est une application différentiable.

(b) Soit $f : S_1 \to S_2$ une application différentiable et p un point de S_1. Montrer qu'il existe un voisinage de p dans $\mathbb{R}^3$ sur lequel f se prolonge en une application $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

(c) Montrer que la composée de deux applications différentiables entre sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$ est différentiable et expliciter la différentielle de la composée.

[007671]

Exercice 7672 Différentielle

Soit S_1 d'équation $x^6 + y^6 + z^6 = 1$ et S_2 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(a) Montrer que S_1 et S_2 sont deux sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$.

(b) On considère l'application f de S_1 vers S_2, qui à p de coordonnées (x,y,z) associe le point de coordonnées (x^3,y^3,z^3). Montrer que f est bijective de S_1 sur S_2.

(c) Montrer que f est différentiable.

(d) Déterminer la différentielle de f. Est-elle inversible ?

(e) La bijection réciproque f^{-1} est-elle différentiable ?

(f) Reprenez l'exercice pour l'application g de S_1 vers le plan d'équation $z = 0$, qui à p de coordonnées (x,y,z) associe le point de coordonnées $(x,x,0)$.

[007672]

Exercice 7673 Théorème d'inversion locale

Énoncer et démontrer le théorème d'inversion locale pour une application entre deux sous-surfaces différentiables de $\mathbb{R}^3$. [007673]

Exercice 7674 Extrema

(a) Trouver les extrema de la fonction $f : (x,y,z) \mapsto xy$ sur la sphère unité.

(b) Trouver les extrema de la fonction $f:(x,y,z)\mapsto xy$ sur l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2+3z^2=1$.

[007674]

Première forme fondamentale

Exercice 7675 Première forme fondamentale

Calculer la première forme fondamentale du graphe S d'une application $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ différentiable. On pourra déterminer d'abord un paramétrage global de S. [007675]

Exercice 7676 Dépendance en le paramétrage

(a) On considère le plan d'équation $z=0$ avec le paramétrage $\begin{cases} F:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x,y,0). \end{cases}$
Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $\mathscr{B}_F$ correspondante.

(b) On considère le plan d'équation $z=0$ avec le paramétrage local

$$\begin{array}{rcl} G:]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) & \mapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta, 0). \end{array}$$

Déterminer la matrice de la première forme fondamentale dans la base $\mathscr{B}_G$ correspondante.

(c) Déterminer la matrice de changement de base au point de coordonnées $(1,0,0)$ de la base $\mathscr{B}_F$ dans la base $\mathscr{B}_G$. Relier les deux matrices obtenues pour la première forme fondamentale.

[007676]

9.5.1 Calcul d'aires

Exercice 7677 Sphère

(a) Calculer l'aire de la sphère en coordonnées sphériques.

(b) Calculer l'aire de l'ellipsoïde $\mathscr{E}$ d'équation $x^2+y^2+5z^2=1$.

[007677]

Exercice 7678 Calcul d'aire

On considère l'application f de la sphère unité $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans le cylindre $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2=1$ donnée en coordonnées cartésiennes par

$$f\ :\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z \end{pmatrix}.$$

(a) Faire une figure pour décrire géométriquement cette application.

(b) On considère un paramétrage local de la sphère unité $\mathscr{S}$ en coordonnées polaires

$$F:(\theta,\phi)\in]0,2\pi[\times]0,\pi[\ \mapsto\ \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix}.$$

Déterminer la première forme fondamentale de la sphère dans cette paramétrisation.

(c) On considère l'application $G = f \circ F$. Montrer que c'est un paramétrage local du cylindre $\mathscr{C}$ et calculer la première forme fondamentale du cylindre dans cette paramétrisation.

(d) L'application f est-elle un difféomorphisme local ? Un difféomorphisme de $\mathscr{S}$ sur $\mathscr{C}$?

(e) L'application f est-elle une isométrie locale ? Conserve-t-elle les aires ?

(f) En déduire l'aire de la portion de sphère entre deux grands cercles passant par les poles nord et sud et faisant entre eux un angle de mesure α. Vérifier en déterminant l'aire de la sphère.

[007678]

Cartographie

Exercice 7679 Applications conformes

Soit g et g' deux produits scalaires euclidiens sur $\mathbb{R}^n$. Montrer en utilisant la règle des sinus dans un triangle $a/\sin\hat{A} = b/\sin\hat{B}$ que g et g' définissent les mêmes mesures d'angle non orientés si et seulement s'il existe une constante $c > 0$ telle que $g = cg'$. [007679]

Exercice 7680 Cartes

On cherche des applications d'un ouvert du plan $\mathbb{R}^2$ dans un ouvert de la sphère S^2 de $\mathbb{R}^3$ qui conservent les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires.

(a) Traduire chacune de ces trois propriétés à l'aide des formes fondamentales.

(b) Les coordonnées sphériques donnent-elles une application qui conserve les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

(c) La projection stéréographique depuis le pôle nord conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

(d) L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-1,1[& \to & S^2 \\ (\theta,h) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2}\sin\theta \\ h \end{pmatrix} \end{array}$$

conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

(e) L'application du cylindre dans la sphère

$$\begin{array}{ccc}]0,2\pi[\times]-\infty,+\infty[& \to & S^2 \\ (\theta,x) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sqrt{1-h^2(x)}\cos\theta \\ \sqrt{1-h^2(x)}\sin\theta \\ h(x) \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $h(x) = \operatorname{th}(x)$ conserve-t-elle les longueurs, ou les mesures d'angles, ou les aires ?

[007680]

Seconde forme fondamentale

Exercice 7681 Sphère

Calculer la seconde forme fondamentale de la sphère. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales. [007681]

Exercice 7682 Cylindre

(a) Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux au cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$.

(b) Déterminer l'application de Weingarten en chaque point p du cylindre.

(c) En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

(d) Reprendre les questions précédentes pour le paraboloïde hyperbolique d'équation $z = y^2 - x^2$ au point $p(0,0,0)$.

[007682]

Exercice 7683 Point hyperbolique/elliptique

Donner l'exemple d'une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$ avec un point hyperbolique et un point elliptique. [007683]

Exercice 7684 Etude jusqu'à l'ordre 2

Soit Σ le graphe de la fonction $f(x,y) = xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Est-ce une sous-surface différentiable de $\mathbb{R}^3$?

(b) Déterminer une paramétrisation de Σ.

(c) Dans cette paramétrisation, calculer la première et la seconde forme fondamentale.

(d) Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

[007684]

Exercice 7685 Etude jusqu'à l'ordre 2

Soit l'ouvert $W =]0;1[\times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère la surface M de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} F : W & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$

(a) Faire un dessin donnant l'allure de M.

(b) Calculer l'aire de la partie de M comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 2\pi$.

(c) Calculer, dans le paramétrage F, la courbure de Gauss K, la courbure moyenne H, les courbures principales de la surface M.

[007685]

Surfaces réglées

Exercice 7686 Définition

(a) Une surface régulière de $\mathbb{R}^3$ est dite réglée si elle admet des paramétrages locaux de la forme $F(t,s) = c(t) + sv(t)$ pour $t,s) \in I \times J$ où c est une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$ paramétrée sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et $v\ : I \to \mathbb{R}^3_{ev}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ avec $v(t)$ et $\dot{c}(t)$ partout indépendant. Montrer que si J est un petit intervalle autour de 0, F est alors un paramétrage régulier.

(b) Montrer que la courbure de Gauss d'une surface réglée est négative en tout point.

[007686]

Exercice 7687 Exemples

(a) Montrer qu'un cylindre est une surface réglée.

(b) Montrer qu'un paraboloïde hyperbolique d'équation $z = xy$ est réglé sur la droite d'équation $y = z = 0$.

(c) Montrer qu'un hyperboloïde à une nappe d'équation $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ est réglé sur le cercle à l'altitude 0.

[007687]

10 352.00 - Géométrie différentielle (Examen)

Dans toute cette feuille, $\mathbb{R}^n$ sera un espace affine réel euclidien orienté de dimension n. Il est muni d'une base orthonormée directe et des coordonnées cartésiennes correspondantes.

Exercice 7688

Calculer la torsion de la courbe de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par $c : t \mapsto (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$. La courbe est-elle plane ?

Correction ▼ [007688]

Exercice 7689

Soit C la courbe tracée sur la surface d'équation $3z = xy + x^3$ et dont la projection orthogonale sur le plan d'équation $z = 0$ est la courbe paramétrée C' définie par $x = t$, $y = t^2$ pour t parcourant $[0, 1]$.

(a) Donner une expression intégrale pour la longueur de C' puis celle de C, puis les comparer.

(b) Calculer la longueur de C' puis celle de C.

Correction ▼ [007689]

Exercice 7690

Soit S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2(2z^2 + y^2) + x = 0$.

(a) La surface S est-elle régulière ?

(b) Paramétrer la surface S (de manière polynomiale) en prenant les paramètres u et v parmi les variables x, y et z.

(c) Déterminer une base de l'espace tangent à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.

(d) Calculer un vecteur normal à la surface S en $A(-6, 1, -1)$.

(e) Le vecteur $V = (27, -29, -1)$ appartient-il au plan tangent à S en $A(-6, 1, 1)$?

Correction ▼ [007690]

Exercice 7691

Calculer l'aire de l'ellipsoïde $\mathscr{E}$ d'équation $x^2 + y^2 + 5z^2 = 1$.

Correction ▼ [007691]

Exercice 7692 Paraboloïde hyperbolique

Calculer une application de Weingarten du paraboloïde hyperbolique S d'équation $z = x^2 - y^2$ au point $p(0, 0, 0)$. En déduire sa courbure de Gauss et ses directions principales.

Correction ▼ [007692]

Exercice 7693

Soit C une courbe régulière plane fermée simple convexe paramétrée par la longueur d'arc par l'application $[0, \ell] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto c(t)$. Un coin est un point de la courbe où la fonction courbure a une dérivée nulle. Le but de l'exercice est de montrer que la courbe C a au moins trois coins. On suppose que C n'est pas un cercle. On notera $v(t) = \dot{c}(t)$ et $\gamma(t) = \ddot{c}(t)$ et $\kappa(t)$ la courbure au point de paramètre t.

(a) Montrer que C a au moins deux coins distincts P et Q. Faire une figure.

(b) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\int_0^\ell \dot\kappa(t)c(t) = 0$.

(c) On suppose que P et Q sont sur l'axe des x et qu'il n'y a pas d'autres coins. Aboutir à une contradiction.

(d) Montrer que la courbe C a au moins quatre coins.

Correction ▼ [007693]

Exercice 7694

On considère dans $\mathbb{R}^3$ euclidien le cylindre $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2=1$ muni de la métrique riemannienne restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\mathscr{C}$ est une surface régulière.

(b) Montrer que l'application $F:]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $(\theta,h)\mapsto(\cos\theta,\sin\theta,h)$ donne un paramétrage de $\mathscr{C}$ au voisinage du point p de coordonnées $(1,0,0)$.

(c) Calculer la matrice $G(u)$ de la première forme fondamentale I dans la base

$$(X_\theta(\theta,h) := \frac{\partial F}{\partial\theta}(\theta,h), X_h := \frac{\partial F}{\partial h}(\theta,h))$$

de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C}$ correspondant à ce paramétrage F.

(d) Déterminer un champs de vecteurs normaux unitaires $N(\theta,h)$ au point $F(\theta,h)$.

(e) Calculer les symboles de Christoffel de la base $(X_\theta(\theta,h),X_h(\theta,h))$ de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C}$.

(f) Soit a un nombre réel fixé et $c:\mathbb{R}\to S$, $t\mapsto(\cos t,\sin t,at)$ la courbe paramétrée tracée sur le cylindre $\mathscr{C}$. Exprimer le vecteur vitesse au point de paramètre t dans la base $(X_\theta(u),X_h)$ de $T_{F(\theta,h)}\mathscr{C})$.

(g) Les courbes paramétrées précédentes sont-elles des géodésiques ?

(h) Les sections planes du cylindre paramétrées par la longueur d'arc sont-elles des géodésiques ?

[007694]

Exercice 7695

Montrer que l'image d'une géodésique par une isométrie entre deux surfaces munies de métriques riemanniennes est une géodésique. Retrouver les géodésiques du cylindre $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2=1$ de l'exercice précédent. [007695]

Exercice 7696 Métrique riemannienne

Soit $\kappa\in\mathbb{R}^+$. On considère sur le plan affine $\mathbb{R}^2$, la métrique riemannienne donnée par

$$g_{ij}(x_1,x_2) = \frac{1}{(1+\kappa(x^2+y^2))^2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

dans la paramétrisation Id de $\mathbb{R}^2$.

(a) Calculer les symboles de Christoffel, par la formule

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{jm}}{\partial u^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m}\right)g^{mk}.$$

(b) On rappelle la formule des coefficients de l'endomorphisme de courbure

$$R(X_i,X_j)X_k = \sum_l\left(\frac{\partial\Gamma_{kj}^l}{\partial u^i}-\frac{\partial\Gamma_{ki}^l}{\partial u^j}+\sum_m\left(\Gamma_{mi}^l\Gamma_{kj}^m-\Gamma_{mj}^l\Gamma_{ki}^m\right)\right)X_l$$

Calculer la courbure de Gauss de $(\mathbb{R}^2,g)$.

[007696]

Exercice 7697

(a) La courbe paramétrée suivante est-elle régulière ?

$$\begin{array}{rcl} c:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}. \end{array}$$

(b) On fixe deux nombres réels $a<b$. Comparer la longueur de la portion de la courbe c paramétrée par $[a,b]$ et $\sqrt{2}(b-a)$.

(c) Déterminer une surface quadrique qui contient l'image $\mathscr{C}$ de la courbe c.

(d) Déterminer un déplacement (non égal à l'identité) de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conserve l'image $\mathscr{C}$ de la courbe c.

(e) Décrire l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

(f) Calculer la fonction torsion de la courbe c.

Correction ▼ [007697]

Exercice 7698

La courbure moyenne de la surface paramétrée suivante est-elle partout nulle ?

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \cosh(u)\cos(v) \\ \cosh(u)\sin(v) \\ u \end{pmatrix}. \end{array}$$

Correction ▼ [007698]

Exercice 7699

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t(1-t^2) \\ s \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Déterminer des déplacements de l'espace $\mathbb{R}^3$ qui conservent l'image de F.

(b) Montrer que l'image de F est l'ensemble d'équation $y^2=x^2(1-x)$.

(c) L'image de F est-elle une surface régulière de $\mathbb{R}^3$?

Correction ▼ [007699]

Exercice 7700

Trouver les extrema de la fonction $f:(x,y,z)\mapsto xy$ sur la sphère unité.

Correction ▼ [007700]

Exercice 7701

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{array}{rcl} c\ :\ ]0,1[& \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ 4t \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) La courbe c est-elle régulière ?

(b) Paramétrer l'image de c par la longueur d'arc.

(c) Déterminer en tout point de c le repère de Frenet.

Correction ▼ [007701]

Exercice 7702

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F:]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Représenter l'image T de F.

(b) Montrer que T est une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

(c) Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique induite par le produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$, c'est à dire la première forme fondamentale.(Expliquer d'abord votre démarche globale. Tout résultat intermédiaire sera pris en compte).

(d) Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Correction ▼ [007702]

Exercice 7703

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} F:]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} \varphi \\ \theta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}. \end{array}$$

(a) Montrer qu'on définit une métrique riemannienne sur $Im(F)=T$ en posant $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi})=g(\frac{\partial F}{\partial \theta})=1$ et $g(\frac{\partial F}{\partial \varphi},\frac{\partial F}{\partial \theta})=0$.

(b) Déterminer la courbure de Gauss K de T avec la métrique g.

(c) Calculer $\int_T K(m)d\sigma(m)$.

Correction ▼ [007703]

Exercice 7704

Soit S une surface différentiable munie d'une métrique riemannienne g. Soit p et q deux points fixés sur S. Soit ε un nombre réel strictement positif. Soit $a\leqslant b$ deux nombres réels. Soit $C:]-\varepsilon,\varepsilon[\times[a,b]\to S$ une application différentiable vérifiant pour tout $s\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $C(s,a)=p$ et $C(s,b)=q$. On notera $c_s(t):=C(s,t)$, $V(t):=\frac{\partial C}{\partial s}_{(0,t)}$. On admettra l'identité des dérivées covariantes

$$\nabla_{V(t)}\dot{c_0}(t)=\nabla_{\dot{c_0}(t)}V(t).$$

(a) Représenter sur un dessin S, l'application C et le champs de vecteurs V, en particulier $V(a)$ et $V(b)$.

(b) Rappeler la définition de l'énergie $E[c_s]$ de la courbe $c_s:[a,b]\to S$.

(c) Exprimer à l'aide de la dérivée covariante $\nabla_{\dot{c_0}(t)}\dot{c_0}(t)$, la dérivée $\frac{dE[c_s]}{ds}_{s=0}$.

[007704]

Exercice 7705

Soit Σ le graphe de la fonction $f(x,y)=xy$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Est-ce une surface régulière ?

(b) Déterminer une paramétrisation de Σ.

(c) Dans cette paramétrisation, calculer la première et la seconde forme fondamentale.

(d) Déterminer la courbure de Gauss et la courbure moyenne.

[007705]

Exercice 7706

Soit l'ouvert $W =]0;1[\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$. On considère la surface M de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par

$$\begin{array}{rcl} F : W & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & (u\cos v, u\sin v, v) \end{array}$$

(a) Faire un dessin donnant l'allure de M.

(b) Calculer l'aire de la partie de M comprise entre les plans d'équations $z=0$ et $z=2\pi$.

(c) Calculer, dans le paramétrage F, la courbure de Gauss K, la courbure moyenne H, les courbures principales de la surface M.

[007706]

Exercice 7707

Trouver les extrema de la fonction $\phi(x,y,z) = xy$ définie sur l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2+y^2+3z^2 = 1$.

[007707]

Exercice 7708

On considère dans $\mathbb{R}^4$ l'intersection des ensembles d'équation $x^2+y^2+z^2+t^2 = 8$ et $x^2+y^2 = 4$.

(a) Est-ce une surface différentiable ?

(b) Déterminer un système d'équation pour ses espaces tangents.

[007708]

Exercice 7709

Démontrer les formules de Frenet pour les courbes paramétrées par la longueur d'arc dans $\mathbb{R}^3$. [007709]

Exercice 7710

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $c\ : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée par la longueur d'arc. On suppose que c reste dans le disque de rayon $r>0$ et qu'au point de paramètre τ, $\|c(\tau)\| = r$.

(a) Rappeler la valeur absolue de la courbure d'un cercle de rayon r.

(b) Montrer en dérivant une fois la fonction $\phi : t \mapsto \|c(t)\|^2$ que $\ddot{c}(\tau)$ est colinéaire à $c(\tau)$.

(c) Montrer en dérivant à nouveau la fonction ϕ que la courbure en τ vérifie $|\kappa(\tau)| \geqslant 1/r$.

(d) Interpréter graphiquement ce résultat.

Correction ▼ [007710]

Exercice 7711

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface $\mathscr{S}$ de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par F : $(u,v) \mapsto (u+v^2, u^2-v^2, v)$ au point $M(u_0,v_0)$ de paramètres (u_0,v_0).

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface Σ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^5+y^5+z^5 = 1$ au point $M(x_0,y_0,z_0)$ de coordonnées (x_0,y_0,z_0).

(c) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^\infty$. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent au graphe de f en chacun de ses points.

Correction ▼ [007711]

Exercice 7712

(a) Déterminer les plans tangents et un champs de vecteurs normaux unitaires au paraboloïde hyperbolique $\mathscr{P}$ d'équation $z = y^2 - x^2$ au voisinage du point $A(0,0,0)$ de coordonnées $(0,0,0)$.

(b) Déterminer l'application de Weingarten au point A du paraboloïde hyperbolique $\mathscr{P}$.

(c) En déduire la courbure de Gauss et les directions principales du paraboloïde hyperbolique $\mathscr{P}$ au point A.

Correction ▼ [007712]

Exercice 7713

On considère la sphère de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$. La projection stéréographique de centre le pôle Nord sur le plan de hauteur nulle (d'équation $z = 0$) conserve-t-elle les longueurs ? les angles ? les aires ?

Correction ▼ [007713]

Exercice 7714

L'intersection de deux surfaces régulières de $\mathbb{R}^3$ est-elle une courbe régulière de $\mathbb{R}^3$?

Correction ▼ [007714]

---

11 Théorie des groupes et géométrie

Exercice 7715

Montrer que toute forme quadratique non-dégénérée d'indice 1 en dimension 3 est à un scalaire près, équivalente à la forme de Lorentz $x^2 + y^2 - y^2$. [007715]

Exercice 7716

Donner l'exemple de deux formes bilinéaires avec même rang, même indice et même discriminant mais non-équivalentes. [007716]

Exercice 7717

Soit P un plan muni d'une forme quadratique. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

— P est un plan hyperbolique.

— q est non-dégénérée d'indice 1.

— le discriminant de q est égal à -1, modulo un carré (et donc dans une base orthonormée, l'expression de q est $q(x) = ax_1^2 + bx_2^2$, avec des scalaires a et b tels que $-ab$ est un carré).

[007717]

Exercice 7718

(a) Montrez que les morphismes d'un groupe simple vers un groupe quelconque sont constants ou injectifs.

(b) Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathscr{S}_n$?

(c) Démontrez que si G est un groupe fini, S un p-Sylow de G, et H un sous-groupe de G, il existe un conjugué de S qui rencontre H en un p-Sylow de H.

[007718]

Exercice 7719

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p > 1$.

(a) Montrez que les orbites de l'action de H sur G/H par translation à gauche sont réduites à des points.

(b) Montrez que H est distingué.

[007719]

Exercice 7720

(a) Explicitez un 7-Sylow du groupe symétrique $\mathscr{S}_9$

(b) Déterminez le nombre d'éléments d'ordre 7 dans $\mathscr{S}_9$.

(c) Déterminez le nombre de 7-Sylow.

(d) Vérifiez les congruences données par le théorème de Sylow sur le nombre de 7-Sylow.

[007720]

Exercice 7721

Soit G un groupe et $f : G \to A$ un morphisme de groupes de G dans un groupe abélien A. On suppose de plus que le noyau $N(f)$ de f est résoluble.

(a) Montrez que le groupe dérivé $D(G)$ de G est inclus dans le noyau de F.

(b) Montrez que G est résoluble.

[007721]

Exercice 7722

Un groupe G de cardinal 169 agit sur un espace X à 207 éléments. On suppose qu'il y a exactement 15 orbites distinctes. Déterminer le nombre d'orbites de chaque cardinal. [007722]

Exercice 7723

Combien le groupe $\mathscr{S}_5$ contient-il de 5-Sylow ?

Correction ▼ [007723]

Exercice 7724 Le plan $P(\mathbb{F}_2^3)$

Déterminer le nombre de points est de droites du plan projectif $P(\mathbb{F}_2^3)$. Représenter les relations d'incidence. [007724]

Exercice 7725

(a) Déterminer le centre de $SL(4,\mathbb{F}_2)$ et calculer l'ordre de $PSL(4,\mathbb{F}_2)$.

(b) Dans $SL(4,\mathbb{F}_2)$ déterminer l'ordre de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et de } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces deux matrices sont-elles conjuguées dans $SL(4,\mathbb{F}_2)$?

(c) Déterminer le centre de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ et calculer l'ordre de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$.

(d) Le but de cette question est de montrer que toutes les involutions de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ sont des applications projectives associées à des transvections. Soit F une homographie de $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ involutive (i.e. $F^2 = Id \in PSL(3,\mathbb{F}_4)$) et $f \in SL(3,\mathbb{F}_4)$ telle que $P(f) = F$.

i. Montrer que $P(f^3) = F$ et que f^3 est d'ordre 2 dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$. On notera $g = f^3$.

ii. Quelle est la caractéristique de $\mathbb{F}_4$? Montrer que $(g-Id)^2 = 0$. Déterminer $\dim Ker(g-Id)$ et $\dim Im(g-Id)$.

iii. Conclure.

(e) En étudiant les classes de conjugaison des éléments d'ordre 2, déterminer si $PSL(4,\mathbb{F}_2)$ et $PSL(3,\mathbb{F}_4)$ sont isomorphes.

Correction ▼ [007725]

Exercice 7726

(a) Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.

(b) Soit (E,f) un espace muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de forme quadratique associée q. Montrer que si f admet un vecteur non nul isotrope, la forme q prend toutes les valeurs de k.

(c) Montrer que E se décompose comme somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un sous-espace sur lequel la forme quadratique n'a pas de vecteur isotrope non nul.

(d) Montrer que le nombre de plans hyperboliques dans une telle décomposition est indépendant de la décomposition. Le décrire à l'aide d'un invariant défini en cours.

Correction ▼ [007726]

Exercice 7727 Formes σ-sesquilinéaires sur $\mathbb{F}_{25}$

(a) On considère l'application $\sigma : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Montrer que c'est un automorphisme involutif du corps $\mathbb{F}_{25}$.

(b) Les formes suivantes sur $E := \mathbb{F}_{25}^3$ sont-elles σ-sesquilinéaires ?

$$\begin{aligned}
f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) &= x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5. \\
f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) &= x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5. \\
f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}) &= 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.
\end{aligned}$$

(c) Parmi les formes σ-sesquilinéaires précédentes, lesquelles sont équivalentes ?

Correction ▼ [007727]

Exercice 7728 Action symplectique sur les droites et les plans

---

(a) Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Soit G le groupe (dit symplectique) des isométries de (E,f). Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe G sur l'ensemble $P(E)$ des droites de E ?

(b) Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Quelles sont les restrictions possibles à équivalence près de f sur les plans de E ?

(c) Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe symplectique d'un espace vectoriel E de dimension 6 muni d'une forme alternée non-dégénérée sur l'ensemble des plans de E ?

Correction ▼ [007728]

Exercice 7729 Coloriages

(a) Rappeler la formule de Burnside qui calcule le nombre d'orbites de l'action d'un groupe fini sur un ensemble fini.

(b) Rappeler la liste des éléments du groupe d'isométries directes (déplacements) d'un tétraédre régulier. On fera une figure pour chaque type d'axe de rotation, en indiquant l'ordre des rotations.

(c) De combien de façons différentes peut-on peindre les faces d'un tétraèdre régulier avec c couleurs ? Chaque face n'est peinte que d'une couleur. On ne distingue pas deux résultats qui se déduisent l'un de l'autre par un déplacement du tétraèdre.

Correction ▼ [007729]

Exercice 7730 La réciproque du théorème de Lagrange

(a) Le groupe symétrique $\mathscr{S}_5$ a-t-il un élément d'ordre 6 ?

(b) Chercher dans un groupe symétrique un contre-exemple à la réciproque du théorème de Lagrange sur l'ordre d'un élément dans un groupe.

[007730]

Exercice 7731 Polarisation

(a) Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{F}_3[X]/X^2+1$ est un corps que l'on notera $\mathbb{F}_9$. On notera $\xi := [X]$ la classe du polynôme X. Montrer que $(1,\xi)$ est une base de $\mathbb{F}_9$ comme $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel. On définit les applications $\ell_i : \mathbb{F}_9 \to \mathbb{F}_3$ pour $i=1,2$ par la condition

$$\forall \lambda \in \mathbb{F}_9, \quad \lambda = \ell_1(\lambda)+\ell_2(\lambda)\xi.$$

(b) Soit $\sigma : \mathbb{F}_9 \mapsto \mathbb{F}_9$ défini par $\sigma(x)=x^3$. Montrer que σ est un automorphisme de corps de $\mathbb{F}_9$ d'ordre 2. Calculer $\sigma(\xi)$.

(c) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_9$,

$$\begin{aligned} \ell_2(\lambda) &= -\ell_1(\xi\lambda) \\ 2\ell_1(\lambda) &= \lambda+\sigma(\lambda) \\ 2\xi\ell_2(\lambda) &= \lambda-\sigma(\lambda). \end{aligned}$$

(d) *(Polarisation)* Soit E un $\mathbb{F}_9$-espace vectoriel. Soit h une forme σ-hermitienne sur E. Soit q la forme quadratique associée (i.e. pour $x \in E$, $q(x)=h(x,x)$). Soit $(x,y) \in E^2$. Calculer $\ell_1(f(x,y))$ en fonction de q et en déduire $f(x,y)$ en fonction de q.

(e) En déduire que les sous-espaces totalement isotropes pour h sont exactement les sous-espaces vectoriels de E contenus dans le cône isotrope de h.

[007731]

Exercice 7732 Signature d'une restriction

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n muni d'une forme bilinéaire symétrique f de signature (p,q). Soit V un sous-espace vectoriel de E de dimension r. Montrer la signature (p',q') de f restreinte à V vérifie $p' \leqslant p$ et $p' \geqslant p+r-n$. [007732]

Exercice 7733 Homographie

Soit d et d' deux droites d'un plan projectif. Soit h une homographie de d dans d' telle que $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $C' = h(C)$. Construire $h(M)$.

[007733]

Exercice 7734

3. Soit E un espace muni d'une forme sesquilinéaire non dégénérée réflexive. Soit V un sous-espace de E. Supposons que le radical $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^{\perp}$ de V est de dimension 2, $\mathrm{rad}(V) = \vec{(}N_1, N_2)$. Soit W un supplémentaire de $\mathrm{rad}(V)$ dans V. Calculer en détails le radical de $V' = \vec{(}N_1) \oplus W$. [007734]

Exercice 7735

(a) Soit E un espace muni d'une forme sesquilinéaire non dégénérée réflexive. Soit V un sous-espace de E. Supposons que le radical $\mathrm{rad}(V) = V \cap V^{\perp}$ de V est de dimension 2, $\mathrm{rad}(V) = \vec{(}N_1, N_2)$. Soit W un supplémentaire de $\mathrm{rad}(V)$ dans V. Calculer en détails le radical de $V' = \vec{(}N_1) \oplus W$.

(b) Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Soit G le groupe (dit symplectique) des isométries de (E, f). Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe G sur l'ensemble $P(E)$ des droites de E ?

(c) Soit E un espace muni d'une forme alternée non-dégénérée f. Quelles sont les restrictions possibles à équivalence près de f sur les plans de E ?

(d) Combien y a-t-il d'orbites dans l'action du groupe symplectique d'un espace vectoriel E de dimension 6 muni d'une forme alternée non-dégénérée sur l'ensemble des plans de E ?

[007735]

Exercice 7736

(a) On considère l'application $\sigma : \mathbb{F}_{25} \to \mathbb{F}_{25}, \lambda \mapsto \lambda^5$. Montrer que c'est un automorphisme involutif du corps $\mathbb{F}_{25}$.

(b) Les formes suivantes sur $\mathbb{F}_{25}^3$ sont-elles σ-sesquilinéaires ?

$$\begin{aligned}
f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= x(x')^5 + 3z(y')^5 + 3y(z')^5. \\
f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= x^5(x')^5 + x^5(y')^5 + y^5(x')^5. \\
f_3\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) &= 3x(x')^5 + z(y')^5 + y(z')^5.
\end{aligned}$$

(c) Parmi les formes σ-sesquilinéaires précédentes, lesquelles sont équivalentes ?

[007736]

Exercice 7737

Soit E un $\mathbb{F}_{3^2}$ espace vectoriel. Soit $\sigma : \mathbb{F}_{3^2} \mapsto \mathbb{F}_{3^2}$ défini par $\sigma(x) = x^3$.

(a) Montrer que σ est un automorphisme de corps de $\mathbb{F}_{3^2}$ d'ordre 2.
Soit h une forme σ-hermitienne sur E.

(b) Montrer qu'il existe un élément $\xi \in \mathbb{F}_{3^2}$ tel que $\xi^2+1=0$ et $\mathbb{F}_{3^2}=\mathbb{F}_3[\xi]$.

(c) Montrer $\xi^3=-\xi$.
On définit les applications $\ell_i : \mathbb{F}_{3^2} \to \mathbb{F}_3$ pour $i=1,2$ par la condition

$$\forall x \in \mathbb{F}_{3^2}, x=\ell_1(x)+\ell_2(x)\xi.$$

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{F}_{3^2}$, $x+\sigma(x)=\ell_1(x)$ et $x-\sigma(x)=\xi\ell_2(x)$.
Soit W un sous-espace vectoriel de E. Soient $x,y \in W$.

(e) *(Polarisation)* Décrire $h(x,y)$ comme polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_{3^2}$ en les $(h(u,u))_{u\in W}$.

(f) En déduire que les sous-espaces totalement isotropes pour h sont exactement les sous-espaces vectoriels de E contenus dans le cône isotrope de h.

[007737]

Exercice 7738 Questions de cours

(a) L'ensemble des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ avec l'identité est-il un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_6$.

(b) Décrire les différentes possibilités pour la dimension de l'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$. Décrire les différentes possibilités pour la dimension de l'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^4$.

(c) Donner l'exemple de deux quintuplets de points deux à deux distincts d'une droite projective qui ne peuvent pas être l'image l'un de l'autre par une homographie.

Correction ▼ [007738]

Exercice 7739 Sylow des groupes diédraux

Soit $\mathscr{P}_n$ un polygone régulier à n côtés dans le plan euclidien orienté. On appelle groupe diédral D_n le groupe des isométries de $\mathscr{P}_n$.

(a) Rappeler sans démonstration la liste complète des éléments de D_n.

(b) Décrire un sous-groupe cyclique d'ordre n dans D_n.

(c) On écrit $n=2^k n'$ où n' est impair. En considérant un polygone régulier inscrit, décrire une application injective de D_{2^k} dans D_n. Faire une figure dans le cas $n=12$.

(d) Décrire pour chaque diviseur premier p de $2n$, un p-Sylow de D_n.

[007739]

Exercice 7740 Sylow des groupes diédraux

Soit $\mathscr{P}_n$ un polygone régulier à n côtés dans le plan euclidien orienté. On appelle groupe diédral D_n le groupe des isométries de $\mathscr{P}_n$.

(a) Parmi les translations, les rotations, les symétries orthogonales, et les symétries glissées, décrire des isométries du plan qui conservent le polygone régulier $\mathscr{P}_n$.

(b) Déterminer, à l'aide de l'action naturelle de D_n sur l'ensemble des sommets de $\mathscr{P}_n$, le cardinal de D_n. En déduire la liste complète des éléments de D_n.

(c) On suppose n impair. Déterminer les 2-Sylow de D_n et vérifier (sans référence au cours) qu'ils sont conjugués.

(d) On suppose $n=6$. Déterminer un 2-Sylow de D_6. Ce 2-Sylow est-il distingué ? Déterminer deux sous-groupes d'ordre 2 de D_6 non conjugués dans D_6. Donner un 3-Sylow de D_6.

Correction ▼ [007740]

Exercice 7741 Les groupes d'ordre 33

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.

Correction ▼ [007741]

11.1 314.00 - Géométrie projective

Exercice 7742 Une homographie

Soit 9 points $A,B,\ldots,I$ du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $ABED$, $BCFE$, $DEHG$ et $EFIH$ soient des carrés. Etant données les images $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $E'=h(E)$ et $D'=h(D)$ par une homographie de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points. [007742]

Exercice 7743

(a) Dessiner la configuration correspondante dans le plan affine $P(V)-(AM)$.

(b) Choisir des coordonnées homogènes telles que l'on ait $A=(1:0:0), B=(0:1:0), L=(0:0:1)$ et $C=(1:1:0)$. Déterminer les équations des droites projectives $(BL),(DM),(NA),(LE),(MP)$ et les coordonnées homogènes des points $N=(BL)\cap(DM), P=(NA)\cap(LE)$ et $F=(AB)\cap(MP)$ en termes des coordonnées homogènes des points D,E et M.

(c) Exprimer le birapport $[A,B,C,F]$ en termes de $x=[A,B,C,D]$ et $y=[A,B,C,E]$.

[007743]

Exercice 7744 Homographie plane

(a) Etant données les images $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $C'=h(C)$, et $D'=h(D)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points. On indiquera l'ordre dans lequel les constructions sont effectuées.

(b) Suffirait-il de connaître les images $A'=h(A)$, $B'=h(B)$ et $C'=h(C)$?

Correction ▼ [007744]

Exercice 7745

Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes.

(a) Montrer qu'on peut choisir $f\in GL(3,k)$ telle que $F=P(f)$ et f admet un plan de points fixes.

(b) Montrer alors qu'il existe un point O de P^2 (appelé centre de F) tel que pour tout point M de P^2 non fixé par F, la droite $(MF(M))$ passe par O.

(c) Soit d une droite et O un point hors de d. Soit A et A' deux points hors de d et $A\neq O$ et O,A,A' alignés. Montrer en choisissant un repère convenable qu'il existe une unique homographie F telle que d soit une droite de points fixes et O le centre et qui envoie A sur A'.

(d) Soit F une homographie du plan projectif P^2 qui admet une droite d de points fixes et de centre O. Sachant que $F(A)=A'$, construire l'image du point M par F dans les cas suivants.

FIGURE 1 –

FIGURE 2 – le point O est à l'infini

FIGURE 3 – le point 0 est à l'infini dans la direction de d

(e) Soit H une involution. On considère deux points P et Q tels que avec leur image P' et Q' ils forment un repère projectif (aucun triplet n'est formé de points alignés). On définit $O := (PP') \cap (QQ')$ et d la droite reliant $(PQ') \cap (QP')$ et $(PQ) \cap (P'Q')$. Montrer que H est l'homographie de droite fixe d de centre O qui envoie P sur P'.

Correction ▼ [007745]

Exercice 7746 Géométrie projective

Soit $\Delta = P(E)$ une droite projective. Soient $F = P(f)$ et $F' = P(f')$ deux homographies de Δ dans elle-même telles que $F^2 \neq Id_\Delta$, $F'^2 \neq Id_\Delta$ et qui possèdent chacune exactement deux points fixes distincts. On se propose de montrer que F et F' commutent si et seulement elles ont les mêmes points fixes. On note A et B les points fixes de F et on note A' et B' les points fixes de F'.

(a) On suppose que F et F' ont les mêmes points fixes. Comment traduire cette hypothèse à l'aide des applications linéaires associées f et f' ? Montrer que F et F' commutent (on pourra considérer un repère projectif de Δ).

Dans la suite de l'exercice, on montre l'implication réciproque : on suppose donc que F et F' commutent.

(b) Rappeler la démonstration du fait qu'une homographie d'une droite projective dans elle-même possédant trois points fixes deux à deux distincts est l'identité.

(c) En considérant l'image par $F \circ F'$ des points A, B, A', B' montrer que $\{F'(A), F'(B)\} = \{A, B\}$ et que $\{F(A'), F(B')\} = \{A', B'\}$.

(d) Supposons que $F(A') = A'$ et $F(B') = B'$, montrer que $\{A', B'\} = \{A, B\}$.

(e) Supposons que $F(A') = B'$ et $F(B') = A'$, montrer que $\{A', B'\} = \{A, B\}$, et en déduire que ce second cas ne peut pas se produire.

(f) Conclure.

Correction ▼ [007746]

Exercice 7747 Le plan $P(\mathbb{F}_2^3)$

(a) Déterminer le nombre de points et de droites du plan projectif $P(\mathbb{F}_2^3)$. Représenter les relations d'incidence.

(b) Déterminer le nombre de points de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_q}$ de dimension n sur le corps $\mathbb{F}_q$.

[007747]

Exercice 7748

On rappelle que le nombre de racine $n$ième de l'unité dans $\mathbb{F}_q$ est $pgcd(n, q-1)$. En considérant, le morphisme $SL(E) \to \mathscr{S}(P(E))$ associé à l'action de $SL(E)$ sur les droites de E, démontrer l'existence des isomorphismes suivants

— $GL(2, \mathbb{F}_2) = SL(2, \mathbb{F}_2) = PSL(2, \mathbb{F}_2) = PGL(2, \mathbb{F}_2) = \mathscr{S}_3$

— $PGL(2, \mathbb{F}_3) = \mathscr{S}_4$ et $PSL(2, \mathbb{F}_3) = \mathscr{A}_4$.

— $PGL(2, \mathbb{F}_4) = PSL(2, \mathbb{F}_4) = \mathscr{A}_5$.

[007748]

Exercice 7749

Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Pappus affine : *Soit d et d' deux droites d'un plan affine E. Soit A,B,C (resp. A',B',C') trois points sur d (resp. sur d'.) Si les droites (AB') et (BA') sont parallèles ainsi que les droites (BC') et (CB'), alors les droites (CA') et (AC') le sont aussi.*

Dans le cas où d et d' sont sécantes en I

(a) On considère l'homothétie h de centre I qui envoie A sur B. Déterminer l'image de B' par h.

(b) On considère l'homothétie H de centre I qui envoie B sur C. Déterminer l'image de C' par H.

(c) Déterminer l'image de A et celle de C' par $H \circ h$.

(d) Conclure.

Comment raisonner dans le cas où d et d' sont parallèles ? [007749]

Exercice 7750 Avec un repère projectif

Dans un plan projectif réel, on considère le repère projectif $(A,B,C;I)$. Soit A',B',C' respectivement sur $(BC),(CA)$ et (AB) tels que $(AA'),(BB')$ et (CC') soient concourantes en I. Montrer analytiquement que les points $P := (BC) \cap (B'C')$, $Q := (CA) \cap (C'A')$ et $R := (AB) \cap (A'B')$ sont alignés. [007750]

Exercice 7751

Soit $F = P(f)$ une homographie d'une droite projective dans elle-même. À quoi correspondent en terme de f les points fixes de F ? Montrer que si F admet trois points fixes deux à deux distincts, F est l'identité. [007751]

Exercice 7752 Perspective

Soit $\vec{V}$ un espace vectoriel et $P := P(\vec{V})$.

(a) Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P. Montrer qu'il existe un unique sous-espace projectif $< F,G >$ de P de dimension $\dim F + \dim G + 1$ contenant F et G.

(b) Soit F et G deux sous-espaces projectifs disjoints de P tels que $\dim F + \dim G = \dim P - 1$. Quel est le domaine de définition de l'application (appelée perspective) ?

$$\begin{array}{ccccc} P(\vec{V}) & \to & G & \subset & P(\vec{V}) \\ M & \mapsto & G\cap < M,F > & = & P(\vec{G} \cap (\vec{M} \oplus \vec{F})) \end{array}$$

Montrer que c'est une application projective.

[007752]

Exercice 7753 Quadrique

Soit $\vec{V}$ un espace vectoriel et q une forme quadratique sur $\vec{V}$. On appelle quadrique projective associée à q le sous ensemble de $P := P(\vec{V})$ défini par (p est la projection canonique $\vec{V} - \{0\} \to P$)

$$Q := p\left(\{x \in \vec{V} - \{0\} / q(x) = 0\}\right).$$

(a) On suppose $\dim P = 1$. Montrer que si Q contient trois points distincts, $Q = P$.

(b) On suppose $\dim P = 2$. Montrer que si Q contient une droite d, soit $Q = P$, soit il existe une droite d' telle que $Q = d \cup d'$.

(c) Soit d une droite de P. Montrer que si d rencontre Q en au moins trois points, d est incluse dans Q. Montrer que si $k = \mathbb{C}$ alors d rencontre Q.

[007753]

Exercice 7754 Coordonnées

(a) Soit $\vec{V}$ un espace vectoriel de dimension $n+1$ muni d'une base $\mathscr{B} := (\vec{v}_i)$ et (x_i) les coordonnées cartésiennes associées. Soit $\mathscr{R}$ le repère projectif associé de $P(\vec{V})$. Soit $\vec{v}$ un vecteur de $\vec{V}$. Déterminer un système de coordonnées homogènes dans $\mathscr{R}$ pour $vect(\vec{v})$ en fonction des coordonnées cartésiennes de $\vec{v}$ dans $\mathscr{B}$.

(b) Soit E un espace affine de dimension n et $\widehat{E}$ son complété vectoriel. On identifie E à un ouvert affine de $P(\widehat{E})$ par l'application naturelle $M \mapsto vect\,(((1,M)))$. Soit $\mathscr{A} := (A_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ un repère affine de E.

i. Considérons d'abord la base $\mathscr{B}_1 := (((1,A_i)))$ de $\widehat{E}$ et $\mathscr{R}_1$ le repère projectif associé. Déterminer un sytème de coordonnées homogènes dans $\mathscr{R}_1$ de $M \in E$ considéré dans $P(\widehat{E})$ en fonction de ses coordonnées barycentriques dans $\mathscr{A}$. Donner une équation de l'hyperplan à l'infini.

ii. Considérons maintenant la base $\mathscr{B}_2 := \left(((1,A_0)),((0,\vec{A_0A_i}))\right)$ de $\widehat{E}$ et $\mathscr{R}_2$ le repère projectif associé. Déterminer un sytème de coordonnées homogènes dans $\mathscr{R}_2$ de $M \in E$ considéré dans $P(\widehat{E})$ en fonction de ses coordonnées cartésiennes dans $\mathscr{A}$. Donner une équation de l'hyperplan à l'infini.

[007754]

Exercice 7755 Cas particulier d'un grand théorème

Soit E un plan affine muni d'un repère affine $\mathscr{A}' := (A_0,A_1,A_3)$ et $\mathscr{C}$ la conique d'équation cartésienne $x^2+y^2=1$. Soit $\mathscr{A} := (A_1,A_2=s_{A_0}(A_1),A_3)$ un nouveau repère affine de E.

(a) Déterminer une équation barycentrique homogène dans $\mathscr{A}$ de $\mathscr{C}$.

(b) Soit B_1,B_2,B_3 trois points de $\mathscr{C}$ distincts de A_1,A_2,A_3. Montrer à l'aide d'un calcul en coordonnées barycentriques que les points d'intersection $P=(A_1B_2)\cap(A_2B_1)$, $Q=(A_2B_3)\cap(A_3B_2)$ et $R=(A_3B_1)\cap(A_1B_3)$ sont alignés.

[007755]

Exercice 7756

(a) Soit 6 points $A,B,\dots,F$ du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $ABCDEF$ soit un hexagone régulier, Etant données les images $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $D'=h(D)$ et $E'=h(E)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, construire à la règle les images des autres points.

(b) Même question en supposant données cette fois, les images $A'=h(A)$, $B'=h(B)$, $C'=h(C)$ et $D'=h(D)$.

Correction ▼ [007756]

Exercice 7757

(a) Soit d et d' deux droites du plan projectif $P^2(\mathbb{R})$ et O un point hors de $d\cup d'$ (figure 1). Construire l'axe de la projection de d sur d' depuis O.

(b) Deux droites se coupent en dehors de la feuille en un point I. Soit A un point de la feuille. Construire la droite (AI). (voir figure 2)

[007757]

11.2 320.00 Groupes

Exercice 7758

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E. On suppose que l'ordre de G est 15, que le cardinal de E est 17 et que E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles. [007758]

Exercice 7759 Des petites questions

On considère l'action d'un groupe G sur un ensemble E.

(a) Montrer qu'un sous-ensemble de E est globalement stable par G si et seulement s'il est réunion d'orbites.

(b) Montrer que deux éléments dans la même orbite ont des stabilisateurs conjugués.

(c) Montrer que deux éléments conjugués dans le groupe G fixent le même nombre d'éléments.

[007759]

Exercice 7760 Le théorème de Cayley

(a) Pour tout élément a d'un groupe fini G d'ordre n, on définit l'application

$$\begin{array}{cccc} l_a & : & G & \to & G \\ & & g & \mapsto & ag \end{array}$$

Montrer que l_a est une bijection de G, produit de $\frac{n}{ordre(a)}$ cycles à support disjoints tous de longueur $ordre(a)$.

(b) Montrer alors que l'application

$$\begin{array}{cccc} l & : & G & \to & \S(G) \\ & & a & \mapsto & l_a \end{array}$$

est un morphisme de groupes, injectif. Tout groupe fini est donc isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations de ses éléments.

[007760]

Exercice 7761

(a) Soit p un nombre premier. Montrer que le centre d'un p-groupe G,(i.e. un groupe fini d'ordre une puissance non nulle de p), n'est pas réduit à l'élément neutre.

(b) Montrer que si le quotient d'un groupe par son centre est cyclique alors le groupe est abélien, donc égal à son centre.

(c) Montrer qu'un groupe d'ordre p^2 est abélien.

(d) Montrer que le centre d'un groupe non abélien d'ordre p^3 est d'ordre p. En déduire que le nombre de classes de conjugaison est p^2+p-1. (On pourra étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison : ses points fixes, l'orbite des éléments, le stabilisateur des éléments...)

[007761]

Exercice 7762

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p>1$.

(a) Montrer que les orbites de l'action de H sur G/H (l'ensemble quotient G/H des classes à gauche de G modulo H) par translation à gauche sont réduites à des points.

(b) Montrer que H est distingué.

[007762]

Exercice 7763

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. [007763]

Exercice 7764

(a) Montrer qu'un groupe d'ordre p^3q (avec p premier et q premier avec p) admet un sous-groupe d'ordre p, un d'ordre p^2 et un d'ordre p^3.

(b) Donner la liste des éléments du groupe alterné $\mathscr{A}_4$. Soit H un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathscr{A}_4$ et σ un élément de $\mathscr{A}_4$ qui n'est pas dans H. Montrer que le sous-groupe engendré par H et σ est le groupe $\mathscr{A}_4$. En déduire que $\mathscr{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6.

[007764]

Exercice 7765 Décompositions explicites

(a) On considère l'élément de $\mathscr{S}_8$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Décomposer σ en un produit de transpositions et calculer sa signature. Peut-on écrire σ comme produit de douze transpositions ?

(b) Soit σ l'élément de $\mathscr{S}_{11}$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 10 & 7 & 9 & 11 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoints. Préciser l'ordre de σ, et la signature de σ. Calculer σ^2 et σ^3. Écrire σ^{-1} en un produit de cycles à support disjoints.

[007765]

Exercice 7766

(a) Si c est le cycle $(1,2,3,4,5,6)$, c^2 est-il un cycle ?

(b) Si c est un cycle de $\mathscr{S}_n$ d'ordre l et k un entier naturel, calculer l'ordre de c^k.

[007766]

Exercice 7767 Étude de $\mathscr{S}_3$

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathscr{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathscr{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathscr{S}_3$.
Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathscr{S}_3$. [007767]

Exercice 7768 Étude de $\mathscr{S}_4$

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathscr{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_4$ (utiliser l'exercice sur les classes de conjugaison). En déduire que A_4 n'est pas un groupe simple, i.e. qu'il possède des sous-groupes distingués autres que $\{e\}$ et A_4.
Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathscr{S}_4$. [007768]

Exercice 7769

On appelle groupe dihédral D_{2n} le groupe des isométries d'un polygone régulier à n côtés.

(a) Déterminer (par exemple à l'aide d'une action de groupe) le cardinal puis la liste des éléments de D_{2n}.

(b) On suppose n impair. Déterminer les 2-Sylow de D_n et vérifier qu'ils sont conjugués.

(c) On suppose $n = 6$. Déterminer un 2-Sylow de D_6. Déterminer deux sous-groupes d'ordre 2 de D_6 non conjugués dans D_6.

[007769]

Exercice 7770

Soit G le sous-groupe de $\mathscr{S}_7$ engendré par $\alpha = (2,4,6)(5,7,1)$ et $\beta = (3,4)(5,6)$. On se propose de déterminer l'ordre de G. On considère pour cela les ensembles suivants :

$$G_1 = \{\varphi \in G \mid \varphi(1) = 1\} \qquad G_2 = \{\varphi \in G_1 \mid \varphi(2) = 2\} \qquad G_3 = \{\varphi \in G_2 \mid \varphi(3) = 3\}$$

$$X_1 = \{\varphi(1) \mid \varphi \in G\} \qquad X_2 = \{\varphi(2) \mid \varphi \in G_1\} \qquad X_3 = \{\varphi(3) \mid \varphi \in G_2\}.$$

Étant donné un ensemble Y, on note $|Y|$ le cardinal de Y.

(a) Montrer que 6 divise $\mid G \mid$.

(b) Quelle relation existe-t-il entre $|G|$ et $|X_1|\ |X_2|\ |X_3|\ |G_3|$?

(c) Expliciter X_1.

(d) Expliciter $\gamma = \alpha\beta\alpha^{-1}$ et $\delta = \gamma\beta\gamma^{-1}$. En déduire $X_3 = \{3,4,5,6\}$ ou $X_3 = \{3,4,5,6,7\}$ et $X_2 = \{2,7\}$ ou $X_2 = \{2,3,4,5,6,7\}$.

(e) On fait agir G sur l'ensemble des parties de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Déterminer l'orbite de la partie $\{1,2,7\}$. En déduire que 7 est fixé par les éléments de G_2 et que G_3 est réduit à l'identité.

(f) En déduire $|G|$.

[007770]

Exercice 7771

Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Soit E_1 et E_2 deux parties non vides et disjointes de E. Soit g_+ et g_- deux éléments de G tels que toute puissance (positive ou négative) de g_+ envoie tout élément de E_1 dans E_2 et toute puissance g_- envoie tout élément de E_2 dans E_1.

(a) Montrer que les mots de la forme $g_+^{k_1} g_-^{l_1} g_+^{k_2} g_-^{l_2} \cdots g_+^{k_d} g_-^{l_d} g_+^{k_{d+1}}$ ne sont pas égaux à l'élément neutre e_G.

(b) En déduire en utilisant une conjugaison qu'aucun mot du groupe engendré par g_+ et g_- autre que le mot vide n'est égal à l'élément neutre. On dit alors que le groupe engendré par g_+ et g_- est un groupe libre.

(c) Que dire si on suppose seulement que E_1 n'est pas inclus dans E_2 ?

(d) Montrer le sous groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est libre, en considérant l'action naturelle sur $\mathbb{R}^2$ et les domaines $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| < |y|\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| > |y|\}$ délimités par les diagonales.

[007771]

Exercice 7772 Sous-groupes finis de $GL_n(\mathbb{Z})$

Si p et q sont deux entiers naturels, on note $p \wedge q$ le plus grand commun diviseur de p et q, on note également $p|q$ si p divise q. Si m est un entier supérieur ou égal à 1, on note $\Phi_m(X)$ le polynôme cyclotomique d'ordre m,

$$\Phi_m(X) = \Pi_{\{k\in\{1,..,m\}/k\wedge m=1\}}(X - e^{2ik\pi/m}).$$

On rappelle que $\Phi_m(X)$ est un polynôme unitaire à coefficients entiers, irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Le degré de $\Phi_m(X)$ est $\varphi(m)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. On rappelle enfin que $X^m - 1 = \Pi_{d|m}\Phi_d(X)$.

(a) Soit $M \in GL_2(\mathbb{Z})$, d'ordre fini m.
— Montrer que si z est une racine complexe du polynôme caractéristique $\chi_M(X)$ alors z est racine du polynôme $X^m - 1$.
— Montrer, en résolvant l'équation $\phi(k) = 1$, qu'il y a exactement deux polynômes cyclotomiques de degré un.
— Montrer de même qu'il y a exactement trois polynômes cyclotomiques de degré deux dont on donnera les expressions développées.
— En déduire que le polynôme $\chi_M(X)$ appartient à l'ensemble $\{X^2+X+1, X^2+1, X^2-X+1, X^2-1, (X-1)^2, (X+1)^2\}$.
— En déduire que $m \in \{1,2,3,4,6\}$.
— Donner une matrice compagnon de $GL_2(\mathbb{Z})$ d'ordre 6.

(b) Soit p un nombre premier, $p \geqslant 3$. On note $\mathbb{F}_p$ un corps de cardinal p. On rappelle que la surjection naturelle $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ induit un morphisme de groupes $R_p\ :\ GL_n(Z) \to GL_n(\mathbb{F}_p)$.
Soit $M \in GL_n(\mathbb{Z})$ d'ordre $m \geqslant 2$ et dans le noyau de R_p. On suppose que M n'est pas l'identité. La matrice M peut donc s'écrire $M = I_n + p^r N$ avec $r \in \mathbb{N}^\star$ et $N \in M_n(\mathbb{Z}) - pM_n(\mathbb{Z})$.
— Montrer que $mp^rN \in p^{2r}M_n(\mathbb{Z})$. En déduire que p divise m. On pose alors $m = pm'$ et $M' = M^p$.
— Montrer que p divise m'.
— En déduire une contradiction.

(c) Soit G un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$.

(d) Soit G un sous-groupe fini de $GL_2(\mathbb{Z})$.
— Montrer que le cardinal de G est un diviseur de 48.
— Montrer que le cardinal de G ne peut pas être égal à 48. (On pourra, éventuellement, étudier $\Phi_8(X)$ considéré comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}_3$.)

[007772]

Exercice 7773 Classification des groupes d'ordre 8

Soit G un groupe d'ordre 8.

(a) Enumérer quatre groupes d'ordre 8, deux à deux non isomorphes, et même 5 si possible.

(b) On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien. Soit a et b deux éléments non neutres distincts de G. Montrer que $\{e,a,b,ab\}$ est un sous-groupe d'ordre 4 de G. Déterminer un isomorphisme de G avec un groupe connu.

(c) On suppose que G admet un élément a d'ordre 4. Soit b un élément hors du sous-groupe engendré par a. Montrer que $< a >$ est distingué et que b^2 appartient à $< a >$.
  i. Quel est l'ordre de b si $b^2 = a$ ou si $b^2 = a^3$? Conclure dans ce cas.
  ii. Si $b^2 = e$, montrer que G est un produit semi-direct et en déduire un isomorphisme avec un groupe connu.
  iii. Si tous les éléments hors de $< a >$ ont un carré égal à a^2, établir la liste des éléments et la table de multiplication de G à l'aide seulement de a et b.

[007773]

11.3 320.00 - Groupes abéliens

Exercice 7774 Théorème de Sylow pour les groupes abéliens finis

Soit $G = \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ un groupe fini. On note α_i l'ordre de l'élément a_i. Soit p un diviseur premier de $\mid G \mid$ l'ordre de G.

(a) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f\ : & \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\alpha_2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\alpha_n\mathbb{Z} & \to & G \\ & (\overline{h_1}, \overline{h_2}, \cdots, \overline{h_n}) & \mapsto & a_1^{h_1} a_2^{h_2} \cdots a_n^{h_n} \end{array}$$

est une application bien définie. Démontrer que c'est un homomorphisme de groupes puis qu'il est surjectif.

(b) En déduire que p divise $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$.

(c) Montrer qu'il y a dans G un élément d'ordre p.

(d) En raisonnant par récurrence sur l'ordre du groupe et en considérant l'ensemble $G/ < x >$ où x est un élément d'ordre p dans G, montrer que G admet un p-Sylow.

(e) Montrer qu'un groupe abélien est simple si et seulement s'il est cyclique, d'ordre un nombre premier.

[007774]

Exercice 7775

(a) Soit G un groupe, a et b deux éléments d'ordre fini qui commutent. On suppose que les sous-groupes engendrés $< a >$ et $< b >$ ont une intersection réduite au singleton élément neutre $\{e\}$.

(b) Montrer qu'une égalité $(ab)^m = e$ implique $a^m = e$ et $b^m = e$.

(c) Calculer l'ordre de ab.

(d) Montrer que si deux éléments d'un groupe ont des ordres premiers entre eux, l'intersection des sous-groupes qu'ils engendrent est réduite au singleton élément neutre.

(e) Montrer que tout groupe abélien d'ordre 77 est cyclique.

[007775]

11.4 321.00 - Sous-groupes distingués

Exercice 7776

(a) Soit $f : \mathscr{S}_n \to A$ un homomorphisme de groupes de $\mathscr{S}_n$ vers un groupe abélien. Démontrer que les transpositions ont toutes même image. Démontrer que si $A = \{1, -1\}$ $f = signature$ ou $f =$ application constante1.

(b) Soit G d'indice 2 dans $\mathscr{S}_n$. Démontrer que G est distingué (reprendre la méthode de la feuille 1) puis que $G = \mathscr{A}_n$.

[007776]

Exercice 7777 Les sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_n$

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_n$ (pour $n \geqslant 5$).

(a) Soit H un sous-groupe distingué de $\mathscr{S}_n$. Montrer que $H \cap \mathscr{A}_n$ est un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_n$. En déduire que H contient $\mathscr{A}_n$ ou que $H \cap \mathscr{A}_n = \{id\}$?

(b) On suppose que $H \cap \mathscr{A}_n = \{id\}$. Montrer que la restriction à H du morphisme signature est injective. Montrer que dans ce cas que tous les éléments de H sont dans le centre de $\mathscr{S}_n$ et en déduire que $H = \{id\}$.

(c) On suppose que H contient $\mathscr{A}_n$. Montrer alors que $H = \mathscr{S}_n$ ou $H = \mathscr{A}_n$ suivant l'indice de H dans $\mathscr{S}_n$.

(d) Conclure : si $n \geqslant 5$, les seuls sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_n$ sont $\{id\}$, $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$..

[007777]

11.5 320.00 - Résolubilité

Exercice 7778 Groupe triangulaire supérieur

(a) Montrez que le groupe de Heisenberg H des matrices $3*3$ triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est résoluble.

(b) Montrez que le groupe B des matrices triangulaires supérieures $3*3$ inversibles (coefficients diagonaux non nuls) est résoluble.

[007778]

Exercice 7779

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathscr{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

(a) Montrer que $D(\mathscr{S}_4) \subset \mathscr{A}_4$.

(b) Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.

(c) Montrer que $D(\mathscr{S}_4) = A_4$.

(d) Montrer que $V_4 \subset D(\mathscr{A}_4)$.

(e) Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathscr{A}_4$ et que le quotient $\mathscr{A}_4/V_4$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathscr{A}_4) \subset V_4$.

(f) En déduire $D^2(\mathscr{S}_4)$.

(g) Calculer les autres groupes dérivés de $\mathscr{S}_4$.

[007779]

Exercice 7780 Groupe dérivé de $GL(3,\mathbb{F}_2)$ et de $SL(3,\mathbb{F}_2)$

(a) Soit

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que le commutateur $tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(b) Rappeler la démonstration du fait que deux transvections de $SL(3,\mathbb{F}_2)$ sont conjuguées dans $SL(3,\mathbb{F}_2)$.

(c) Déterminer $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$

(d) Déterminer $D(GL(3,\mathbb{F}_2))$.

[007780]

Exercice 7781 Groupe dérivé de $GL(2,k)$

On travaille dans $GL(2,k)$ pour un corps k qui a au moins 4 éléments. Soit $g \in GL(2,k)$. On notera i_g l'automorphisme intérieur donné par g.

(a) Démontrer qu'il existe un scalaire non nul $a \in k$ tel que $a^2 \neq 1$. Que se passe-t-il dans $\mathbb{F}_2$ et dans $\mathbb{F}_3$?

(b) Soit

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que $T = tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(c) Soit τ une transvection de $SL(2,k)$. Il existe $g \in GL(2,k)$ tel que $\tau = i_g(T) := gTg^{-1}$. Calculer τ à l'aide de g, s et t et montrer que $D(SL(2,k))$ contient toutes les transvections.

(d) Déterminer $D(SL(2,k))$.

(e) Déterminer $D(GL(2,k))$.

[007781]

Exercice 7782 Groupe dérivé de $GL(2,\mathbb{F}_3)$

On travaille dans $GL(2,\mathbb{F}_3)$.

(a) Soit

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $tst^{-1}s^{-1}$.

(b) Déterminer $D(GL(2,k))$. Noter que ce calcul ne suffit pas pour déterminer $D(SL(2,k))$.

[007782]

11.6 320.00 - Simplicité

Exercice 7783

Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple. [007783]

Exercice 7784 Simplicité de $\mathscr{A}_5$

(a) Faire la liste des classes de conjugaison de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathscr{A}_n$ en les dénombrant.

(b) Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$.

(c) Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$.

(d) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathscr{A}_n$ qui contient un élément d'ordre 5 les contient tous. (On remarquera que le groupe engendré par un élément d'ordre 5 est un Sylow.)

(e) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathscr{A}_n$ non réduit à $\{id\}$ contient au moins deux types d'éléments en plus de l'identité. Montrer alors que $H = \mathscr{A}_n$.

[007784]

11.7 323.00 - Anneaux d'invariants

Exercice 7785

On considère l'action du groupe $G := \{-1,+1\}$ sur l'algèbre des polynômes $k[X,Y]$ par $(-1)\cdot X = -X$ et $(-1)\cdot Y = -Y$. Déterminer l'algèbre des polynômes invariants. Est-ce un anneau factoriel ? Est-il une algèbre de polynômes ? [007785]

Exercice 7786 Groupe finis résolubles

(a) On rappelle que le centre d'un p-groupe n'est jamais réduit à $\{e\}$. Montrer par récurrence qu'un p-groupe est toujours résoluble.

(b) Soient p,q deux nombres premiers distincts. Montrer qu'un groupe de cardinal pq est toujours résoluble. (Supposer $p > q$ et considérer un p-Sylow)

(c) Soit G un groupe d'ordre 12. Montrez que G est résoluble (En supposant les 3-Sylow non distingués, comptez le nombre d'éléments d'ordre 3).

(d) Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrez qu'un groupe de cardinal p^2q est toujours résoluble.

[007786]

Exercice 7787 Les sous-groupes distingués de $GL(E)$

Le but de l'exercice est de déterminer les sous-groupes distingués de $SL(E)$. On supposera que le corps k est de caractéristique nulle ou que sa caractéristique est différente de 2 et première avec la dimension n de E. On supposera aussi $n \geqslant 3$.

(a) Donner l'exemple d'un sous-groupe non distingué de $SL(E)$.

(b) Soit $\phi\ : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes. Montrer que l'image par ϕ d'un sous-groupe distingué de G est un sous-groupe distingué de H.

(c) Soit H un sous-groupe de $SL(E)$. Déterminer les possibilités pour son image dans $PSL(E)$ pour la projection canonique.

(d) Montrer que tout sous-groupe du centre de $SL(E)$ est distingué dans $SL(E)$.

(e) On supposera désormais que H n'est pas un sous-groupe du centre de $SL(E)$. Soit τ une transvection. Montrer que τ^n est une transvection de H.

(f) Montrer que H contient toutes les transvections de E.

(g) Conclure.

[007787]

12 328.00 - Formes bilinéaires

Exercice 7788 Formes très dégénérées

Déterminer toutes les formes sesquilinéaires symétriques, anti-symétriques et hermitiennes f sur un espace E avec $dimE = dimKerf + 1$. [007788]

Exercice 7789 Isotropes

(a) Montrer que si un sous-espace d'un espace non-singulier (E, f) est totalement isotrope, il est de dimension inférieure à $\dim E/2$.

(b) Déterminer des vecteurs isotropes et un sous-espace totalement isotrope maximal pour les formes non dégénérées suivantes (données par leur forme quadratique). Dans chaque cas, on donnera l'indice, c'est à dire la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

   i. $k = \mathbb{R} : q = x^2+y^2, x^2-y^2, x^2+y^2-z^2, x^2+y^2+z^2-t^2, x^2+y^2-z^2-t^2$.

   ii. $k = \mathbb{C} : q = x^2+y^2, x^2+y^2+z^2$.

[007789]

Exercice 7790

(a) Déterminer si possible un plan totalement isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{C}^4$.

$$P(x,y,z,t) = xy+zt \text{ et } Q(x,y,z) = x^2+y^2+z^2+t^2.$$

(b) L'entier -3 est-il un carré modulo 7 ?

(c) Déterminer si possible un vecteur non-nul isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^4$.

$$R(x,y,z,t) = xy + zt \text{ et } S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

[007790]

12.1 328.00 - Décomposition et classification

Exercice 7791

Donner l'exemple de deux formes bilinéaires avec même rang, même indice et même discriminant mais non-équivalentes.

[007791]

Exercice 7792

Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$ sont-elles équivalentes ?

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2 \text{ et } Q(x,y,z) = xy + 3z^2.$$

[007792]

Exercice 7793

(a) Quels sont les sous-espace propres de la matrice J de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 ?

(b) Diagonaliser dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Discuter son rang et sa signature.

$$f(x,y) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

[007793]

Exercice 7794 En caractéristique 2

Soit g la forme bilinéaire symétrique sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que g est non dégénérée. Peut-on compléter e_1 en une base orthogonale ? [007794]

Exercice 7795 Espace de matrices

Soit $E := M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la signature des formes quadratiques

(a) $q_1(A) = trace(A^2)$. On cherchera des “grands” sous-espaces où q_1 est définie positive ou définie négative.

(b) $q_2(A) = trace(A^2) - (traceA)^2$.

[007795]

12.2 328.00 - Théorème de Witt

Exercice 7796

Soit $(E,q(xe_1+ye_2)=2xy)$ un plan hyperbolique orienté. Peut-on prolonger l'application u définie sur $vect(e_1)$ par $u(e_1)=e_2$ en une isométrie de E ? En une isométrie directe de E ? [007796]

Exercice 7797

Démontrer le théorème de Witt dans le cas particulier suivant :

Soit E et E' deux espaces symplectiques non-singuliers de dimension 4. Soit $d \subset E$ et $d' \subset E'$ deux droites et f une application linéaire bijective de d sur d'. Montrer qu'il existe une isométrie de E sur E' qui prolonge f. [007797]

Exercice 7798 Action des groupes orthogonaux

Soit $E=\mathbb{R}^2$ muni de la forme quadratique $q(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$ non dégénérée de signature $(1,1)$. Le groupe $O(1,1)$ est par définition le groupe des isométries de (E,q).

(a) Le groupe $O(1,1)$ agit-il transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$?

(b) Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée. Montrer que si q a la même signature en restriction à F et à F' alors F et F' sont dans la même orbite sous l'action de $O(q)$.

(c) Décrire les orbites de l'action de $O(2,1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$.

[007798]

12.3 314.00 - Géométrie projective

Exercice 7799 Droites et quadriques

Une quadrique d'un espace projectif $P(V)$ est le lieu des zéros d'une forme quadratique f sur V.

(a) Montrer que toute quadrique qui contient trois points distincts d'une droite d contient toute la droite d.

(b) Déterminer la dimension de l'espace des quadriques de $P^3(K)$.

(c) Soit d_1,d_2,d_3 trois droites de $P^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

[007799]

Exercice 7800 Polarité

Soit $\mathscr{Q}$ une quadrique de $P(E)$ (muni d'un repère projectif) d'équation $q(x)=0$ où q est la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée f sur un espace vectoriel E. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux sous-espaces orthogonaux dans E, on note $P(\vec{A}) \perp P(\vec{B})$. On appelle hyperplan polaire d'un point $A=P(\vec{A})$ de $P(E)$ l'hyperplan projectif $A^\perp := P(\vec{A}^\perp)$.

(a) On munit de plan projectif d'un repère. Déterminer une équation de la droite polaire du point $M(x_0,y_0,1)$ par rapport à la quadrique d'équation $x^2+y^2-z^2=0$. La représenter dans l'espace affine d'équation $z\neq 0$.

(b) Soit F un sous-espace non-isotrope de E. Soit A et B deux points de $P(F)$. Montrer si $A\perp B$ pour f alors $A\perp B$ pour $f_{|F}$.

(c) Soit $\mathscr{Q}$ une quadrique de $P^1(K)$ dont l'image est composée des deux points A et B. Montrer en utilisant un bon repère que pour tout M in $P^1(K)$,

$$M\perp N \iff M \text{ et } N \text{ sont conjugués harmoniques par rapport à } M \text{ et } N.$$

(d) En déduire une construction géométrique de la polaire d'un point par rapport à une conique.

[007800]

12.4 313.00 - Groupes orthogonaux, unitaires et symplectiques

Exercice 7801

Montrer sans calcul que la matrice suivante A à coefficients complexes est inversible

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}$$

[007801]

Exercice 7802

Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un vecteur de norme 1 sous l'action du groupe orthogonal du produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que groupe $O(n-1)$ est isomorphe à un sous-groupe O_{n-1} de $O(n)$. Ce sous-groupe est-il distingué ? [007802]

Exercice 7803 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit H un espace hermitien et a un endomorphisme inversible de H. Montrer que a s'écrit de façon unique sous la forme $a = hu$ où h est un endomorphisme auto-adjoint positif et u unitaire. Déterminer h et u pour l'endomorphisme a dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. [007803]

Exercice 7804 Involutions

Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E.

(a) Soit $u \in GL(E)$ une involution. Montrer que u est orthogonale si et seulement si $E_+(u) = E_+ := Ker(u-Id)$ et $E_- := Ker(u+Id)$ sont orthogonaux. Montrer alors que $(E_+)^\perp = E_-$ et que E_+ n'est pas isotrope.

(b) Soit $F \subset E$ un sous-espace non isotrope. Montrer qu'il existe une unique involution orthogonale telle que $E_+(u) = F$.

(c) Montrer que $O(f) \equiv SO(f) \ltimes \{-1, 1\}$.

[007804]

Exercice 7805 Dilatations

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée. Déterminer les dilatations orthogonales (resp. unitaires. resp. symplectiques. [007805]

Exercice 7806

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et ϕ une forme sesquilinéaire non dégénérée sur E symétrique, hermitienne ou alternée. Soit τ une transvection de E donnée à l'aide d'une forme linéaire non nulle f sur E et un vecteur a de $Kerf$ par $\forall x \in E, \tau(x) = x + f(x)a$.

(a) On suppose désormais que τ est une isométrie relativement à ϕ. Montrer que a est isotrope.

(b) Montrer que f et $\phi(\cdot, a)$ sont proportionnelles. On notera $\lambda \in k^\star$ tel que $f = \lambda\phi(\cdot, a)$.

(c) Montrer que si $\sigma \neq Id$ et ϕ est hermitienne ou symétrique, alors $\lambda + \sigma(\lambda) = 0$.

(d) Montrer qu'il n'existe pas de transvections orthogonales, qu'il existe des transvections unitaires si et seulement si l'indice est plus grand que 1 et qu'il existe toujours des transvections symplectiques.

[007806]

Exercice 7807 Sur les similitudes

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée symétrique (resp. hermitienne, alternée) sur un K-espace vectoriel E. On note $GO(f)$ (resp. $GU(f)$, $GSp(f)$) le groupe des similitudes de f. On note μ l'application qui à une similitude associe son multiplicateur dans $K^\star$.

(a) Déterminer les similitudes de la forme symplectique standard sur K^2.

(b) Montrer que u est une similitude si et seulement si elle conserve l'orthogonalité.

(c) On suppose f symétrique. Montrer que $Im(\mu) = \{\lambda \in K^\star / q \equiv \lambda q\} \supset (K^\star)^2$.

[007807]

Exercice 7808 Etude du groupe orthogonal $O(1,1)$

(a) Montrer que dans un plan d'Artin il y a exactement deux droites isotropes I et J.

(b) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u envoie $I \cup J$ sur lui-même.

(c) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u est directe si et seulement si u laisse fixes chaque droite isotrope.

(d) En déduire la forme des éléments de $O(1,1)$.

[007808]

Exercice 7809

On considère la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x^t\, y' - y^t\, x'$$

où x, y, x', y' sont dans $\mathbb{R}^n$.

(a) En décomposant par bloc $n \times n$ une matrice quelconque g de $M_{2n}(\mathbb{R})$ sous la forme $\begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix}$, caractériser les matrices symplectiques en termes de systèmes d'équation pour A, B, C, D.

(b) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant de plus $B = C = 0$.

(c) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $A = D = I_n$ et $C = 0$.

(d) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $C = 0$.

(e) Déterminer toutes les matrices Q de $M_n(\mathbb{R})$ telles que l'espace $W_Q := \left\{ \begin{pmatrix} Qy \\ y \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R}^n \right\}$ soit totalement isotrope. Quel est le lien avec les questions précédentes ?

[007809]

12.5 328.00 - Formes sesquilinéaires

Exercice 7810

Diagonaliser dans une base orthonormée pour le produit scalaire standard, la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} x_i y_j + x_j y_i.$$

Discuter son rang et sa signature. [007810]

Exercice 7811

On considère dans $\mathbb{C}^4$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -i & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1-i & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -i \end{bmatrix}$$

Montrer sans calcul que A est inversible ? [007811]

Exercice 7812 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit H un espace hermitien et a un endomorphisme de H.

(a) Montrer que $b = aa^*$ est un endomorphisme auto-adjoint positif.

(b) Montrer en utilisant une diagonalisation qu'il existe un unique endomorphisme auto-adjoint positif c de H tel que $c^2 = b$.

(c) On suppose désormais que a est inversible. Montrer que a s'écrit de façon unique sous la forme $a = hu$ où h est un endomorphisme auto-adjoint positif et u un endomorphisme unitaire.

(d) Déterminer h et u pour l'endomorphisme a dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$$

[007812]

Exercice 7813 Isotropes

Déterminer l'ensemble des vecteurs isotropes et les sous-espaces totalement isotropes maximaux pour les formes non dégénérées suivantes. Dans chaque cas, on donnera l'indice, c'est à dire la dimension des sous-espaces totalement isotropes maximaux.

(a) $k = \mathbb{R} : q = x^2+y^2, x^2-y^2, x^2+y^2-z^2, x^2+y^2+z^2-t^2, x^2+y^2-z^2-t^2$.

(b) $k = \mathbb{C} : q = x^2+y^2, x^2+y^2+z^2$.

[007813]

Exercice 7814 Formes très dégénérées

Déterminer toutes les formes sesquilinéaires réflexives f sur un espace E avec $dimE = dimKerf + 1$.
[007814]

Exercice 7815 En caractéristique 2

Soit g la forme bilinéaire symétrique sur $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que g est non dégénérée. Peut-on compléter e_1 en une base orthogonale ? [007815]

Exercice 7816 Involutions

Soit f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel E.

(a) Soit $u \in GL(E)$ une involution. Montrer que u est orthogonale si et seulement si $E_+(u) = E_+ := Ker(u-Id)$ et $E_- := Ker(u+Id)$ sont orthogonaux. Montrer alors que $(E_+)^\perp = E_-$ et que E_+ n'est pas isotrope.

(b) Soit $F \subset E$ un sous-espace non isotrope. Montrer qu'il existe une unique involution orthogonale telle que $E_+(u) = F$.

(c) Montrer que $O(f) \equiv SO(f) \rtimes \{-1,1\}$.

[007816]

Exercice 7817 Dilatations

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée. Déterminer les dilatations

(a) orthogonales.

(b) unitaires.

(c) symplectiques.

[007817]

Exercice 7818

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit E un k-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et ϕ une forme sesquilinéaire non dégénérée sur E symétrique, hermitienne ou alternée. Soit τ une transformation de E donnée à l'aide d'une forme linéaire non nulle f sur E et un vecteur a de $Ker f$ par $\forall x \in E, \tau(x) = x + f(x)a$.

(a) Déterminer la nature de τ.

(b) On suppose désormais que τ est une isométrie relativement à ϕ. Montrer que a est isotrope.

(c) Montrer que f et $\phi(\cdot, a)$ sont proportionnelles. On notera $\lambda \in k^\star$ tel que $f = \lambda\phi(\cdot, a)$.

(d) Montrer que si $\sigma \neq Id$ et ϕ est hermitienne ou symétrique, alors $\lambda + \sigma(\lambda) = 0$.

(e) Montrer qu'il n'existe pas de transvections orthogonales, qu'il existe des transvections unitaires si et seulement si l'indice est plus grand que 1 et qu'il existe toujours des transvections symplectiques.

[007818]

Exercice 7819 Espace de matrices

Soit $E := M_n(\mathbb{R})$. Déterminer la signature des formes quadratiques

(a) $q_1(A) = trace(A^2)$.

(b) $q_2(A) = trace(A^2) - (traceA)^2$.

[007819]

Exercice 7820 Produit de formes linéaires

(a) Montrer que le polynôme quadratique à coefficients complexes avec $a \neq 0$

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

est le produit de deux polynômes linéaires si et seulement si

$$aa' - b''^2 = aa'' - b'^2 = ab - b'b'' = 0.$$

(b) L'analogue à coefficients réels est-il vrai ?

[007820]

Exercice 7821 Espace d'Artin

On appelle espace d'Artin (ou espace hyperbolique) tout espace vectoriel E muni d'une forme quadratique q équivalente à

$$x = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2p} \qquad q(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}.$$

(a) Montrer que sur $\mathbb{C}^{2p}$, toute forme quadratique non dégénérée définit un espace d'Artin. Caractériser à l'aide de la signature les espaces d'Artin sur $\mathbb{R}^{2p}$. Les caractériser à l'aide de l'indice en supposant la forme non dégénérée.

(b) Montrer que tout espace d'Artin est somme directe orthogonale de plans d'Artin orthogonaux.

(c) Soit (E,q) quelconque, x un vecteur isotrope mais pas dans le noyau de q. Montrer qu'il existe un plan P qui contient x et tel que $(P,q_{|P})$ soit un plan d'Artin.

[007821]

Exercice 7822 Complété non singulier

Soit (E,q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée q. Un sous-espace vectoriel F de E est dit isotrope (ou singulier) si $F^{\perp}\cap F \neq \{0\}$.

Vérifier que si F et G sont deux sous-espaces orthogonaux avec G non isotropes alors la somme $F+G$ est directe.

Soit F un sous espace singulier de E. On note s la dimension de $F^{\perp}\cap F$, G un supplémentaire de $F^{\perp}\cap F$ dans F et $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant s}$ une base de $F^{\perp}\cap F$.

(a) Montrer que G n'est pas isotrope.

(b) Montrer que $G^{\perp}$ contient strictement $F^{\perp}$.

(c) On suppose que $s=1$. Montrer qu'il existe un plan d'Artin P_1 contenant x_1 et tel que $G\oplus^{\perp} P_1$ soit non singulier.

(d) Montrer qu'il existe des plans d'Artin $(P_i,q_{|P_i})$ contenant x_i et tels que $\widehat{F} := G\oplus^{\perp} P_1\oplus^{\perp} P_2\cdots\oplus^{\perp} P_s$ soit non singulier. (On pourra considérer $G' := G\oplus^{\perp} Vect(x_1,x_2,\cdots,x_{s-1})$)

(e) Soit F un sous espace singulier de E. Montrer que si H est un sous espace non singulier qui contient F alors $\dim H \geqslant \dim F + \dim F^{\perp}\cap F$.

(f) Montrer que tout espace quadratique non dégénéré qui contient un sous-espace totalement isotrope de dimension moitié est un espace d'Artin.

(g) Montrer que toute isométrie $u\ : F\to F'$ se prolonge en une isométrie $\widehat{u}\ : \widehat{F}\to\widehat{F'}$ pour un bon choix de base de $F^{\perp}\cap F$ et $F'^{\perp}\cap F'$

[007822]

Exercice 7823

Soit $(E,q(xe_1+ye_2)=2xy)$ un plan d'Artin. Peut-on prolonger l'application u définie sur $vect(e_1)$ par $u(e_1)=e_2$ en une isométrie de E ? En une isométrie directe de E ? [007823]

Exercice 7824 Le théorème de Witt

Soit (E,q) un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q non dégénérée.

(a) Montrer que si $q(x)=q(y)\neq 0$ alors l'un des deux vecteurs $x+y$ et $x-y$ est non isotrope.

(b) Montrer que si F est non singulier de dimension au moins 2, on peut écrire $F=F_1\oplus^{\perp} F_2$ avec F_i non singulier de dimension $\dim F_i < \dim F$.

(c) Soit $F=F_1\oplus^{\perp} F_2$ (F_i non singulier) et soit $u\ : F\to F'$ une isométrie. Soit $v\ : E\to E$ une isométrie qui coïncide avec u sur F_1.. Soit $F_1'=u(F_1)$. Montrer que $F_1'^{\perp}$ contient $u(F_2)$ et $v(F_2)$ et que $u\circ v^{-1}\ :\ v(F_2)\to u(F_2)$ est une isométrie.

(d) Démontrer le théorème de Witt

Soit F et F' deux sous espaces de (E,q) (q non dégénérée) et $u\ : (F,q_{|F})\to(F',q_{|F'})$ une isométrie. Montrer qu'il existe une isométrie de E qui prolonge u.

[007824]

Exercice 7825 Action des groupes orthogonaux

(a) Le groupe $O(1,1)$ agit-il transitivement sur les droites de $\mathbb{R}^2$?

(b) Soit q une forme quadratique réelle non dégénérée. Montrer que si q a la même signature en restriction à F et à F' alors F et F' sont dans la même orbite sous l'action de $O(q)$.

(c) Décrire les orbites de l'action de $O(2,1)$ sur les droites de $\mathbb{R}^3$.

[007825]

Exercice 7826 Etude du groupe orthogonal $O(1,1)$

(a) Montrer que dans un plan d'Artin il y a exactement deux droites isotropes I et J.

(b) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u envoie $I \cup J$ sur lui-même.

(c) Soit $u \in O(1,1)$. Montrer que u est directe si et seulement si u laisse fixes chaque droite isotrope.

(d) En déduire la forme des éléments de $O(1,1)$.

[007826]

Exercice 7827 Sur les similitudes

Soit f une forme sesquilinéaire non dégénérée symétrique (resp. hermitienne, alternée) sur un K-espace vectoriel E. On note $GO(f)$ (resp. $GU(f)$, $GSp(f)$) le groupe des similitudes de f. On note μ l'application qui à une similitude associe son multiplicateur dans $K^\star$.

(a) Déterminer les similitudes de la forme symplectique standard sur K^2.

(b) Montrer que u est une similitude si et seulement si elle conserve l'orthogonalité.

(c) On suppose f symétrique. Montrer que $Im(\mu) = \{\lambda \in K^\star / q \equiv \lambda q\} \supset (K^\star)^2$.

[007827]

Exercice 7828

Déterminer l'orbite et le stabilisateur d'un vecteur de norme 1 sous l'action du groupe orthogonal du produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que groupe $O(n-1)$ est isomorphe à un sous-groupe O_{n-1} de $O(n)$. Ce sous-groupe est-il distingué ? [007828]

Exercice 7829

(a) Montrer que l'application

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & H_0 \\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & \begin{pmatrix} x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomrphisme entre $\mathbb{R}^3$ et le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H_0 des matrices hermitiennes de trace nulle.

(b) Montrer que le groupe $SU(2)$ agit sur H_0 par conjuguaison.

(c) Par l'isomorphisme h, cette action permet de définir une action de $SU(2)$sur $\mathbb{R}^3$. Montrer que cette action est par isométrie de déterminant 1. (On pourra utiliser la connexité de $SU(2)$ homéomorphe à S^3 sphère unité du corps des quaternions.). En déduire un homomorphisme ϕ de $SU(2)$ dans $SO(3)$.

(d) Montrer que les seules matrices de $SU(2)$ qui commutent à tous les éléments de H_0 sont Id et $-Id$. En déduire le noyau de ϕ.

(e) En utilisant les formes réduites des matrices de $SO(3)$, montrer que l'application exponentielle de l'espace $so(3)$ des matrices anti-symétriques réelles 3×3 (de trace nulle) sur $SO(3)$ est surjective.

(f) En utilisant la diagonalisation des matrices unitaires dans une base orthonormée pour le produit scalaire hermitien standard sur $\mathbb{C}^2$, montrer que l'application exponentielle de l'espace $su(2)$ des matrices anti-hermitiennes de trace nulle sur $SU(2)$ est surjective.

(g) Déterminer l'image par ϕ des matrices (avec $a,b,c \in \mathbb{R}$)

$$\exp\begin{pmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{pmatrix} ; \exp\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} ; \exp\begin{pmatrix} 0 & ic \\ ic & 0 \end{pmatrix}$$

En déduire que ϕ est surjective.

[007829]

Exercice 7830

Soit d_1,d_2,d_3 trois droites de $P^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient. [007830]

Exercice 7831 Polarité

Soit $\mathscr{Q}$ une quadrique de $P(E)$ (muni d'un repère projectif) d'équation $q(x)=0$ où q est la forme quadratique d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée f sur un espace vectoriel E. Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont deux sous-espaces orthogonaux dans E, on note $P(\vec{A}) \perp P(\vec{B})$. On appelle hyperplan polaire d'un point $A=P(\vec{A})$ de $P(E)$ l'hyperplan projectif $A^\perp := P(\vec{A}^\perp)$.

(a) On munit de plan projectif d'un repère. Déterminer une équation de la droite polaire du point $M(x_0,y_0,1)$ par rapport à la quadrique d'équation $x^2+y^2-z^2=0$. La représenter dans l'espace affine d'équation $z \neq 0$.

(b) Soit F un sous-espace non-isotrope de E. Soit A et B deux points de $P(F)$. Montrer si $A \perp B$ pour f alors $A \perp B$ pour $f_{|F}$.

(c) Soit $\mathscr{Q}$ une quadrique de $P^1(K)$ dont l'image est composée des deux points A et B. Montrer en utilisant un bon repère que pour tout M in $P^1(K)$,

$$M \perp N \iff M \text{ et } N \text{ sont conjugués harmoniques par rapport à } M \text{ et } N.$$

(d) En déduire une construction géométrique de la polaire d'un point par rapport à une conique.

[007831]

Exercice 7832 Classification euclidienne des quadriques

On considère dans l'espace euclidien E de dimension 3 une quadrique $\mathscr{Q}$ d'équation $q(x,y,z)=0$ où q est un polynôme de degré 2. On note h sa partie homogène de degré 2. C'est une forme quadratique sur $\vec{E}$. On l'appelle forme quadratique à l'infini. On note Q l'homogénéisée de q. C'est une forme quadratique sur $\widehat{E}$ qui définit la complétion projective de $\mathscr{Q}$.

(a) Montrer que chaque argument de la signature de Q est plus grand que l'argument correspondant de la signature de h.

(b) On suppose que la signature de h est $(3,0)$ ou $(0,3)$. Déterminer, suivant la signature de Q une forme réduite (dans un bon repère) pour q et représenter dans chaque cas la quadrique $\mathscr{Q}$.

(c) Indiquer le résultat pour les autres signatures.

(d) Affecter aux différents cas les noms suivants :

plan double réel, couple de plans imaginaires conjugués parallèles distincts, couple de plans réels parallèles distincts,

cylindre à base parabolique, cylindre à base hyperbolique, cylindre à base elliptique, cylindre imaginaire,

cône imaginaire de sommet réel, cône de base une conique propre réelle,

ellipsoïde imaginaire, ellipsoïde réel,

paraboloïde hyperbolique, paraboloïde elliptique,

hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes.

[007832]

Exercice 7833 Isométries

(a) Soit (V, f) un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Montrer que toute application $f\ : V \to V$ qui conserve f est une bijection linéaire.

(b) Soit (E, d) un espace affine euclidien. Montrer que toute application $f\ : E \to E$ qui conserve la distance est une bijection affine dont la partie linéaire est orthogonale.

[007833]

Exercice 7834 Droite et conique plane

(a) Soit $(A, B, C; D)$ un repère projectif du plan projectif P^2. Écrire en coordonnées homogènes la projection p de centre A sur la droite (BC).

(b) Soit $\mathscr{Q}$ une quadrique projective non singulière de P^2 qui passe par le point A. Montrer que la projection p se prolonge en une bijection entre $\mathscr{Q}$ et la droite (BC).

[007834]

Exercice 7835 Système de droites dans une quadrique

Soit l'espace P^3 muni d'un système de coordonnées homogènes et $\mathscr{Q}$ la quadrique projective d'équation $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$.

(a) Déterminer un système de coordonnées homogènes dans lequel $\mathscr{Q}$ a pour équation $Y_0Y_3 - Y_1Y_2 = 0$.

(b) Montrer alors que l'application $v\ : ((a:b),(c:d)) \to (ac:ad:bc:bd)$ réalise une bijection de $P^1 \times P^1$ sur $\mathscr{Q}$.

[007835]

Exercice 7836 Avec un théorème connu

Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation $a^2 + b^2 = c^2$. [007836]

Exercice 7837

On considère la forme symplectique sur $\mathbb{R}^{2n}$ donnée par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = x^t\, y' - y^t\, x'$$

où x, y, x', y' sont dans $\mathbb{R}^n$.

(a) En décomposant par bloc $n \times n$ une matrique quelconque g de $M_{2n}(\mathbb{R})$ sous la forme $\left(\begin{smallmatrix} AB \\ CD \end{smallmatrix}\right)$, caractériser les matrices symplectiques en termes de systèmes d'équation pour A, B, C, D.

(b) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant de plus $B = C = 0$.

(c) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $A = D = I_n$ et $C = 0$.

(d) Déterminer toutes les matrices symplectiques vérifiant $C = 0$.

(e) Déterminer toutes les matrices Q de $M_n(\mathbb{R})$ telles que l'espace $W_Q := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} Qy \\ y \end{smallmatrix}\right) / y \in \mathbb{R}^n \right\}$ soit totalement isotrope. Quel est le lien avec les questions précédentes ?

[007837]

Exercice 7838

Soit n un entier supérieur à 3. Le groupe D_{2n} des isométries d'un polygone régulier à n côtés d'un plan euclidien réel est-il résoluble ?

Correction ▼ [007838]

Exercice 7839

Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$ sont-elles équivalentes ?

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$$

et

$$Q(x,y,z) = xy + 3z^2.$$

Correction ▼ [007839]

Exercice 7840

Démontrer le théorème de Witt dans le cas particulier suivant :

Soit E et E' deux espaces symplectiques non-singuliers de dimension 4. Soit $d \subset E$ et $d' \subset E'$ deux droites et f une application linéaire bijective de d sur d'. Montrer qu'il existe une isométrie de E sur E' qui prolonge f.

Correction ▼ [007840]

Exercice 7841

(a) Donner la liste des éléments du groupe D des isométries qui conservent un hexagone régulier.

(b) Donner un 3-Sylow de ce groupe.

(c) Quels sont les ordres possibles d'éléments d'un 2-Sylow de D ?

(d) Expliciter un 2-Sylow de D.

(e) Est-il distingué dans D ?

(f) Combien D a-t-il de 2-Sylow ?

[007841]

Exercice 7842

(a) Combien le groupe $\mathscr{A}_5$ a-t-il d'éléments d'ordre 3 ?

(b) Montrer que les déplacements qui conservent un nombre fini $A_1, A_2, \dots, A_n$ de points du plan euclidien sont des rotations d'ordre fini dont on précisera le centre.

(c) Le groupe $\mathscr{A}_5$ peut-il être le groupe des déplacements qui conservent un nombre fini de points du plan euclidien ?

(d) Le groupe $\mathscr{A}_5$ peut-il être le groupe des isométries qui conservent un nombre fini de points du plan euclidien ? (Indication : Quel serait alors le sous-groupe des déplacements ?)

[007842]

Exercice 7843

(a) Déterminer si possible un plan totalement isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{C}^4$.

$$P(x,y,z,t) = xy + zt$$

et

$$Q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

(b) L'entier -3 est-il un carré modulo 7 ?

(c) Déterminer si possible un vecteur non-nul isotrope pour chacune des formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^4$.

$$R(x,y,z,t) = xy + zt$$

et

$$S(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

[007843]

Cinquième partie

M2 - Agrégation

13 Algèbre

13.1 322.00 - Actions de groupes, Théorèmes de Sylow

Exercice 7844

Soit G un groupe et $f : G \to A$ un morphisme de groupes de G dans un groupe abélien A. On suppose de plus que le noyau $N(f)$ de f est résoluble.

(a) Montrez que le groupe dérivé $D(G)$ de G est inclus dans le noyau de F.

(b) Montrez que G est résoluble.

[007844]

Exercice 7845 Groupe dérivé

Soit G un groupe. On appelle groupe des commutateurs de G et l'on note $D(G)$ le sous-groupe de G engendré par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$. Montrer que $D(G)$ est distingué dans G et que le quotient $G/D(G)$ est abélien. Montrer que $D(G)$ est le plus petit sous-groupe distingué de G tel que le quotient de G par ce sous-groupe soit abélien. [007845]

Exercice 7846 Autour de cours

(a) Montrez que les morphismes d'un groupe simple vers un groupe quelconque sont constants ou injectifs.

(b) Quel est le nombre moyen de points fixes d'une permutation de $\mathscr{S}_n$?

(c) Démontrez que si G est un groupe fini, S un p-Sylow de G, et H un sous-groupe de G, il existe un conjugué de S qui rencontre H en un p-Sylow de H.

[007846]

Exercice 7847

Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit facteur premier de l'ordre de G. Soit H un sous-groupe de G d'indice $p > 1$.

(a) Montrez que les orbites de l'action de H sur G/H par translation à gauche sont réduites à des points.

(b) Montrez que H est distingué.

[007847]

Exercice 7848

(a) Explicitez un 7-Sylow du groupe symétrique $\mathscr{S}_9$

(b) Déterminez le nombre d'élements d'ordre 7 dans $\mathscr{S}_9$.

(c) Déterminez le nombre de 7-Sylows.

(d) Vérifiez les congruences données par le théorème de Sylow sur le nombre de 7-Sylows.

[007848]

Exercice 7849

On fixe une action d'un groupe G sur un ensemble fini E. On suppose que l'ordre de G est 15, que le cardinal de E est 17 et que E n'a pas de point fixé par tous les éléments du groupe G. Déterminer le nombre d'orbites et le cardinal de chacune d'elles. [007849]

Exercice 7850

(a) Soit G un p-groupe agissant sur un ensemble fini E. Montrer que le cardinal de l'ensemble des points fixes de l'action est congru, modulo p, au cardinal de E.

(b) En considérant une action de G sur lui-même, montrer que le théorème de Burnside : le centre d'un p-groupe non réduit à l'élément neutre n'est pas réduit à l'élément neutre.

[007850]

Exercice 7851 Groupe d'ordre p^3

Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3 où p est un nombre premier.

(a) Montrer que le centre de G est d'ordre p et égal à son sous-groupe dérivé $Z(G) = D(G)$.

(b) En déduire que le nombre de classes de conjugaison est $p^2 + p - 1$. (On pourra étudier l'action de G sur lui-même par conjugaison : ses points fixes, l'orbite des éléments, le stabilisateur des éléments et appliquer la formule de Burnside...)

(c) Montrer que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(d) Montrer que tout sous-groupe de G d'ordre p^2 contient le centre $Z(G)$ de G, et que donc G n'est pas un produit semi-direct de son centre par son abélianisé.

[007851]

Exercice 7852

(a) En comptant le nombre de base de $\mathbb{F}_p^n$ déterminer le cardinal de $GL(n, \mathbb{F}_p)$.

(b) Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes est un p-sous-groupe de Sylow de $GL(n, \mathbb{F}_p)$.

[007852]

Exercice 7853

(a) Vérifier que les p-Sylow de $GL(2, \mathbb{F}_p)$ sont monogènes.

(b) Soit A et B deux matrices de $GL(2, \mathbb{F}_p)$ d'ordre p. Montrer que A est conjuguée à une puissance de B.

[007853]

Exercice 7854

Soit p un nombre premier et m un entier non multiple de p. Soit G un groupe de cardinal $|G| = p^d m$.

(a) Montrer que le nombre de p-Sylow de G divise m.

(b) Montrer que pour tout $0 \leqslant i \leqslant d$, G possède un sous groupe d'ordre p^i.

[007854]

Exercice 7855

Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. [007855]

Exercice 7856 Groupes de matrices sur $\mathbb{F}_2$

(a) Décrire un 2-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que le polynôme minimal de A est irréductible de degré 3. En déduire que $GL_3(\mathbb{F}_2) \cap \mathbb{F}_2[A]$ est un 7-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

(c) Déterminer un 3-Sylow de $GL_3(\mathbb{F}_2)$ à l'aide de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[007856]

13.2 320.00 - Groupes diédraux ; produit semi-direct

Exercice 7857 Exemples de sous-groupes caractéristiques

(a) Montrer qu'un p-Sylow distingué est caractéristique.

(b) Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe fini G tel que son ordre est premier avec son indice. Montrer alors que H est le seul sous-groupe d'ordre $|H|$ et donc que H est caractéristique.

[007857]

Exercice 7858 Produit semi-direct interne

Soit N un sous-groupe distingué d'un groupe G ($N \lhd G$) et H un sous groupe de G tel que $H \cap N = \{e_G\}$.

(a) Montrer que NH est un sous-groupe de G.

(b) On suppose désormais que $|G| = |N||H|$. Montrer que $\phi : N \times H \to G$, $(n,h) \mapsto nh$ est une bijection.

(c) Montrer que si on munit $N \times H$ de la loi

$$(n,h) \star (n',h') = (n(hn'h^{-1}), hh'),$$

alors $N \times H$ est un groupe et ϕ un isomorphisme de groupes.

[007858]

Exercice 7859 Groupes d'automorphismes

(a) Montrer que les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ sont obtenus par multiplication par un inversible de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \times)$.

(b) Décrire un isomorphisme de $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ sur $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$.

(c) Montrer que si G et H sont deux groupes d'ordre premiers entre eux, alors

$$Aut(G \times H) = Aut(G) \times Aut(H).$$

(d) En déduire le groupe des automorphismes de $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$.

(e) Soit p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Montrer que

$$Aut((\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n) = GL(n, \mathbb{F}_p).$$

(f) Montrer que $Aut(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \to Bij((1,0),(1,1),(0,1))$ est un isomorphisme.

[007859]

Exercice 7860 Exemple de produits semi-directs

(a) Montrer que, après avoir fixé un générateur de $(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})^\star$, la donnée d'un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ revient à la donnée d'un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$.

(b) En déduire une structure de produit semi-direct sur $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que toutes les structures de produit semi-direct donnent des groupes isomorphes. *On pourra montrer que si $\phi, \psi \in Hom(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ alors il existe $\gamma \in Aut(\mathbb{Z}/11\mathbb{Z})$ tel que $\psi(h) = \gamma \circ \phi(h) \circ \gamma^{-1}$.*

(d) Montrer que tous les morphismes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ sont de la forme $t \mapsto \{x \mapsto k^t x\}$ où k est un élément de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\star$ d'ordre p.

[007860]

13.3 322.00 - Groupes d'ordre inférieur à 12

Exercice 7861 Des petites questions

(a) Soit p un nombre premier. Déterminer à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre p.

(b) Soit p un nombre premier. Déterminer à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre p^2.

(c) Donner des exemples de groupes d'ordre 6 non abéliens.

(d) Déterminer l'ordre des groupes diédraux D_n.

(e) Déterminer l'ordre des groupes alternés $\mathscr{A}_n$.

[007861]

Exercice 7862 Étude de $\mathscr{S}_3$

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathscr{S}_3$, le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_3$ ayant cette structure, et leur signature. Décrire les sous-groupes de $\mathscr{S}_3$, et ceux qui sont distingués dans $\mathscr{S}_3$.
Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathscr{S}_3$. [007862]

Exercice 7863 Groupes d'ordre 6

Soit G un groupe d'ordre 6.

(a) Montrer que G admet un élément τ d'ordre 2 et un élément σ d'ordre 3.

(b) Quelles sont les valeurs possibles de $\tau\sigma\tau$?

(c) Déterminer, dans chacun des cas précédents, la structure de G à isomorphisme près.

[007863]

Exercice 7864 Étude de $\mathscr{S}_4$

Donner les structures de cycles possibles dans $\mathscr{S}_4$, le nombre d'éléments de $\mathscr{S}_4$ ayant cette structure, et leur signature. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathscr{S}_4$. En déduire que $\mathscr{A}_4$ n'est pas un groupe simple, i.e. qu'il possède des sous-groupes distingués autres que $\{e\}$ et $\mathscr{A}_4$.
Déterminer les sous-groupes de Sylow de $\mathscr{S}_4$. [007864]

Exercice 7865

Soit p un nombre premier impair, on se propose de décrire les groupes d'ordre p^2 à isomorphisme près.

(a) Soit G un groupe de cardinal p^2, montrer que, ou bien G est cyclique ou bien tous les éléments différents de l'élément neutre sont d'ordre p.

(b) Soit G un groupe non cyclique d'ordre p^2, soit K un sous-groupe d'ordre p, montrer que K est distingué dans G et qu'il existe H sous-groupe d'ordre p tel que $K \cap H = \{e\}$. En déduire que G est ismorphe à un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) Montrer que tout groupe de cardinal p^2 est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

[007865]

Exercice 7866 Groupes d'ordre pq

Soit G un groupe d'ordre pq, où p et q sont deux nombres premiers distincts. On suppose que $p < q$.

(a) Montrer qu'il n'y a qu'un q-Sylow Q et qu'il est distingué.

(b) Montrer que G est produit semi-direct $Q \rtimes P$ où P est un p-Sylow de G.

(c) Si p ne divise pas $q-1$, déterminer la structure de G.

(d) Si $p = 2$, déterminer le morphisme structurel $\phi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to Aut(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \equiv \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Déterminer alors la structure de G.

(e) Si p divise $q-1$, montrer qu'il n'y a qu'un seul produit semi-direct non abélien, à isomorphisme près.

[007866]

Exercice 7867 Groupe non abélien d'ordre 8

Soit G un groupe d'ordre 8.

(a) Enumérer quatre groupes d'ordre 8, deux à deux non isomorphes, et même 5 si possible.

(b) On suppose que tous les éléments de G sont d'ordre 2. Montrer que G est abélien. Soit a et b deux éléments non neutres distincts de G. Montrer que $\{e, a, b, ab\}$ est un sous-groupe d'ordre 4 de G. Déterminer un isomorphisme de G avec un groupe connu.

(c) On suppose que G admet un élément a d'ordre 4. Soit b un élément hors du sous-groupe engendré par a. Montrer que $< a >$ est distingué et que b^2 appartient à $< a >$.

   i. Quel est l'ordre de b si $b^2 = a$ ou si $b^2 = a^3$? Conclure dans ce cas.

   ii. Si $b^2 = e$, montrer que G est un produit semi-direct et en déduire un isomorphisme avec un groupe connu.

   iii. Si tous les éléments hors de $< a >$ ont un carré égal à a^2, établir la liste des éléments et la table de multiplication de G à l'aide seulement de a et b.

[007867]

Exercice 7868 Groupe non abélien d'ordre 8

Soit G un groupe non abélien d'ordre 8.

(a) Montrer que G contient un élément d'ordre 4. Soit H le sous-groupe qu'il engendre.

(b) Montrer que si $G-H$ contient un élément d'ordre 2, G est un produit semi-direct. Après avoir vérifié que $Aut(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe une unique structure de tel produit semi-direct non abélien.

(c) Montrer que si $G-H$ n'a pas d'élément d'ordre 2, on retrouve la table de H_8 en choisissant i l'élément d'ordre 4 qui engendre H et j un élément d'ordre 4 dans $G-H$. *On pourra montrer que i^2 est le seul élément d'ordre 2 est qu'il est donc central. On le notera -1.*

[007868]

Exercice 7869 Les groupes d'ordre 10

Soit G un groupe d'ordre 10.

(a) Montrer que G est un produit semi-direct.

(b) Déterminer les automorphismes d'ordre 2 de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

(c) En déduire les deux possibilités pour les classes d'isomorphismes de G.

[007869]

Exercice 7870 Les groupes d'ordre 33

Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre 33.(On pourra déterminer le nombre de sous-groupe d'ordre 11 et le nombre de sous-groupe d'ordre 3.) [007870]

13.4 322.00 - Simplicité

Exercice 7871

Montrer qu'un groupe d'ordre 63 n'est pas simple. [007871]

13.5 322.00 Générateurs et simplicité de $\mathscr{A}_5$ et $\mathscr{A}_n$

Exercice 7872 Les cycles d'ordre 3 engendrent $\mathscr{A}_n$

Soit n un entier naturel supérieur à 3, $\mathscr{S}_n$ le groupe symétrique de n lettres et $\mathscr{A}_n$ le groupe alterné.

(a) Calculer les produits de transpositions $(a,b)(b,c)$, puis $(a,b)(c,d)$.

(b) Montrer que les cycles d'ordre 3 engendrent $\mathscr{A}_n$.

[007872]

Exercice 7873 Groupes symétriques

Soint n un entier naturel supérieur à 3.

(a) Montrer que les permutations $(i,j)(j,k)$ et $(i,j)(k,l)$ s'écrivent comme produit de 3-cycles.

(b) En déduire que le groupe alterné $\mathscr{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

(c) Montrer que si $n \geqslant 5$, tous les 3-cycles sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$.

[007873]

Exercice 7874

(a) Le groupe $\mathscr{S}_n$ est-il simple ?

(b) Le groupe $\mathbb{Z}/89\mathbb{Z}$ est-il simple ?

(c) Le groupe $\mathbb{Z}/221\mathbb{Z}$ est-il simple ?

[007874]

Exercice 7875 Simplicité de $\mathscr{A}_5$

(a) Faire la liste des classes de conjugaison de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathscr{A}_n$ en les dénombrant.

(b) Montrer que les 3-cycles sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$.

(c) Montrer que les éléments d'ordre 2 sont conjugués dans $\mathscr{A}_n$.

(d) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathscr{A}_n$ qui contient un élément d'ordre 5 les contient tous. (On remarquera que le groupe engendré par un élément d'ordre 5 est un Sylow.)

(e) Montrer que tout sous-groupe distingué H de $\mathscr{A}_n$ non réduit à $\{id\}$ contient au moins deux types d'éléments en plus de l'identité. Montrer alors que $H = \mathscr{A}_n$.

[007875]

13.6 320.00 Groupes dérivés, résolubilité

On rappelle que le groupe dérivé $D(G)$ d'un groupe G est le groupe sous-groupe engendré par les commutateurs. C'est un sous-groupe caractéristique. On définit par récurrence le $k+1$ième groupe dérivé de G comme le groupe dérivé du $k$ième groupe dérivé $D^k(G)$ de G. On dit qu'un groupe est résoluble, si l'un des ses groupes dérivés est réduit à un élément.

Exercice 7876 Généralités

(a) Montrer que le groupe des matrices triangulaires supérieures de diagonale identité est résoluble.

(b) Montrer que si H est un sous-groupe distingué d'un groupe G, alors G est résoluble si et seulement si H et G/H le sont. (On pourra commencer par le cas où G/H est abélien).

(c) Montrer qu'un p-groupe est résoluble.

[007876]

Exercice 7877

(a) L'ensemble des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ avec l'identité est-il un sous-groupe distingué de $\mathscr{A}_6$. (Justifier)

(b) Donner l'exemple d'un groupe résoluble.

(c) Donner si possible l'exemple d'un groupe simple résoluble.

(d) Donner si possible l'exemple d'un groupe simple résoluble non abélien.

[007877]

Exercice 7878 Groupe triangulaire supérieur

(a) Montrez que le groupe de Heisenberg H des matrices $3*3$ triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, est résoluble.

(b) Montrez que le groupe B des matrices triangulaires supérieures $3*3$ inversibles (coefficients diagonaux non nuls) est résoluble.

[007878]

Exercice 7879 Groupes dérivés de $\mathscr{S}_4$

Le but de l'exercice est de déterminer les groupes dérivés successifs de $\mathscr{S}_4$. On notera V_4 le sous-groupe des permutations de profil $(\cdot,\cdot)(\cdot,\cdot)$ (avec l'identité).

(a) Montrer que $D(\mathscr{S}_4) \subset \mathscr{A}_4$.

(b) Calculer les commutateurs $(1,2)(1,3)(1,2)^{-1}(1,3)^{-1}$ et $(1,2,3)(1,2,4)(1,2,3)^{-1}(1,2,4)^{-1}$.

(c) Montrer que $D(\S_4) = A_4$.

(d) Montrer que $V_4 \subset D(\mathscr{A}_4)$.

(e) Vérifier que V_4 est distingué dans $\mathscr{A}_4$ et que le quotient $\mathscr{A}_4/V_4$ est un groupe abélien. En déduire que $D(\mathscr{A}_4) \subset V_4$.

(f) En déduire $D^2(\mathscr{S}_4)$.

(g) Calculer les autres groupes dérivés de $\mathscr{S}_4$.

[007879]

Exercice 7880 Résolubilité

(a) Montrer que $\mathscr{S}_3$ est résoluble.

(b) Montrer que le groupe D_4 des permutations de profil $(.,.)(.,.)$ est un groupe abélien d'ordre 4 distingué dans A_4. En déduire que $\mathscr{A}_4$ et donc $\mathscr{S}_4$ sont résolubles.

(c) On suppose désormais $n \geqslant 3$. Soit c un 3 cycle. En considérant c^2, montrer que c est un commutateur dans $\mathscr{S}_n$. En déduire le sous groupe dérivé $D(\mathscr{S}_n)$.

(d) Montrer que pour $n \geqslant 5$, $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ ne sont pas résolubles.

[007880]

Exercice 7881 Groupe d'ordre pqr

Soit $p > q > r$ trois nombres premiers. Le but de l'exercice est de montrer qu'un groupe d'ordre pqr est résoluble.

(a) Montrer qu'un groupe d'ordre pq est résoluble.

(b) Soit G un groupe d'ordre pqr. Supposons qu'il n'admette pas de sous-groupe distingué. On note N_p (resp. N_q, N_r le nombre de sous-groupes de Sylow d'ordre p (resp. q, r). Montrer que $m_p = qr$, $m_q \geqslant p$ et $m_r \geqslant q$.

(c) Conclure.

[007881]

Exercice 7882 Groupes linéaires

Soit E un k-espace vectoriel. Soit f une forme linéaire sur E et a un élément non nul de $H = ker(f)$. On appelle transvection associée à f et a l'application $u : E \to E$, $x \mapsto x + f(x)a$. On rappelle que les transvections de E engendrent $SL(E)$.

(a) Soit u une transvection. En considérant une base (e_i) de E avec $e_{n-1} = a$, $(e_j)_{1\leqslant j\leqslant n-1}$ base de H, et e_n tel que $f(e_n) = 1$, écrire la matrice de u.

(b) Montrer que si u est une transvection, $Ker(u - Id) = H$, $\det u = 1$, u n'est pas diagonalisable.

(c) Montrer que si $\dim E \geqslant 3$, les transvections de E sont conjuguées dans $SL(E)$.

(d) On suppose k de caractéristique différente de 2 et $\dim E \geqslant 3$. Montrer que

$$D(GL(E) = D(SL(E)) = SL(E)$$

et donc que ni $GL(E)$, ni $SL(E)$ ne sont résolubles.

[007882]

Exercice 7883 Groupe dérivé de $GL(3, \mathbb{F}_2)$ et de $SL(3, \mathbb{F}_2)$

(a) Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad s=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$
Montrer que le commutateur $tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(b) Rappeler la démonstration du fait que deux transvections de $SL(3,\mathbb{F}_2)$ sont conjuguées dans $SL(3,\mathbb{F}_2)$.

(c) Déterminer $D(SL(3,\mathbb{F}_2))$.

(d) Déterminer $D(GL(3,\mathbb{F}_2))$.

[007883]

Exercice 7884 Groupe dérivé de $GL(2,k)$

On travaille dans $GL(2,k)$ pour un corps k qui a au moins 4 éléments. Soit $g\in GL(2,k)$. On notera i_g l'automorphisme intérieur donné par g.

(a) Démontrer qu'il existe un scalaire non nul $a\in k$ tel que $a^2\neq 1$. Que se passe-t-il dans $\mathbb{F}_2$ et dans $\mathbb{F}_3$?

(b) Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad s=\begin{pmatrix}a&0\\0&a^{-1}\end{pmatrix}.$$
Montrer que $T=tst^{-1}s^{-1}$ est une transvection.

(c) Soit τ une transvection de $SL(2,k)$. Il existe $g\in GL(2,k)$ tel que $\tau=i_g(T):=gTg^{-1}$. Calculer τ à l'aide de g, s et t et montrer que $D(SL(2,k))$ contient toutes les transvections.

(d) Déterminer $D(SL(2,k))$.

(e) Déterminer $D(GL(2,k))$.

[007884]

Exercice 7885 Groupe dérivé de $GL(2,\mathbb{F}_3)$

On travaille dans $GL(2,\mathbb{F}_3)$.

(a) Soit
$$t=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad s=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$
Calculer $tst^{-1}s^{-1}$.

(b) Déterminer $D(GL(2,k))$. Noter que ce calcul ne suffit pas pour déterminer $D(SL(2,k))$.

[007885]

Exercice 7886 Des petites questions

(a) L'entier 374 divise-t-il l'ordre du groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$? Le groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ a-t-il un élément d'ordre 374 ? a-t-il un élément d'ordre 187 ?

(b) Déterminer tous les diviseurs de 374 ? Le groupe $\mathbb{Z}/374\mathbb{Z}$ a-t-il un sous-groupe d'ordre chacun des diviseurs de 374 ?

[007886]

13.7 320.00 - Divers

Exercice 7887 Groupe unipotent

(a) À quel groupe le groupe U des matrices de la forme $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est-il isomorphe ?

(b) Est-ce un sous-groupe normal de $SL(2,\mathbb{R})$?

(c) Déterminer l'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[007887]

13.8 328.00 - Décomposition polaire des matrices

Exercice 7888 Décomposition polaire d'un endomorphisme

Soit H un espace hermitien et a un endomorphisme inversible de H. Montrer que a s'écrit de façon unique sous la forme $a = hu$ où h est un endomorphisme auto-adjoint positif et u unitaire. Déterminer h et u pour l'endomorphisme a dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$ est $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. [007888]

13.9 328.00 - Généralités sur les formes bilinéaires et sesquilinéaires

Exercice 7889 Forme alternée

Une forme bilinéaire f sur un k-espace vectoriel E est dite alternée, si tout vecteur de E est isotrope. Soit (E, f) un k-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée.

(a) Soit (V, f) un k-espace vectoriel de dimension 2, muni d'une forme alternée non-dégénérée. Soit x un vecteur non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope y tel que $f(x,y) = 1$. On dit alors que (V, f) est un plan symplectique.

(b) Soit V un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si $(V, f_{|V})$ est un espace non singulier (i.e. $f_{|V}$ non dégénérée) alors $E = V \oplus^{\perp} V^{\perp}$.

(c) Montrer que E est somme directe orthogonale de droites isotropes et de plans symplectiques.

(d) Montrer que tous les sous-espaces isotropes maximaux de E ont même dimension. Déterminer cette dimension en fonction de la dimension de E et du rang de f.

(e) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Witt symplectique : Soit (E, f) et (E', f') deux k-espaces vectoriels de dimension finie muni d'une forme symplectique (i.e. bilinéaire alternée non-dégénérée). On suppose (E, f) et (E', f') isométriques. Alors, toute isométrie d'un sous-espace de (E, f) sur un sous-espace de (E', f') se prolonge en une isométrie de (E, f) sur (E', f').

[007889]

Exercice 7890

Montrer qu'en dimension 2 le groupe symplectique d'une forme alternée non dégénérée est isomorphe au groupe spécial linéaire $SL(2,k)$. [007890]

Exercice 7891

(a) Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$ sont-elles équivalentes ?

$$q(x,y,z) = x^2 + 6y^2 + 2z^2$$

et

$$Q(x,y,z) = xy + 4z^2.$$

(b) Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.

(c) La forme q prend-elle toutes les valeurs de $\mathbb{F}_7$? Vérifier qu'elle prend les valeurs 3 et 5.

[007891]

Exercice 7892

(a) Montrer que deux formes quadratiques équivalentes sur un espace E prennent les mêmes valeurs dans k.

(b) Soit dans tout l'exercice (E, f) un espace muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de forme quadratique associée q. Montrer que si f admet un vecteur non nul isotrope, la forme q prend toutes les valeurs de k.

(c) Montrer que E se décompose comme somme directe orthogonale de plans hyperboliques et d'un sous-espace sur lequel la forme quadratique n'a pas de vecteur isotrope non nul.

(d) Montrer que le nombre de plans hyperboliques dans une telle décomposition est indépendant de la décomposition.

[007892]

13.10 313.00 - Endomorphismes orthogonaux et unitaires

Soit $< \ , \ >$ le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$ (i.e la forme sesquilinéaire ($\mathbb{C}$-linéaire par rapport au premier argument et $\mathbb{C}$-anti-linéaire par rapport au second) à symétrie hermitienne définie positive de matrice Id dans la base canonique)

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < X,Y >= {}^tXIdY = {}^tX\overline{Y}.$$

On notera, pour toute matrice $M \in M(2,\mathbb{C})$, $M^\star := {}^t\overline{M}$ l'adjoint de M i.e.

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < MX,Y >=< X,M^\star Y > .$$

On rappelle que le groupe spécial unitaire $SU(2)$ est le sous-groupe du groupe spécial linéaire complexe $SL(2,\mathbb{C})$ des matrices qui respectent le produit hermitien canonique de $\mathbb{C}^2$ i.e.

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^2)^2, < PX,PY >=< X,Y > .$$

$$SU(2) := \{P \in M(2,\mathbb{C}) / \det P = 1 \quad \text{et} \quad P^\star P = Id\}.$$

Exercice 7893 Le groupe $SO(2)$

(a) Rappeler un isomorphisme de groupes entre $SO(2)$ et S^1.

(b) L'application $SO(2) \to SO(2), A \mapsto A^2$ est-elle un morphisme de groupes ? Déterminer son image et son noyau.

[007893]

Exercice 7894 L'espace V des matrices anti-hermitiennes de trace nulle

(a) Déterminer la nature de l'espace vectoriel V des matrices anti-hermitiennes (i. e. $M^\star := -M$) de $M(2,\mathbb{C})$ de trace nulle.

(b) Écrire la forme générale d'une matrice de V à l'aide de trois nombres réels. En déduire une base de V.

(c) Montrer que $\ll P,P' \gg := -\frac{1}{2}trace(PP')$ définit un produit scalaire sur V.

Exercice 7895 Le groupe $SU(2)$

(a) Soit $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SU(2)$. Montrer que $c = -\overline{b}, d = \overline{a}$ et $\overline{a}a + \overline{b}b = 1$ et écrire la forme générale d'une matrice P de $SU(2)$ à l'aide de deux nombres complexes, puis de quatre nombres réels.

(b) En déduire un homéomorphisme de $SU(2)$ sur la sphère unité S^3 de $\mathbb{C}^2$. (On munit ici S^3 de la topologie induite par celle de $\mathbb{C}^2$ et $SU(2)$ de la topologie induite par la topologie d'une norme sur l'espace vectoriel $M(2,\mathbb{C})$.)

(c) Soit $-1 < c < 1$. Décrire topologiquement le sous-espace de $SU(2)$ des matrices de trace c, appelé "latitude c".

(d) Montrer que les latitudes sont des classes de conjugaison dans $SU(2)$. (On pourra remarquer que les éléments de $SU(2)$ sont associés à des endomorphismes normaux (i.e. qui commutent avec leur adjoint)).

(e) Quelles sont les autres classes de conjugaison ?

(f) Décrire topologiquement le sous-groupe D des matrices diagonales de $SU(2)$.

[007895]

Exercice 7896 Les groupes $SO(3)$ et $SU(2)$

(a) Montrer que la classe de conjugaison C de $SU(2)$ des matrices de trace nulle (i.e. la latitude 0) est la sphère unité de l'espace euclidien $(V, \ll\ ,\gg)$ des matrices anti-hermitienne de trace nulle.

(b) Montrer que $SU(2)$ agit par conjugaison sur l'espace V.

(c) Montrer que cette action est transitive.

(d) En déduire un morphisme de groupes ϕ de $SU(2)$ dans le groupe orthogonal de $(V, \ll\ ,\gg)$.

(e) Déterminer le noyau de ϕ.

(f) En utilisant la connexité de $SU(2)$ montrer que l'image de ϕ est incluse dans $SO(V)$.

(g) Montrer que l'image par ϕ du sous-groupe D des matrices diagonales de $SU(2)$ est le sous-groupe des rotations de V qui fixent $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$.

(h) En déduire l'image de ϕ.

[007896]

13.11 328.00 - Endomorphismes symétriques et hermitiens

Exercice 7897

On cherche à décrire le groupe G des isométries d'un plan affine euclidien qui conservent globalement un triangle $\mathscr{T} = ABC$ isocèle en A non équilatéral non aplati.

(a) Déterminer deux éléments différents du groupe G.

(b) Soit f un élément de G.

  i. Montrer que f a un point fixe.

  ii. Montrer que $f(A) = A$ et que ($f(B) = B$ ou $f(B) = C$).

  iii. Montrer que f est soit l'identité soit une réflexion.

(c) Écrire la table de multiplication du groupe G.

[007897]

Exercice 7898

Soit D_8 le groupe des isométries du carré. Déterminer un morphisme injectif de groupes de D_8 dans $\mathscr{S}_4$. Les éléments $(1,3)$ et $(1,2,3,4)$ engendrent-ils le groupe symétrique $\mathscr{S}_4$? [007898]

Exercice 7899 Sylow des groupes diédraux

Soit $\mathscr{P}_n$ un polygone régulier à n côtés dans le plan euclidien orienté. On appelle groupe diédral D_n le groupe des isométries de $\mathscr{P}_n$.

(a) Parmi les translations, les rotations, les symétries orthogonales, et les symétries glissées (composées d'une symétrie orthogonale et d'une translation dans l'axe de la symétrie), décrire des isométries du plan qui conservent le polygone régulier $\mathscr{P}_n$.

(b) Déterminer, à l'aide de l'action naturelle de D_n sur l'ensemble des sommets de $\mathscr{P}_n$, le cardinal de D_n. En déduire la liste complète des éléments de D_n.

(c) On suppose n impair. Déterminer les 2-Sylow de D_n et vérifier (sans référence au cours) qu'ils sont conjugués.

(d) On suppose $n = 6$. Déterminer un 2-Sylow de D_6. Déterminer le nombre de 2-Sylow de D_6. Déterminer deux sous-groupes d'ordre 2 de D_6 non conjugués dans D_6. Donner un 3-Sylow de D_6.

[007899]

Exercice 7900 Sous-groupe fini de $SO(3)$

(a) Montrer le *théorème de Burnside* : soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Alors le nombre N d'orbites est la moyenne des cardinaux des points fixes des éléments de G et aussi

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Card}Fix(\phi(g)) = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in E}\mathrm{Card}stabl(x).$$

On pourra considérer $\{(x,g) \in E\times G / g\cdot x = x\}$.

(b) Soit G un sous-groupe fini de $SO(3)$. On considère son action sur la sphère unité. Soit X l'ensemble des points fixés par un des éléments de G différents de l'identité. Montrer que X est stable par l'action de G. Montrer que le stabilisateur d'un élément de X est un groupe cyclique. On notera N le nombre d'orbites de l'action de G sur X et n_j le cardinal du stabilisateur d'un élément de l'orbite O_j.

(c) Montrer que
$$N|G| = 2(|G|-1) + \mathrm{Card}X.$$

(d) Montrer que
$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^{N}(1-\frac{1}{n_j}).$$

(e) En déduire que $N = 2$ ou $N = 3$.

(f) Montrer que si $N = 2$, G est un sous-groupe cyclique de rotations.

(g) Si $N = 3$, déterminer les possibilités pour les n_j.

[007900]

13.12 313.00 - Quaternions, $SO_3(\mathbb{R})$ et $SO_4(\mathbb{R})$

Exercice 7901 Représentation matricielle des nombres complexes et des quaternions

(a) Déterminer dans $M(2,\mathbb{R})$ une matrice I telle que $I^2 = -Id$.

(b) En déduire un morphisme non nul d'anneaux de $\mathbb{C}$ dans $M(2,\mathbb{R})$.

(c) Soit
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \; A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$
Établir la table de multiplication de $G := \{I, -I, A, -A, B, -B, C, -C\}$. Est-ce un groupe ? Est-il cyclique ?

(d) La sous-algèbre H de $M(2,\mathbb{C})$ engendré par G est-elle commutative ? un corps gauche ?

[007901]

13.13 328.00 - Classification des coniques euclidiennes affines

Exercice 7902 Droites et quadriques

Une quadrique d'un espace projectif $P(V)$ est le lieu des zéros d'une forme quadratique f sur V.

(a) Montrer que toute quadrique qui contient trois points distincts d'une droite d contient toute la droite d.

(b) Déterminer la dimension de l'espace des quadriques de $P^3(K)$.

(c) Soit d_1, d_2, d_3 trois droites de $P^3(K)$. Montrer qu'il existe une quadrique qui les contient.

[007902]

Exercice 7903

On considère le plan euclidien muni d'un un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \rightarrow)$ et la courbe (C) d'équation
$$4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - y - 1 = 0$$

(a) Montrer que (C) est une parabole.

(b) Trouver un repère orthonormé $(S, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ tel que (C) ait une équation de la forme $x^2 = 2py$ dans ce repère.

[007903]

Exercice 7904

(a) Construire à la règle et au compas la tangente à un cercle $\mathscr{C}$ passant par un point A hors du disque délimité par $\mathscr{C}$.

(b) Soit maintenant $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux cercles non concentriques. Construire les centres Ω et O des homothéties qui envoient $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$.

(c) Construire deux tangentes communes à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{C}'$.

[007904]

Correction de l'exercice 7360 ▲

(a) Dans $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3) = (132)$ et par conjugaison $(1,2)(2,3)(1,2) = (1,3)$.

(b) L'ensemble des transpositions de $\mathscr{S}_7$ ne contient pas l'identité : ce n'est donc pas un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$. Le premier calcul montre qu'il n'est pas non plus stable par produit.

Correction de l'exercice 7363 ▲

(a) Les ordres possibles des éléments d'un groupe d'ordre 6 sont, par le théorème de Lagrange les diviseurs de 6 c'est à dire $1,2,3$ et 6.

(b) Les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z},\times)$ sont les classes des entiers premiers à 7 c'est à dire toutes les classes non nulles.

(c) la table de multiplication de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$ est

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(d) On calcule l'ordre multiplicatif de 2. Comme $2^3 = 1$ l'ordre de 2 est 3. Comme $3^2 = 2$ et $3^3 = 6$, 3 est d'ordre 6. C'est donc un générateur de $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$.

(e) On déduit de la question précédente que $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\star,\times)$ est un groupe cyclique d'ordre 6. Il a donc $\phi(6) = \phi(2)\phi(3) = 2$ générateurs.

(f) Dans le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ tous les éléments g vérifient $4g = 0$. Il n'y a donc aucun élément d'ordre 8. Ce groupe n'est donc pas cyclique.

(g) Par le théorème chinois, puisque 4 et 5 sont premiers entre eux, $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Le groupe $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\star$ est donc isomorphe au produit $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\star\times(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\star$. Comme $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\star$ est un groupe d'ordre 2, il est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Comme 5 est premier, $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^\star$ est un groupe cyclique d'ordre 4 donc isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Par conséquent, le groupe $(\mathbb{Z}/20\mathbb{Z})^\star$ n'est pas cyclique.

Correction de l'exercice 7364 ▲

(a) Comme α et β sont à support disjoint, ils commutent $\alpha\beta = \beta\alpha$

(b) L'ordre de α donner comme produit de cycles à support disjoint est le *ppcm* des ordres des cycles qui le composent, donc $ppcm(3,2) = 6$. Celui de la transposition β est 2.

(c) $\alpha^{-1} = (175)(43)$ et $\beta^{-1} = (26)$.

(d) Montrons que $S = \{\alpha^i\circ\beta^j, 0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1\}$ est un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$.
*stabilité par produit : Soit $\alpha^i\circ\beta^j$ et $\alpha^k\circ\beta^l$ deux éléments de S où $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$ et $0\leqslant k\leqslant 5, 0\leqslant l\leqslant 1$.

$$\begin{aligned}(\alpha^i\circ\beta^j)\circ(\alpha^k\circ\beta^l) &= \alpha^i\circ\beta^j\circ\alpha^k\circ\beta^l\\ &= \alpha^i\alpha^k\beta^j\beta^l = \alpha^{i+k}\beta^{j+l}\end{aligned}$$

Comme $\alpha^6 = Id$, en considérant le reste $0\leqslant r\leqslant 5$ de la division euclidienne de $i+k$ par 6 et celui $0\leqslant s\leqslant 1$ de la division euclidienne de $j+l$ par 2 on obtient $(\alpha^i\circ\beta^j)\circ(\alpha^k\circ\beta^l) = \alpha^r\beta^s$ qui appartient donc à S.
*stabilité par inversion : Soit $\alpha^i\circ\beta^j$ dans S où $0\leqslant i\leqslant 5, 0\leqslant j\leqslant 1$. Comme $\alpha^6 = Id$, $(\alpha^i)^{-1} = \alpha^{6-i}$. Comme $\beta^2 = Id$, $\beta^{-1} = \beta$.

$$(\alpha^i\circ\beta^j)^{-1} = (\beta^j)^{-1}(\alpha^i)^{-1} = \beta^j\alpha^{6-i} = \alpha^{6-i}\beta^j$$

qui appartient donc à S.

(e) Soit $\alpha^i \circ \beta^j$ et $\alpha^k \circ \beta^l$ deux éléments de S où $0 \leqslant i \leqslant 5, 0 \leqslant j \leqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant 5, 0 \leqslant l \leqslant 1$. Si $\alpha^i \circ \beta^j = \alpha^k \circ \beta^l$, alors $\alpha^i \alpha^{6-k} = \beta^l \beta^j$. Comme α et β sont à support disjoint, ceci implique que $\alpha^i \alpha^{6-k} = Id$ et $\beta^l \beta^j = Id$, soit en particulier $l = j$. On en déduit que $i = k$. Donc tous les éléments de la liste $\{\alpha^i \circ \beta^j, 0 \leqslant i \leqslant 5, 0 \leqslant j \leqslant 1\}$ sont distincts. L'ordre de S est donc $6 \times 2 = 12$.

(f) Soit H un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$ qui contient α et β. Par stabilité par produit, il contient α^i, β^j et $\alpha^i \circ \beta^j$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant 5, 0 \leqslant j \leqslant 1$. Il contient donc S.

(g) On peut déduire des questions 4. et 6. précédentes que le sous-groupe de $\mathscr{S}_7$ engendré par α et β est S.

(h) Comme α et β sont à support disjoint, $\alpha \circ \beta = (157)(43)(26)$ est une écriture en produit de cycles à support disjoint. L'ordre de $\alpha \circ \beta$ est donc $ppcm(3,2,2) = 6$.

(i) Une écriture en produit de cycles à support disjoint de $\alpha^i \circ \beta^j$ montre que son ordre est inférieur à $ppcm(3,2) = 6$. Par conséquent, le sous-groupe S qui n'a pas d'éléments d'ordre 12 n'est pas cyclique.

Correction de l'exercice 7365 ▲

(a) On vérifie d'abord que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits de matrices ADA^{-1} et BDB^{-1} dans $GL(2,\mathbb{R})$ où

$$ADA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$BDB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Comme $D \in \mathscr{D}$ et $B \in GL(2,\mathbb{R})$ mais BDB^{-1} n'appartient pas à $\mathscr{D}$, le sous-groupe $\mathscr{D}$ de $GL(2,\mathbb{R})$ des matrices diagonales inversibles n'est pas distingué dans $GL(2,\mathbb{R})$.

(c)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

(d) $trace(AB) = 0 + 8 = 8$ et $trace(A) + trace(B) = 0 + 2 = 2 \neq 8$. Par conséquent, $trace$ n'est pas un morphisme de groupes de $GL(2,\mathbb{R})$ dans $(\mathbb{R},+)$.

Correction de l'exercice 7369 ▲

(a) On peut affirmer que l'ordre de a est un diviseur de m.

(b) Il s'agit de l'idéal $pgcd(18,28)\mathbb{Z} = 252\mathbb{Z}$.

(c)

(d)

(e) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sont deux groupes d'ordre 4, mais le second dont tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2 n'est pas cyclique.

(f) Comme $(1,2)(1,3)(1,2) = (2,3)$, $(1,2)$ et $(1,3)$ ne commutent pas. Par conséquent, le groupe $\mathscr{S}_4$ n'est pas cyclique.

Correction de l'exercice 7370 ▲

(a) $(-7387)-(-1601) = -5786 = (-2)2893$ donc, l'entier -1601 est un représentant de la classe $[-7387]_{2893}$ de $\mathbb{Z}/2893\mathbb{Z}$.

(b) Par le petit théorème de Fermat, $11^{12} = 1[13]$. On effectue la division euclidienne de 329 par 12. $329-27\times 12 = 5$. Par conséquent, $11^{329} = 11^5[13]$. $11^2 = 121 = 4[13]$, $11^4 = 4^2 = 3[13]$, d'où $11^{329} = 11^5 = 33 = 7[13]$

(c) Puisque $\mathrm{pgcd}(51,131) = 1$, la classe $[51]$ est inversible dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. En utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve que $1 = 131\times(-7)+51\times 18$. Alors, dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$ on a $51^{-1} = 18$.

Correction de l'exercice 7371 ▲

(a) $X^3+X+1 = (X^2+X+1)(X-1)+(X+2)$ et $X^2+X+1 = (X+2)(X-1)+3$. Une relation de Bezout entre X^2+X+1 et X^3+X+1 dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$3 = (X^2+X+1)-(X+2)(X-1) = (X^2+X+1)-(X-1)[(X^3+X+1)-(X^2+X+1)(X-1)]$$

soit

$$3 = (-X+1)(X^3+X+1)+(X^2-2X+2)(X^2+X+1).$$

(b) Puisque X^3+X+1 et X^2+X+1 sont premiers entre eux, la classe du polynôme X^2+X+1 inversible dans l'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^3+X+1)$. Son inverse est la classe de $(X^2-2X+2)/3$, comme le donne la relation de Bezout.

Correction de l'exercice 7372 ▲

(a)

(b) Comme $\phi(12) = \phi(3)\phi(2^2) = 2\times 2 = 4$ il y a quatre éléments inversibles dans l'anneau $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})$. Il s'agit de $1, -1 = 11, 5, -5 = 7$. Comme $5^5 = 25 = 1[12]$, tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On peut aussi remarquer que par le théorème chinois, $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 7373 ▲

Comme il s'agit d'un groupe d'ordre 5, il est cyclique donc commutatif. La table se complète donc en

$*$	a	b	c	d	e
a		e	d		c
b	e		a		d
c	d	a			b
d				d	e
e	c	d	b	e	a

Comme $de = e$, d est l'élément neutre. La table se complète donc en

$*$	a	b	c	d	e
a		e	d	a	c
b	e		a	b	d
c	d	a		c	b
d	a	b	c	d	e
e	c	d	b	e	a

Par la propriété de carré latin, on peut terminer le tableau

$*$	a	b	c	d	e
a	b	e	d	a	c
b	e	c	a	b	d
c	d	a	e	c	b
d	a	b	c	d	e
e	c	d	b	e	a

Correction de l'exercice 7374 ▲

(a) Dans $\mathscr{S}_7$, $(1,2)(1,3)=(132)$ et par conjugaison $(1,2)(2,3)(1,2)=(1,3)$.

(b) L'ensemble des transpositions de $\mathscr{S}_7$ ne contient pas l'identité : ce n'est donc pas un sous-groupe de $\mathscr{S}_7$. Le premier calcul montre qu'il n'est pas non plus stable par produit.

Correction de l'exercice 7375 ▲

(a) C'est la multiplication. Puisque $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ est un corps fini, par un théorème du cours, le groupe de ses inversibles est un groupe cyclique d'ordre 16.

(b) Il en a $\phi(91)=\phi(13\times 17)=\phi(13)\times\phi(17)=12\times 16=192$.

(c) $s=(15)(273)(469)$.

(d)

$$\begin{aligned}
(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & 7 & 2 & 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}\\
(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 3 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}\\
(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 6 & 9 & 4 & 5 \end{pmatrix}\\
(47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 6 & 9 & 7 & 5 \end{pmatrix}\\
(58)(47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}\\
(79)(58)(47)(36)(28)(19)\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix} = (89)
\end{aligned}$$

Donc,

$$\sigma=(19)(28)(36)(47)(58)(79)(89).$$

(e) Non, il change dans la transposition de t_1 par t_2.

Correction de l'exercice 7376 ▲

(a) D'après le cours, il en a $\phi(24)=\phi(2^3\times 3)=(2^3-2^2)(2)=8$.

(b) Par le théorème chinois, comme 3 et 8 sont premiers entre eux,

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

(c) Par la question précédente, $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times\simeq(\mathbb{Z}/3\times\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\simeq(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^\times\times(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times\simeq\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$. Pour déterminer le groupe $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$, on observe que c'est un groupe à $\phi(8)=4$ éléments. $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times=\{1,3,-1,-3\}$. Comme $3^2=1$, tous les éléments sont d'ordre 2. Par conséquent, tous les éléments de $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ sont d'ordre 2, et ce groupe n'est pas cyclique.

Correction de l'exercice 7377 ▲

(a) $221=13\times 17$

(b) Par le théorème chinois,

$$(X-3)(X-5)=0 \pmod{221} \iff \begin{cases} (X-3)(X-5)=0 \pmod{13} \\ (X-3)(X-5)=0 \pmod{17}. \end{cases}$$

Puisque 13 et 17 sont premiers, par le lemme d'Euclide,

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} (X-3)(X-5)=0 \pmod{13} \\ (X-3)(X-5)=0 \pmod{17}. \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \quad (X=3 \pmod{13} \quad \text{ou} \quad X=5 \pmod{13}) \\ \text{et} \quad (X=3 \pmod{17} \quad \text{ou} \quad X=5 \pmod{17}) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} X=3 \pmod{13} & \text{et} & X=3 \pmod{17} \\ & \text{ou} & \\ X=3 \pmod{13} & \text{et} & X=5 \pmod{17} \\ & \text{ou} & \\ X=5 \pmod{13} & \text{et} & X=3 \pmod{17} \\ & \text{ou} & \\ X=5 \pmod{13} & \text{et} & X=5 \pmod{17} \end{cases} \\
\iff & X=3 \pmod{221} \quad \text{ou} \quad X=107 \pmod{221} \\
& \quad \text{ou} \quad X=122 \pmod{221} \quad \text{ou} \quad X=5 \pmod{221}.
\end{aligned}$$

Les solutions entières de l'équation $(X-3)(X-5)=0 \pmod{221}$ sont les entiers congrus à 3, 107, 122 ou 5 modulo 221.

Correction de l'exercice 7378 ▲

(a) Comme ζ est d'ordre 8, ζ^3 est d'ordre $8/\operatorname{pgcd}(8,3)=8$. Le sous-groupe engendré par ζ^3 est donc tout le groupe des racines de l'unité d'ordre 8.

(b) $z^11=1$ donc l'ordre de z est un diviseur de 11. Mais $z\neq 1$. Donc z est d'ordre 11. Comme $z^8\neq 1$, z^8 est aussi d'ordre 11. $z^8=\exp(16\times 8i\pi/11)=\exp(64\times 2i\pi/11)$. Comme $64=5\times 11+9$, l'argument de z^8 est $18\pi/11$.

Correction de l'exercice 7379 ▲

(a) $2^3<7<3^2$. Donc, $2<\sqrt{7}<3$. Soit $P(x)=x^2-7$.

	1	0	-7
facteur 2	1	2	-3
	1	4	
	1		

Donc $P(2+y)=y^2+4y-3$. Par conséquent, $Q(z):=100P(2+z/10)=z^2+40z-300$. Avec $300/40\sim 7$ On trouve $Q(6)<0$ et $Q(7)>0$. Donc

$$2,6<\sqrt{7}<2.7.$$

(b) $Q(z)=z^2+40z-300$.

	1	40	-300
facteur 6	1	46	-24
	1	52	
	1		

Donc, $Q(6+u)=u^2+52u-24$. Par conséquent, $R(v):=100Q(6+v/10)=v^2+520u-2400$. Comme $2400/520\sim 5$, on trouve $R(5)>0$ et $R(4)<0$. Donc

$$2,64<\sqrt{7}<2.65.$$

Correction de l'exercice 7390 ▲

(a)

(b) $60^2 = -53[281]$. $53^2 = -1[281]$. Donc, $c = 53$ est une racine de -1 modulo 281.

(c) $281 = 5\times(53+i)+(16-5i)$. $53-i = (3+i)(16-5i)$. Donc, $\mathrm{pgcd}(281, c+i) = 16-5i$. En calculant $N(16-5i)$ on trouve
$$16^2+5^2 = 281.$$

Correction de l'exercice 7396 ▲

(a) Si G est un groupe fini et H un sous-groupe de G, alors $\mathrm{card}(G) = \mathrm{card}(G/H)\mathrm{card}(H)$. En particulier, l'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.

(b) L'ordre de a^p est $\frac{k}{k\wedge p}$.

(c) On note que l'ordre de $\mathscr{S}_3$ est 6. Un groupe fini d'ordre 6 est cyclique si est seulement s'il possède un élément d'ordre 6. Il y a trois éléments d'ordre 2, deux éléments d'ordre 3, et un élément d'ordre 1 dans $\mathscr{S}_3$. Alors le groupe n'est pas cyclique. Noter aussi qu'il n'est pas commutatif.

(d) Soit $D \in k[X]$ un polynôme non nul. Pour tout polynôme A de $k[X]$ il existe un unique couple $(Q,R) \in (k[X])^2$ tel que $A = DQ+R$ et $\deg(R) < \deg(D)$.

(e) Soit A et B deux entiers de Gauss avec $B \neq 0$. Alors il existe deux entiers de Gauss Q et R tels que $A = BQ+R$ et $N(R) < N(B)$.

Correction de l'exercice 7397 ▲

(a) Puisque $\mathrm{pgcd}(51,131) = 1$, la classe $[51]$ est inversible dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$. En utilisant l'algorithme d'Euclide on trouve que $1 = 131\times(-7)+51\times 18$. Alors, dans $\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}$ on a $51^{-1} = 18$ et $92\times 51^{-1} = -39\times 18 = -47 = 84$.

(b) Un élément a dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ est un diviseur de 0 s'il existe un élément non nul b tel que $ab = 0 \bmod 16$. Alors les diviseurs de 0 sont tous les éléments a dans $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{pgcd}(a,16) \neq 1$. On trouve : $2,4,6,8,10,12,14$.

Correction de l'exercice 7398 ▲

(a) Si le polynôme $P = X^4+X+1$ est réductible, il est divisible par un polynôme de degré 1 (donc X ou $X+1$) ou par un polynôme irréductible de degré 2 (donc X^2+X+1). On vérifie que les polynômes $X, X+1$ et X^2+X+1 ne divisent pas P, alors P est irréductible.

(b) On effectue la division euclidienne de $3X^5+X^2+X+7$ par X^4+X+1. Puisque $3X^5+X^2+X+7 = X^5+X^2+X+1 = X(X^4+X+1)+1 = 1$ dans A, la classe de $3X^5+X^2+X+7$ n'est pas nulle. L'anneau $\mathbb{F}_2[X]/P$ est un corps si et seulement si le polynôme P est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. Comme X^4+X+1 est irréductible, A est un corps. A est de cardinal $2^4 = 16$.

(c) On a une relation $\alpha^4+\alpha+1 = 0$ dans A, alors $\alpha^4 = \alpha+1$. Le groupe des inversibles $A^\times$ de A contient 15 éléments, alors le théorème de Lagrange implique que l'élément inversible α vérifie $\alpha^{15} = 1$.

(d) Puisque $\alpha^4+\alpha+1 = 0$ et $\alpha^{15}-1 = 0$, les polynômes $X^{15}-1$ et X^4+X+1 représentent la même classe (classe nulle) dans A. Alors $X^{15}-1$ est bien un multiple de X^4+X+1 dans $\mathbb{F}_2[X]$.

Correction de l'exercice 7399 ▲

(a) Soit C le code donné. L'alphabet de C est l'ensemble $\{0,1\}$. La longueur des mots est 15, alors la longueur de C est 15. La matrice génératrice donnée est exactement la matrice du code engendré par le polynôme $g = 1+X^3+X^4$. Puisque g est un diviseur unitaire de $X^{15}-1$ de degré 4,

$$X^{15}-1 = (X^4+X^3+1)(X^{11}+X^{10}+X^9+X^8+X^6+X^4+X^3+1)$$

le code engendré par g est cyclique, de dimension $11 = 15-4$. Alors C est cyclique de dimension 11 engendré par g. Il contient 2^{11} mots.

(b) Oui, voir au-dessus.

(c) On trouve le polynôme de contrôle :

$$h = \frac{X^{15}-1}{g} = X^{11}+X^{10}+X^9+X^8+X^6+X^4+X^3+1$$

Alors la matrice de contrôle est

$$H = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Deux colonnes quelconques de H sont toujours linéairement indépendantes, donc la distance du code est au moins 3. Puisque le code contient un mot de poids 3, alors la distance est en fait 3. Alors C peut corriger une erreur et en détecter deux.

(d) Un mot m appartient à C ssi $H\cdot \mathrm{tr}m = \vec{0}$.
Le produit de H et $m = (0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,0,0,1,1)$ est la colonne obtenue comme somme des colonnes étoilées

$$\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 0&0&0&*&0&*&*&*&*&*&*&0&0&*&*\\ \hline 1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1&0\\ 0&0&0&1&1&1&1&0&1&0&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$

soit $(0,0,0,0)$. Alors m est un mot de code.

Correction de l'exercice 7400 ▲

(a) On vérifie que les premiers entre 2 et $\sqrt{613}$, c'est-à-dire, $2,3,5,7,11,13,17,19,23$ ne divisent pas 613. Alors le nombre 613 est premier.

(b) Puisque $613 = 1 \bmod 4$, d'après le Théorème de deux carrés, 613 peut s'écrire comme somme de deux carrés.

(c) $35^2 = 1225 = -1 \bmod 613$.

(d)
$$\frac{613}{35+i} = \frac{613\times(35-i)}{(35+i)\times(35-i)} = \frac{613\times(35-i)}{1225+1} = \frac{35}{2} - \frac{i}{2}.$$

Un entier de Gauss le plus proche à $\frac{35}{2}-\frac{i}{2}$ est 17. Alors

$$613 = 17\times(35+i)+(18-17i)$$

(e) On a trouvé que 35 est une racine de -1 modulo $p = 613$. Trouvons pgcd(613,35+i). Puisque $613 = 17\times(35+i)+(18-17i)$, $\mathrm{pgcd}(613,35+i) = \mathrm{pgcd}(35+i,18-17i) = 18-17i$. Donc

$$613 = N(18-17i) = 18^2+17^2$$

Correction de l'exercice 7401 ▲

(a) Pour tout $P \in k[X]$ et $D \in k[X]^*$, il existe un unique couple (Q,R) dans $k[X]$ tel que $P = QD+R$ et $\deg(R) < \deg(D)$.

(b) Pour tout $a \in \mathbb{Z}[i]$ et $d \in \mathbb{Z}[i]^*$, il existe un couple (q,r) dans $k[X]$ tel que $a = qd+r$ et $|r| < |d|$.

(c) L'ordre de a^k est $\frac{n}{n\wedge k}$. En effet, soient $d = n \wedge k$, $n' = n/d$ et $k' = k/d$, de sorte que $n' \wedge k' = 1$. Pour tout m, on a $a^{km} = 1 \iff n|km \iff n'|k'm \iff n'|m$. Donc l'ordre de a^k est n'.

(d) Soit G d'ordre 13 et x un élément non trivial de G. Par le théorème de Lagrange, x ne peut qu'être d'ordre 13. Mais $\langle x \rangle$ contient déjà 13 éléments, donc $G = \langle x \rangle$. Ainsi G est abélien car monogène.

(e) Par exemple 7, puisque 7 est congru à 3 modulo 4 ou bien pusique ni 7-1^2=6, ni $7-2^2 = 3$, ni avec $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$, $7-n^2 < 0$ ne sont des carrés.

Correction de l'exercice 7402 ▲

(a) Non, car $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ ne contient aucun élément d'ordre 9.

(b) Non, car ils n'ont pas le même ordre.

(c) Les groupes $(\mathbb{F}_7)^\star$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont-ils isomorphes ? Par le théorème sur le groupe des inversibles d'un corps fini et par le théorème chinois, ils sont tous les deux cycliques d'ordre 6, donc isomorphes.

Correction de l'exercice 7403 ▲

(a) Soit $P = X^2+X+1$. Le polynôme P est sans racine, donc s'il est réductible, il se factorise en deux polynômes de degré 2. Or $(X^2+X+1)^2 = X^4+X^2+1$, qui est différent de P. Donc P est irréductible.

(b) L'idéal $< X^4+X^3+1 >$ est premier car X^4+X^3+1 est irréductible, donc il est maximal car $\mathbb{F}_2[X]$ est principal, comme tout anneau de polynômes sur un corps. Or le quotient par un idéal maximal est un corps. Donc A est un corps. De plus, il est isomorphe au polynôme de $\mathbb{F}_2[X]$ de degré au plus 3, donc A possède 16 éléments.

(c) Puisque A est un corps, A^* contient 15 éléments, donc l'ordre de tout élément de A^* est un diviseur de 15. En particulier, $\alpha^{15} = 1$.

(d)

$$\begin{aligned}
\alpha^1 &= \alpha\\
\alpha^2 &= \alpha^2\\
\alpha^3 &= \alpha^3\\
\alpha^4 &= \alpha^3+1\\
\alpha^5 &= \alpha^4+\alpha = \alpha^3+\alpha+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^6 &= \alpha^4+\alpha^2+\alpha = \alpha^3+\alpha^2+\alpha+1\\
\alpha^7 &= \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha = \alpha^2+\alpha+1\\
\alpha^8 &= \alpha^3+\alpha^2+\alpha\\
\alpha^9 &= \alpha^4+\alpha^3+\alpha^2 = \alpha^2+1\\
\alpha^{10} &= \alpha^3+\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha^{11} &= \alpha^4+\alpha^2 = \alpha^3+\alpha^2+1\\
\alpha^{12} &= \alpha^4+\alpha^3+\alpha = \alpha+1\\
\alpha^{13} &= \alpha^2+\alpha\\
\alpha^{14} &= \alpha^3+\alpha^2\\
\alpha^{15} &= 1
\end{aligned}$$

(e) $\alpha^7+\alpha^8+\alpha^9=\alpha^7(1+\alpha+\alpha^2)=\alpha^{7+7}=\alpha^{14}=\alpha^3+\alpha^2$.

(f) $(1+\alpha+\alpha^3)^{-1}=(\alpha^5)^{-1}=\alpha^{10}$.

Correction de l'exercice 7404 ▲

(a) Le groupe $\mathbb{F}_{19}^{\times}$ est d'ordre 18, donc les ordres possibles des éléments sont les diviseurs de 18 (et ce sont exactement ceux-là car $\mathbb{F}_{19}^{\times}$ est cyclique), c'est-à-dire 1,2,3,6,9,18. Or $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^6=7$, $2^9=-1$, donc 2 est bien un générateur de $\mathbb{F}_{19}^{\times}$.

(b) $C=2^3=8$.

(c) $D=2^7=14$. $C^d=8^7=2^{21}=2^3=8$. $mC^d=11\times 8=12$. Finalement, $(M_1,M_2)=(14,12)$.

(d) Il utilise la formule : $m=M_2(M_1^c)^{-1}$. On vérifie en effet que $12\times 14^{-3}=12\times(-5)^{-3}=12\times(-7)=-8=11$.

(e) Le message envoyé est $3\times 8^{-3}=3\times 2^{-9}=-3=16$. Pour crypter $m=16$, Alice a choisi une clé privée k et a envoyé le message $(2^k,\ 16\times 8^k)$. Or on sait que $2^3=8$ et que le logarithme discret est un isomorphisme, donc Alice a choisi cette fois la clé privée 3. Et effectivement, on retrouve bien $(2^3,\ 16\times 8^3)=(8,3)$.

Correction de l'exercice 7410 ▲

(a) On observe que $v_3=v_2-v_1$ et que $v_4=v_1+v_2$ donc $V=Vect(v_1,v_2,v_3,v_4)=Vect(v_1,v_2)$. Comme de plus v_1 et v_2 sont linéairement indépendants, (v_1,v_2) est une base de V. Donc $\dim(V)=2$. Le système n'est pas libre car par exemple $v_3=v_2-v_1$ est une relation de dépendance linéaire non triviale. Le système n'est pas générateur de $\mathbb{R}^4$ car $\dim(V)=2<4$ donc $Vect(v_1,v_2,v_3,v_4)=V\neq\mathbb{R}^4$.

(b) Comme nous l'avons vu dans la question 1, (v_1,v_2) est une base de V. On échelonne la matrice dont les lignes sont les vecteurs v_1 et v_2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Maintenant on voit que l'on peut compléter la base (v_1,v_2) en une base de $\mathbb{R}^4$ en ajoutant les vecteurs $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$ car la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang 4.

(c) $V=Vect(v_1,v_2)$. Maintenant soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. $(x,y,z,t)\in V$ si et seulement si $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $(x,y,z,t)=\lambda v_1+\mu v_2$. Il nous suffit donc de voir pour quelles valeurs de (x,y,z,t) ce système d'équations a une solution. Le système s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 1 & 1 & t \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z+x \\ 0 & -1 & t-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z+x-2y \\ 0 & 0 & t-x+y \end{array}\right)$$

Le système a donc une solution si et seulement si $z+x-2y=0$ et $t-x+y=0$,ce sont des équations cartesiennes pour V, c'est à dire que

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \ / \ x-2y+z=0 \ \ et \ \ -x+y+t=0\}.$$

(d) H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car c'est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire et homogène.

(e)

$$\begin{aligned} H &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ -3x+y+2z-t=0\} \\ &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ y=3x-2z+t\} \\ &= \{(x,3x-2z+t,z,t) \ / \ x,z,t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,3,0,0)+z(0,-2,1,0)+t(0,1,0,1) \ / \ x,z,t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

On a donc $H = Vect((1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1))$. De plus le système $((1,3,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1))$ est une base de H car

$$rang\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Et donc $\dim(H) = 3$.

(f) $v_3 \in H$ car $-3\times 1+1\times 1+2\times 1-1\times 0 = 0$. Mais $v_1 \notin H$ car $-3\times 1+1\times 0+2\times -1-1\times 1 = -6 \neq 0$.

Comme $v_3 \in V$ et que l'on vient de voir que $v_3 \in H$, on en déduit que $v_3 \in V\cap H$ et donc que $Vect(v_3) \subseteq V\cap H$. On a donc obtenu que $\dim(V\cap H) \geqslant 1$. Comme de plus $V\cap H \subseteq V$ on sait que $\dim(V\cap H) \leqslant 2$. Maintenant si on avait $\dim(V\cap H) = 2$ cela impliquerait que $V\cap H = V$ et donc que $V \subseteq H$, ce qui est faux car $v_1 \in V$ mais $v_1 \notin H$. On obtient donc $\dim(V\cap H) = 1$.

En utilisant la formule de Grassmann on obtient alors que

$$\dim(V+H) = \dim(V)+\dim(H)-\dim(V\cap H) = 2+3-1 = 4.$$

(g) On a vu que $\dim(V\cap H) = 1$ et que $Vect(v_3) \in V\cap H$ donc on obtient $Vect(v_3) = V\cap H$ et donc (v_3) est une base de $V\cap H$.

Correction de l'exercice 7411 ▲

(a)

$$A = [f]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 \\ -6 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Pour montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment un système libre de $\mathbb{R}^3$, on considère $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

et on veut montrer qu'alors nécessairement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Cela revient à montrer que le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

possède pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. On applique alors l'algorithme de Gauss à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Après avoir échelonné complètement cette matrice, on obtient le système équivalent suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui a pour unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment donc un système libre de 3 éléments dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc ils forment un système également générateur de $\mathbb{R}^3$ et c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) La matrice de passage $P := [Id_{R^3}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice de passage $[Id_{\mathbb{R}^3}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}}$ de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$ est l'inverse de la matrice de passage $[Id_{\mathbb{R}^3}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ i.e. $[Id_{R^3}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} = P^{-1}$. Pour calculer l'inverse de P, on applique l'algorithme de Gauss à la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Pour ce faire, on reprend les opérations effectuées sur la matrice P lors de la question précédente pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

et ainsi

$$[Id_{R^3}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} = P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) On utilise la formule

$$[f]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}'} = [Id_{\mathbb{R}^3}]^{\mathscr{B}'}_{\mathscr{B}} [f]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}} [Id_{\mathbb{R}^3}]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{B}'}$$

et on a alors

$$M = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(e) On a

$$A = PMP^{-1}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$A^n = PM^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 5^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2^n + 2.3^n & -2^n + 3^n & -2^n + 3^n \\ -2.3^n + 2.5^n & -3^n + 2.5^n & -3^n + 5^n \\ 2.2^n - 2.5^n & 2.2^n - 2.5^n & 2.2^n - 5^n \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 7412 ▲

(a) Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Comme la dérivation est une application linéaire on a bien :

$$\Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\Phi(P) + \mu\Phi(Q).$$

Φ est une application linéaire. Examinons l'image des vecteurs de base $(1, X, X^2)$ par Φ :

$$\Phi(1)(X) = 2X + 1, \qquad \Phi(X)(X) = X^2 + X + 1, \qquad \Phi(X^2)(X) = X^2 + 2X.$$

donc $\Phi(X^j) \in \mathbb{R}_2[X]$ pour $j \in \{0, 1, 2\}$. C'est bien un endomorphisme.

(b) En appliquant la question précédente, on a bien :

$$[\Phi]_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}} = \left[[\Phi(1)]_{\mathscr{B}} \,|\, [\Phi(X)]_{\mathscr{B}} \,|\, [\Phi(X^2)]_{\mathscr{B}}\right] = A$$

(c) $rg(A) = rg(\Phi)$. On applique une méthode de Gauss à la matrice A :

$$rg(A) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

(d) Comme $rg A = 3 = dim\mathbb{R}_2[X]$, l'application Φ est surjective. La matrice A est carrée donc en appliquant le théorème du rang, elle est aussi injective donc bijective.

(e) Le noyau est donnée par :

$$Ker\,(A - I_3) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \text{tels que}\,(A - I_3)^t(x,y,z) = 0\right\}.$$

$$(A - I_3)^t(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow y = 0, \quad 2x = -2z.$$

Ainsi $Ker\,(A - I_3) = \{(x,0,-x), x \in \mathbb{R}\} = vect\,((1,0,-1))$. $(-1,0,1)$ est une base de $Ker\,(A - I_3)$. Une base de $Ker\,(\Phi - I_d)$ est donc : $X^2 - 1$.

(f) Par le théorème du rang : $dim\ Im(\Phi - Id) = dim\mathbb{R}_2[X] - dim\ Ker\,(\Phi - Id) = 3 - 1 = 2$. Il reste à déterminer une base de l'image.

$$\begin{aligned} Im(A - I_3) &= \left\{(A - I_3)^t(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{(y, 2(x+z), y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{(y,x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{y(1,0,1) + x(0,1,0), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= vect\,((1,0,1), (0,1,0)). \end{aligned}$$

La famille $((1,0,1), (0,1,0))$ est une famille génératrice de l'image qui est de dimension 2. C'est donc une base. On en déduit qu'une base de $Ker\,(\Phi - Id)$ est $((X^2+1), X)$.

(g) On a l'égalité ensembliste :

$$\begin{aligned} \left\{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{tels que } 2X\,P = (X^2 - 1)\,P'\right\} &= \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ \text{tels que}\,(\Phi - Id)P = 0\} \\ &= Ker\,(\Phi - Id). \end{aligned}$$

Or une base de $Ker\,(\Phi - Id)$ est $X^2 - 1$. Ainsi on obtient :

$$\left\{P \in \mathbb{R}_2[X], \text{tels que } 2X\,P = (X^2 - 1)\,P'\right\} = \mathbb{R}(X^2 - 1).$$

Correction de l'exercice 7413 ▲

(a) $det(D_2) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, $det(D_3) = x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$

(b) Sommer toutes les lignes à la première ligne, on a :

$$det(D_n) = \begin{vmatrix} x+n-1 & x+n-1 & \dots & \dots & x+n-1 \\ 1 & x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix},$$

et comme tous les éléments sur la première ligne sont $x+n-1$, donc

$$det(D_n) = (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

(c) Par la méthode du pivot de Gauss, $L_2 - L_1, L_3 - L_1 \dots, L_n - L_1$,, on obtient un détermiant de la forme triangulaire

$$det(D_n) = (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Donc $det(D_n) = (x+n-1)(x-1)^{n-1}$.

(d) D_n est inversible si et seulement si $det(D_n) \neq 0$, donc $x \neq 1-n$ et $x \neq 1$.

Correction de l'exercice 7414 ▲

(a) On vérifie aisément que F et G sont des sous-ensembles non vides de E stables par combinaison linéaire.

(b) — L'intersection des sous-espaces F et G est triviale : si $f \in F \cap G$, $f \in F$ implique que f est une fonction polynomiale de degré 1, soit $x \mapsto ax+b$, pour certains réels a et b, mais alors on a $f(0) = b$ et $f'(0) = a$ donc $f \in G$ implique $a = b = 0$ et finalement $f = 0$.

— Il reste à vérifier que E est la somme de F et G. Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E on a évidemment $F + G \subset E$. Pour l'inclusion inverse, soit $f \in E$, soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f'(0)x + f(0)$. Soit $h = f - g$. On a $g \in F$, et $h \in G$ puisque la dérivation est linéaire ; de plus, $f = g + h$. On a donc montré $E = F + G$.

Des deux points précédents, il résulte que $E = F \oplus G$.

Correction de l'exercice 7505 ▲

(a) Comme la somme des masses $2+1$ est non nulle, le barycentre est bien défini. L'abscisse de G est $\frac{2\times(-2)+1\times4}{2+1} = 0$ et l'ordonnée $\frac{2\times1+1\times4}{2+1} = 2$.

(b) $2GA^2 + GB^2 = 2((-2)^2 + (1-2)^2) + (4^2 + (4-2)^2) = 30$.

(c) Soit M un point du plan P.

$$\begin{aligned} 2MA^2 + MB^2 &= 2\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 = 2(\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 \\ &= 3\vec{MG}^2 + < \vec{MG}, 2\vec{GA} + \vec{GB} > + 2\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 \\ &= 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2. \end{aligned}$$

(d) Soit M un point du plan P.

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{L} &\iff 2MA^2 + MB^2 = 42 \iff 3MG^2 + 2GA^2 + GB^2 = 42 \\ &\iff 3MG^2 + 30 = 42 \iff MG^2 = 4. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathscr{L}$ est donc le cercle de centre G et de rayon 2.

Correction de l'exercice 7506 ▲

a. $z \mapsto 3z + 4$ ne représente pas une isométrie à cause du facteur 3.

b. $z \mapsto 3\bar{z} + 4$ ne représente pas une isométrie à cause du facteur 3.

c. $z \mapsto \bar{z} + 4$ représente une isométrie, indirecte (présence de la conjugaison). Il s'agit de la réflexion par rapport à l'axe des abscisses $z \mapsto \bar{z}$ composée par la translation de vecteur $4\vec{\imath}$ dans la direction de l'axe des abscisses. C'est donc une symétrie glissée.

d. $z \mapsto i\bar{z}+4$ représente une isométrie, indirecte (présence de la conjugaison). Il s'agit de la réflexion s par rapport à l'axe des abscisses $z \mapsto \bar{z}$ composée par $z \mapsto iz$, la rotation r de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$ puis par la translation t de vecteur $4\vec{\imath}$. On peut écrire $r \circ s = (s' \circ s) \circ s = s'$ où s' est la réflexion par rapport à la droite d' d'équation $y = x$. On décompose ensuite $4\vec{\imath} = 2(\vec{\imath}+\vec{\jmath}) + 2(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ comme somme d'un vecteur $\vec{v}_2 := 2(\vec{\imath}+\vec{\jmath})$ directeur de d' et d'un vecteur $\vec{v}_1 := 2(\vec{\imath}-\vec{\jmath})$ normal à d'. On en déduit $t \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ t_{\vec{v}_1} \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ s''$ où s'' est la réflexion par rapport à la droite $d'' = d' + \frac{\vec{v}_1}{2}$ parallèle à d'. Maintenant, $t \circ r \circ s = t \circ s' = t_{\vec{v}_2} \circ s''$. Comme $\vec{v}_2$ est parallèle à d'', il s'agit d'une symétrie glissée.

Correction de l'exercice 7507 ▲

(a) Soit A, B, C sont trois points distincts d'un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. La somme des angles de vecteurs se réécrit par symétrie centrale par rapport à C comme

$$\begin{aligned}
&((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) + ((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})) + ((\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})) \\
&\quad = ((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) + ((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})) + ((-\overrightarrow{CA},-\overrightarrow{CB})) \\
&\quad = ((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) + ((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})) + ((\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})) \\
&\quad = ((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})) + ((\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC})) + ((\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA})) \\
&\quad = ((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BA}))
\end{aligned}$$

c'est à dire l'angle plat.

(b) Soit $\mathscr{C}$ un cercle de $\mathscr{P}$ et A un point de $\mathscr{C}$. Soit $\mathscr{C}'$ l'image par une rotation r de centre A du cercle $\mathscr{C}$. Soit B l'autre point d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$. Soit D le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$. Soit $D' = r(D)$ son image par r. Soit O le centre de $\mathscr{C}$ et O' le centre de $\mathscr{C}'$.

Comme D appartient à (AO), le point $D' = r(D)$ appartient à $r((AO)) = (A'O')$. Donc $[A'D']$ est un diamètre de $\mathscr{C}'$. Comme B appartient à $\mathscr{C}$ et comme $[AD]$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, la droite (BD) est orthogonale à (AB). De même, comme B appartient à $\mathscr{C}'$ et comme $[AD']$ est un diamètre de $\mathscr{C}$, la droite (BD') est orthogonale à (AB). Par conséquent, les droites (BD) et (BD') sont confondues et D, D' et B sont alignés.

(c) Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. Dans les triangles BAM' et BAM

$$((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BA})) + ((\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM'})) + ((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B}))$$

et

$$((\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM})) + ((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})) + ((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}))$$

sont deux angles plats. Par somme,

$$((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BM})) + ((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'})) + ((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})) + ((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}))$$

est un angle nul.

Par propriété des angles inscrits, $((\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})) = ((\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'B}))$ et $((\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})) = ((\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}))$. Dans le triangle ADD', on trouve que

$$((\overrightarrow{D'A},\overrightarrow{D'B})) + ((\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}))$$

et la différence d'un angle plat et de $((\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'})) = ((\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AM'}))$ l'angle de la rotation. En conséquence, $((\overrightarrow{BM'},\overrightarrow{BM}))$ est un angle plat et M, $M' = r(M)$ et B sont alignés.

Correction de l'exercice 7508 ▲

(a) La matrice A de la forme bilinéaire symétrique donnée en coordonnées par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}) = xx' + 19yy' + 12xy' + 12x'y$$

est

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 12 & 19 \end{pmatrix}$$

(b) On trouve que $e_1 + 2e_2$ est vecteur propre de A de valeur propre 25 et $2e_1 - e_2$ est vecteur propre de A de valeur propre -5.

(c) Comme la matrice A est inversible, la conique d'équation

$$x^2 + 19y^2 + 24xy + 5y = 0$$

est une conique à centre. Comme les valeurs propres de A sont de signe opposé, il s'agit d'une hyperbole.

Correction de l'exercice 7512 ▲

(a) Comme A a pour coordonnées barycentriques $(1,0,0)$ et le milieu A' de $[BC]$ $(0,1,1)$, la médiane (AA') de ABC a pour équation barycentrique

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} = c - b = 0.$$

De même la médiane (BB') a pour équation barycentrique $a = c$ et (CC') $a = b$.

(b) Les médianes du triangle ABC sont concourantes au point de coordonnées barycentriques $(1,1,1)$..

Correction de l'exercice 7513 ▲

(a) Les éléments du groupe des isométries du plan qui conservent un carré ont tous le centre O du carré comme points fixes. Ce sont donc outre l'identité, des réflexions d'axe passant par O et des rotations de centre O. Il y a quatre rotations Id, r, r^2, r^3 où r est la rotation de centre O et d'angle $+\pi/2$. Il y a aussi quatre réflexions s, rs, r^2s, r^3s.

(b) Comme la composée des réflexions dépend de l'ordre, $(rs)s = r$ et $s(rs) = r^{-1}$, ce groupe n'est pas commutatif.

(c) Le groupe des déplacements du plan qui conservent un carré est un sous-groupe du groupe commutatif des rotation de centre O. Il est donc commutatif.

Correction de l'exercice 7514 ▲

On construit le symétrique $s(d)$ par rapport à O de la droite d. Comme le symétrique de A doit être sur d, A doit être sur $s(d)$ et sur le cercle $\mathscr{C}$.

Correction de l'exercice 7516 ▲

On considère l'isobarycentre G des points A, B, C, D. Par associativité, G est le barycentre des barycentres I de $(A,1), (B,1)$ et J de $(C,1), (D,1)$ affecté des masses $(I, 1+1)$ et $(J, 1+1)$. Par conséquent, G est au milieu de I, J. En particulier, les droites joignant les milieux des cotés opposés du tétraèdre sont concourantes en G.

Correction de l'exercice 7517 ▲

Une base orthonormée du sous-espace $vect(e_1, e_1+e_2+e_3)$ est $f_1 = e_1, f_2 = \frac{e_2+e_3}{\sqrt{2}}$. Pour la compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il suffit de considérer $f_3 = f_1 \wedge f_2 = \frac{e_3-e_2}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 7597 ▲

(a) Par définition de cosh, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cosh(z) = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$. Par conséquent, z est solution de $\cosh(z) = 8i$ si et seulement si e^z est solution de

$$X^2 - 8iX + 1 = 0.$$

si et seulement si $e^z = (4+\sqrt{17})i = (4+\sqrt{17})e^{-i\frac{\pi}{2}}$
quadou $e^z = (4-\sqrt{17})i = (\sqrt{17}-4)e^{-i\frac{\pi}{2}}$, si et seulement si $z \in \log(4+\sqrt{17}) + i(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z})$ ou $z \in \log(\sqrt{17}-4) + i(-\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z})$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} z^i = -1 &\iff e^{i\log z} = e^{i\pi} \\ &\iff i\log z = i\pi \mod 2i\pi \\ &\iff \log z = \pi \mod 2\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = e^{(2k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Les solutions sont les nombres complexes de la forme $e^{(2k+1)\pi}$ avec k entier.

Correction de l'exercice 7598 ▲

(a) On définit une détermination du logarithme en posant

$$l_+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta}(r>0, 0<\theta<2\pi) & \longmapsto & \log_{\mathbb{R}}(r)+i\theta. \end{array}$$

(b) On définit une détermination du logarithme en posant

$$\ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}-L & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = re^{i\theta}(r>0, 0\leqslant\theta<2\pi) & \longmapsto & \begin{cases} \text{si } \mid z-2\mid \leqslant 1 \quad \text{et} \quad Im(z) \geqslant 0, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i(\theta+2\pi). \\ \text{si } \mid z-2 \mid > 1, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i\theta \end{cases} \end{array}$$

On vérifie que ℓ est continue : en particulier sur le disque ouvert de centre $(2,0)$ et de rayon 1, ℓ coïncide avec la fonction $\log + 2i\pi$, qui est continue. On vérifie aussi que pour tout $z \in \mathbb{C}-L$, $e^{\ell(z)} = z$: c'est donc une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}-L$.

Correction de l'exercice 7599 ▲

(a) L'application

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

est un paramétrage du cercle unité du plan complexe euclidien parcouru dans le sens trigonométrique.

(b) Comme le rayon de convergent de la série qui définit cosh est infini, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!}$ est normalement donc uniformément convergente sur le cercle unité vers la fonction $\frac{\cosh z}{z}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} \frac{\cosh z}{z} dz &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\partial\Delta} \frac{z^{2n-1}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{(\gamma(\theta))^{2n-1}}{(2n)!} \gamma'(\theta) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} i e^{i(2n)\theta} d\theta = 2i\pi.\end{aligned}$$

(c) Comme l'intégrale de la fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ sur le chemin fermé $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$ n'est pas nulle, la fonction $\frac{\cosh(z)}{z}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$.

Correction de l'exercice 7600 ▲

(a) Question de cours.

(b) L'application sin est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc

$$I_1 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z-0} dz = (2i\pi)\sin(0) = 0.$$

(c) L'application $\frac{\sin(z)}{z}$ se prolonge en 0 par la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$ de rayon de convergence infini donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc

$$I_2 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^2} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\frac{\sin(z)}{z}}{z-0} dz = (2i\pi) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}(0) = 2i\pi.$$

(d) L'application $\frac{\sin(z)-1}{z^2}$ se prolonge en 0 par la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$ holomorphe sur $\mathbb{C}$. Donc $\int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)-1}{z^3} dz = (2i\pi) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}(0) = 0$. Donc,

$$I_3 = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{\sin(z)-1}{z^3} dz + \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = \int_{\partial\Delta} \frac{1}{z^3} dz = 0.$$

(e) L'application $\sin(z)$ admet $-\cos(z)$ comme primitive sur $\mathbb{C}^\times$ et même sur $\mathbb{C}$.
L'application $\frac{\sin(z)}{z}$ se prolonge sur $\mathbb{C}$ en la somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$. Elle admet donc sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{C}^\times$ la primitive $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$.
L'application $\frac{\sin(z)}{z^2}$ a une intégrale non nulle sur le chemin fermé $\partial\Delta$ de $\mathbb{C}^\times$: elle n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$.
L'application $\frac{\sin(z)}{z^3} = \frac{\sin(z)-1}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} + \frac{1}{z^3}$ admet comme primitive sur $\mathbb{C}^\times$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{z^{2n}}{2n} - \frac{1}{4z^4}.$$

Correction de l'exercice 7601 ▲

(a) On définit une détermination du logarithme en posant

$$\begin{array}{rccc} l_+ : & \mathbb{C}-]-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta}(r>0, -\pi<\theta<\pi) & \longmapsto & \log_{\mathbb{R}}(r) + i\theta. \end{array}$$

C'est une application continue, et même holomorphe telle que

$$\forall z \in \mathbb{C}-]-\infty,0], \ \ e^{l_+(z)} = z.$$

(b) On définit une détermination du logarithme en posant

$$\begin{array}{rccc} \ell : & \mathbb{C}-L & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z = re^{i\theta}(r>0, 0\leqslant\theta<2\pi) & \longmapsto & \left\{\begin{array}{l} \text{sur } U, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i(\theta+2\pi). \\ \text{sur } V, \\ \quad \ell(z) = \log_{\mathbb{R}}(r)+i\theta \end{array}\right. \end{array}$$

On vérifie que ℓ est continue : en particulier sur le disque ouvert de centre $(2,0)$ et de rayon 1, ℓ coïncide avec la fonction $\log + 2i\pi$, qui est continue. On vérifie aussi que pour tout $z \in \mathbb{C}-L$, $e^{\ell(z)} = z$: c'est donc une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}-L$.

Correction de l'exercice 7602 ▲

(a) Soit $\Delta_r(a)$ le disque de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r>0$. Supposons que $Im(f)$ ne rencontre pas $\Delta_r(a)$. Alors,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)-a| \geqslant r.$$

L'application $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{f(z)-a}$ est alors bien définie, holomorphe sur $\mathbb{C}$ et majorée en module par $\frac{1}{r}$. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante. Puisque $w \mapsto \frac{1}{w-a}$ est injective sur $\mathbb{C}-\{a\}$, en déduit que f est constante.

(b) Une telle application entière ne rencontre par le disque $\Delta_1(-2i)$: elle est donc constante, d'après la question précédente.

(c) Soit $z \in \mathbb{C}-\{-i\}$,

$$\begin{aligned} 1-|h(z)|^2 &= 1-\frac{z-i}{z+i}\frac{\overline{z+i}}{\overline{z+i}} = 1-\frac{|z|^2+i(z-\bar{z})+1}{|z+i|^2} \\ &= 1-\frac{|z|^2-i(z-\bar{z})+1+2i(z-\bar{z})}{|z+i|^2} = \frac{4Im(z)}{|z+i|^2}. \end{aligned}$$

(d) Sur $\mathbb{H}$, $Im(z)>0$ et donc $|h(z)|<1$. L'image du demi-plan $\mathbb{H}$ par l'application h est donc incluse dans le disque unité Δ ; c'est donc une partie bornée de $\mathbb{C}$.

(e) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$ une application holomorphe. Par composition, $h \circ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application holomorphe dont l'image est bornée. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante. Comme h est injective, on en déduit que f est constante.

Correction de l'exercice 7603 ▲

(a) Soit $r>0$ tel que $\overline{\Delta_r(c)}$ est un disque fermé inclus dans D. Le résidu de f en c est

$$Res_c(f) := \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_r(c)} f(z)dz.$$

Cette intégrale ne dépend pas de r tel que $\overline{\Delta_r(c)}$ est inclus dans D.

(b) Si f admet une primitive sur $D-\{c\}$, l'intégrale de f sur tout chemin fermé de $D-\{c\}$ est nulle. En particulier, le résidu de f en c est nul.

(c) D'après la question précédente, il est nécessaire que le résidu de f en c soit nul. Réciproquement, si le résidu de f en c est nul, montrons que f admet une primitive sur Δ. Par le développement au voisinage de c, on sait qu'il existe $a_{-3}, a_{-2}, a_{-1} \in \mathbb{C}$ et une fonction $\tilde{f}$ holomorphe sur Δ tels que

$$\forall z \in \Delta, \quad f(z) = \frac{a_{-3}}{(z-c)^3}+\frac{a_{-2}}{(z-c)^2}+\frac{a_{-1}}{z-c}+\tilde{f}(z).$$

Comme le résidu de f en c est nul, $a_{-1}=0$. L'application $z \mapsto \frac{a_{-3}}{(z-c)^3}+\frac{a_{-2}}{(z-c)^2}$ admet $z \mapsto -\frac{a_{-3}}{2(z-c)^2}-\frac{a_{-2}}{z-c}$ comme primitive sur $\Delta-\{c\}$. Puisque Δ est étoilé et que $\tilde{f}$ est holomorphe sur Δ, elle admet une primitive sur Δ donc sur $\Delta-\{c\}$. En conclusion, si le résidu de f en c est nul, f admet-elle une primitive sur $\Delta-\{c\}$.

Correction de l'exercice 7604 ▲

(a) Soit D un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$. Soit Γ un chemin fermé dans D. Soit C un ensemble fini de points de $D-\Gamma$. Soit $f : D-C \to \mathbb{C}$ holomorphe. Alors,

$$\sum_{c\in C\cap Int(\Gamma)} Ind_\Gamma(c)Res_c(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma f(z)dz.$$

(b) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Soit $\Delta_r(a)$ un disque dont l'adhérence est incluse dans D. Soit $b \in \Delta_r(a)$. Soit $R > 0$ tel que $\overline{\Delta_r(a)} \subset \Delta_R(a) \subset D$. L'ouvert $\Delta_R(a)$ est étoilé, le chemin $\partial\Delta_r(a)$ est inclus dans $\Delta_R(a)$ et ne contient pas b ; l'application $f : \Delta_R(a)-\{b\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{f(z)}{z-b}$ est holomorphe : par le théorème des résidus, on en déduit

$$Ind_{\partial\Delta_r(c)}(b)Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-b}dz.$$

Reste à noter que, en développant f en série entière au voisinage de b, $Res_b(\frac{f(z)}{z-b}) = f(b)$.

(c) On réitère le raisonnement précédent avec l'application $f_k : \Delta_R(a)-\{b\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$. Le résidu de $\frac{f(z)}{(z-b)^{k+1}}$ en b est le coefficient de $(z-b)^k$ dans le développement en série entière de f centré en b. Comme ce développement est donné par le développement de Taylor, le coefficient de $(z-b)^k$ est $\frac{f^{(k)}(b)}{k!}$.

Correction de l'exercice 7605 ▲

(a) Soit f et g deux applications holomorphes sur un ouvert étoilé D de $\mathbb{C}$. Soit Γ un chemin fermé simple dans D. On suppose que

$$\forall z \in \Gamma,\ \ |f(z)-g(z)| < |g(z)|.$$

Alors f et g ont le même nombre de zéros compté avec multiplicité dans l'intérieur de Γ.

(b) L'ouvert $\mathbb{C}$ est étoilé et contient le chemin $\partial\Delta_2$ dont l'intérieur est Δ_2. Les deux applications $z \mapsto z^4$ et p sont polynômiales donc holomorphes sur $\mathbb{C}$. Soit $z \in \partial\Delta_2$. Alors

$$|p(z)-z^4| = |7z+1| \leqslant 7|z|+1 \leqslant 7\times 2+1 = 15 < 2^4 = |z^4|.$$

Par le théorème de Rouché, le polynôme p et $z \mapsto z^4$ ont le même nombre de zéros compté avec multiplicités dans Δ_2, c'est à dire 4. Comme p est non nul de degré 4, tous ses zéros sont dans Δ_2.

Correction de l'exercice 7606 ▲

(a) L'application $f\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ est associée à l'application $f_\mathbb{R}\ :\ (x,y) \mapsto (x,-y)$. Comme $f_\mathbb{R}$ est polynomiale, elle est de classe C^∞. Par contre $\frac{\partial re(f)}{\partial x} = 1 = -\frac{\partial Im(f)}{\partial y}$. L'application f qui ne vérifie les équation de Cauchy-Riemann en aucun point n'est pas holomorphe.

(b) On paramètre le cercle de centre 3 et de rayon 1 par $z = 3+e^{i\theta}$.

$$\int_{|z-3|=1}\frac{dz}{z-3} = \int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi}d\theta = 2i\pi \neq 0.$$

Comme l'intégrale de $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ sur le chemin fermé cercle de centre 3 et de rayon 1 inclus dans le domaine $\mathbb{C}-\{3\}$ n'est pas nulle, cette application n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}-\{3\}$.

(c) Le disque unité est convexe : il est donc étoilé par rapport à chacun de ses points.

(d) L'ouvert $\mathbb{C}-\{3\}$ n'est pas étoilé, car l'application holomorphe $z \mapsto \frac{1}{z-3}$ n'y admet pas de primitive.

Correction de l'exercice 7607 ▲

(a) Le point d'affixe $r\frac{1+it}{1-it}$ est de module r et ses coordonnées $x = re(\xi(t)) = r\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = Im(\xi(t)) = r\frac{2t}{1+t^2}$ vérifient l'équation $y = t(x+r)$. Il est donc à l'intersection de la droite d'équation $y = t(x+r)$ avec le cercle C_r. Comme l'équation $r\frac{1+it}{1-it} = -r$ est équivalente à $1 = -1$, l'affixe $r\frac{1+it}{1-it}$ n'est pour aucune valeur de t égale à $-r$.

(b) Comme t est réel, $t \mapsto r\frac{1+it}{1-it}$ est quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule jamais. Elle est donc dérivable et

$$\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \frac{i}{1+it} - \frac{-i}{1-it} = \frac{2i}{1+t^2}.$$

(c)

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z} = \int_{C_r-\{-r\}} \frac{dz}{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi'(t)}{\xi(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i}{1+t^2}.$$

(d) Par ailleurs, $\int_{C_r} \frac{dz}{z} = 2i\pi Res_0(\frac{1}{z}) = 2i\pi$. Donc, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

Correction de l'exercice 7608 ▲

(a) Soit $z \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} Im(h_A(z)) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} = \frac{\det A}{|cz+d|^2} Im(z) > 0. \end{aligned}$$

Donc, $h_A(z) \in \mathbb{H}$ et h_A envoie le demi-plan $\mathbb{H}$ sur lui-même.

(b) Soit $z = x+iy \in \mathbb{H}$. Soit $A \in SL(2,\mathbb{R})$.

$$h_A(i) = z \iff ai+b = z(ci+d) \iff ai+b = (dx-cy)+i(cx+dy)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} b &=& dx-cy \\ a &=& cx+dy \end{array} \right. .$$

On peut par exemple choisir, puisque y est strictement positif, $A = \frac{1}{\sqrt{y}}\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 7609 ▲

(a) Soit D un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : D \to \mathbb{C}$ une application holomorphe. Alors, pour tout disque $\Delta_r(a)$ dont l'adhérence est incluse dans D,

$$\forall b \in \Delta_r(a), \quad \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_r(a)} \frac{f(z)dz}{z-b} = f(b).$$

(b) Soit f une fonction holomorphe sur Δ. On paramètre le cercle $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$ par $z = \frac{1}{2}e^{i\theta}$. Alors, $f(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta} \frac{f(z)dz}{z-0} = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\frac{1}{2}e^{i\theta})}{\frac{1}{2}e^{i\theta}} \frac{1}{2} ie^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{2}e^{i\theta}) d\theta$ est une quantité réelle car f prend des valeurs réelle sur le cercle $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$. L'application f prend donc une valeur réelle en 0.

(c) Soit f une fonction holomorphe sur Δ constante égale à c sur le cercle $\partial\Delta_{\frac{1}{2}}$. Soit $b \in \Delta_{\frac{1}{2}}$. Par le théorème de représentation,

$$f(b) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_{\frac{1}{2}}}\frac{f(z)dz}{z-b} = c\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial\Delta_{\frac{1}{2}}}\frac{dz}{z-b} = cRes_b(\frac{1}{z-b}) = c.$$

Correction de l'exercice 7610 ▲

(a) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe bornée en module par M. On sait qu'elle est développable en séries entières sur $\mathbb{C}$ avec une série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence infini. On peut donc appliquer la formule de Gutzmer : pour tout $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant M^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = M^2$$

Donc, pour tout n in $\mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}^+$,

$$|a_n|^2 r^{2n} \leqslant M^2.$$

En particulier, tous les a_n avec $n \neq 0$ sont nuls et f est constante

(b) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application holomorphe telle que $M(r) \leqslant r$.

$$\sum_{n\geqslant 0}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant M(r)^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = M(r)^2 \leqslant r^2$$

Donc, pour tout n in $\mathbb{N}$ et tout $r \in \mathbb{R}^+$, $|a_n|^2 r^{2n} \leqslant r^2$. En particulier, tous les a_n avec $n \neq 0, 1$ sont nuls et f est affine.

Correction de l'exercice 7611 ▲

(a) On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n z^n$ et $r \in]0, R[$. On sait alors que $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée en module. Soit $z \in \mathbb{C}$

$$\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right| \leqslant |a_n r^n|\frac{\left|\frac{z}{r}\right|^n}{n!}$$

est le terme général d'une suite bornée en module car $\frac{\left|\frac{z}{r}\right|^n}{n!}$ est borné. Par conséquent, $\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_n}{n!}z^n$ a un rayon de convergence infini.

(b) L'application $f - g$ est somme sur Δ_r connexe d'une série entière centrée en 0 et s'annule sur l'ensemble non discret $]-R, R[$. Par le principe des zéros isolés, $f = g$ sur Δ_r.

(c) Soit $a \in \mathbb{R}$. Les deux applications $z \mapsto \sin(a+z)$ et $z \mapsto \sin(a)\cos(z) + \cos(a)\sin(z)$ sont développables en séries entières sur $\mathbb{C}$ et coïncident sur $\mathbb{R}$ par la formule d'addition des sinus sur $\mathbb{R}$. Par la question précédente, elles coïncident sur $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 7612 ▲

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sin z = c \quad &\iff \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = c \iff e^{iz} - 2ic - e^{-iz} = 0 \\ &\iff \quad (e^{iz})^2 - 2ice^{iz} - 1 = 0 \text{ car } e^{iz} \neq 0.\end{aligned}$$

(b) Soit $c \in [-1,1]$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de $\sin z = c$. Alors e^{iz} est solution de $X^2 - 2icX - 1 = 0$. Comme $c \in [-1,1]$, les solutions de cette équation sont $ic + \sqrt{1-c^2}$ et $ic - \sqrt{1-c^2}$, toutes les deux de module 1,

$$|e^{iz}| = e^{-y} = 1$$

et donc $y = 0$, et z est donc réel.

(c)

$$\begin{aligned} e^{i(a+b)} &= e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{-i(a+b)} &= e^{-ia}e^{-ib} = (\cos a - i \sin a)(\cos b - i \sin b) \\ &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b) - i(\sin a \cos b + \cos a \sin b). \end{aligned}$$

(d)

$$\sin(a+b) = \frac{e^{i(a+b)} - e^{-i(a+b)}}{2i} = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

d'après la question précédente.

(e) Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z + \sin z = 2 &\iff \frac{1}{\sqrt{2}}\cos z + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin z = \sqrt{2} \\ &\iff \sin(\frac{\pi}{4} + z) = \sqrt{2} \\ &\iff (e^{iz}) \text{ est solution de } X^2 - 2i\sqrt{2}X - 1 = 0 \\ &\iff e^{iz} = i\sqrt{2} + i \text{ ou } e^{iz} = i\sqrt{2} - i \\ &\iff e^{iz} = (\sqrt{2}+1)e^{\frac{\pi}{2}} \text{ ou } e^{iz} = (\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{2}} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\qquad \text{ou } iz = \log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = (\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1) \\ &\qquad \text{ou } z = (\frac{\pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

Les soultions de l'équation $\cos z + \sin z = 2$ dans $\mathbb{C}$ sont les nombres complexes de la forme $(\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}+1)$ ou $z = (\frac{pi}{2} + 2k\pi) - i\log_{\mathbb{R}}(\sqrt{2}-1)$ avec k entier.

Correction de l'exercice 7613 ▲

(a)

$$\begin{aligned} Im\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{1}{2i}(\frac{az+b}{cz+d} - \overline{\frac{az+b}{cz+d}}) \\ &= \frac{1}{2i}(\frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}) = \frac{1}{2i}\frac{(ad-bc)(z-\bar{z})}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{Im(z)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

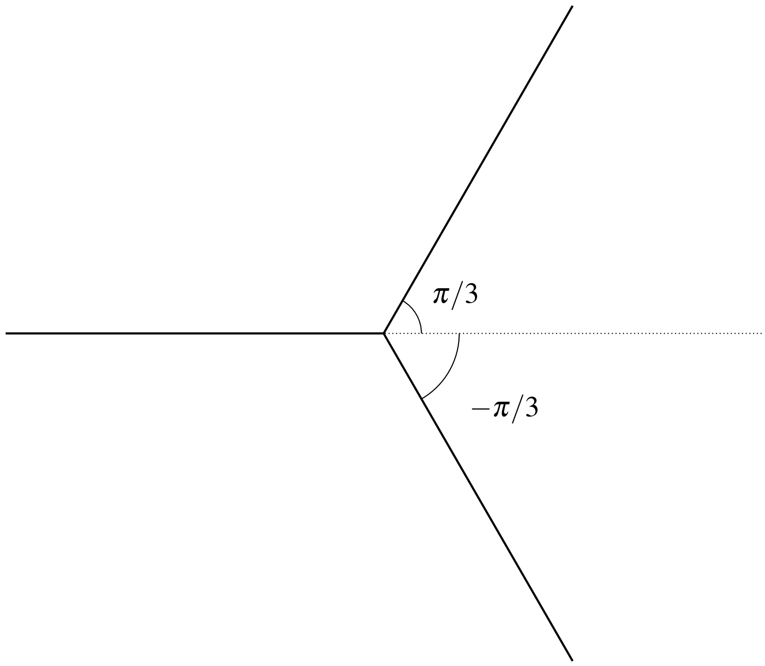
Par conséquent, si $Im(z) > 0$, alors $Im\,(h_A(z)) > 0$ et h_A envoie $\mathbb{H}$ sur $\mathbb{H}$.

(b) Soit $z=x+iy$. On a $\frac{xi-y}{1\times i+0}=z$. La matrice $\begin{pmatrix}x & -y\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ convient ainsi donc que la matrice $\frac{1}{y}\begin{pmatrix}x & -y\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ de déterminant 1.

Correction de l'exercice 7614 ▲

(a) Soit $z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}$ avec $r\geqslant 0$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.

$$\begin{aligned} z^3\notin\mathbb{C}^- \quad & \Longleftrightarrow \quad z^3\in\mathbb{R}^- \Longleftrightarrow r^3e^{i3\theta}\in\mathbb{R}^- \Longleftrightarrow 3\theta\simeq\pi \mod 2\pi \\ & \Longleftrightarrow \quad \theta\simeq\frac{\pi}{3} \mod \frac{2\pi}{3} \Longleftrightarrow \theta=\frac{-\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta=\frac{\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \theta=\pi. \end{aligned}$$



Le domaine D est composé de $\mathbb{C}$ moins les demi-droites noires.

(b) Soit $z=re^{i\theta}\in\mathbb{C}$ avec $r\geqslant 0$ et $\theta\in]-\pi,\pi]$.
— Si $\theta\in]-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}[$, $3\theta\in]-\pi,\pi[$ et donc, $f(z)=\log(z^3)=\log_{\mathbb{R}}(r^3)+i3\theta=3\log_{\mathbb{R}}(r)+3i\theta=3\log(z)$.
— Si $\theta\in]\frac{\pi}{3},\pi[$, $3\theta\in]\pi,3\pi[$ et $3\theta-2\pi\in]-\pi,\pi[$ et donc, $f(z)=\log(z^3)=\log_{\mathbb{R}}(r^3)+i(3\theta-2\pi)=3\log_{\mathbb{R}}(r)+3i\theta-2i\pi=3\log(z)-2i\pi$.
— Si $\theta\in]-\pi,-\frac{\pi}{3},[$, $3\theta\in]-3\pi,-\pi[$ et $3\theta+2\pi\in]-\pi,\pi[$ et donc, $f(z)=\log(z^3)=\log_{\mathbb{R}}(r^3)+i(3\theta+2\pi)=3\log_{\mathbb{R}}(r)+3i\theta+2i\pi=3\log(z)+2i\pi$.

La fonction f n'est donc pas continu aux points de la demi-droite d'angle $\frac{\pi}{3}$ ni aux points de la demi-droite d'angle $-\frac{\pi}{3}$ où la fonction $\imath og$ est continue. On sait que le saut de la branche principale log du logarithme entre $(-\pi^+$ et π^- est de $2i\pi$. Le saut de f est donc de $6i\pi$. Elle n'est donc pas continue aux points de la demi-droite d'angle π.

(c) La réponse a été donnée dans la question précédente.

Correction de l'exercice 7627 ▲

(a)
$$\begin{array}{rccc} \log: & \mathbb{C}-]-\infty,0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \ln_{\mathbb{R}}(r)+i\theta \quad \substack{\text{après avoir choisi l'écriture } z=re^{i\theta} \\ \text{avec } r\in[0,+\infty[\text{ et } \theta\in]-\pi,\pi[} \end{array}$$

(b) Une primitive d'une application continue f sur $\mathbb{C}$ est une application holomorphe F sur $\mathbb{C}$ dont la dérivée complexe F' est l'application f.

(c) Comme la dérivée complexe d'une application holomorphe est holomorphe, il n'y a pas de tels exemples.

(d)

$$\begin{array}{rccc} Id: & \Delta & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z \end{array}$$

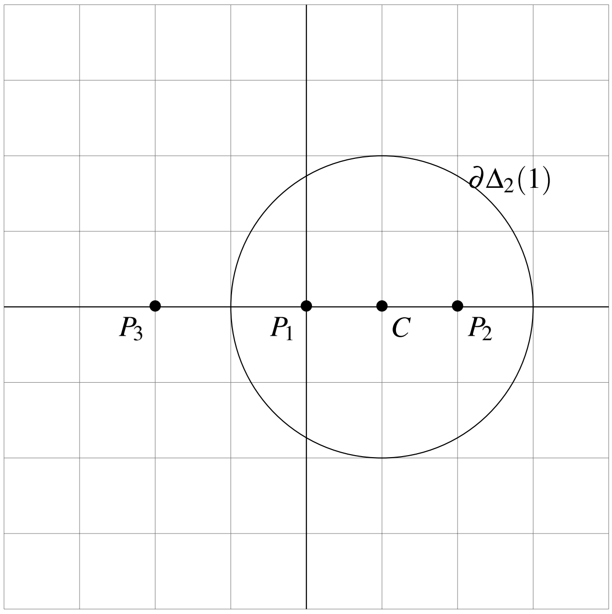
est holomorphe non-constante.

(e) Par le théorème de Liouville, toute application entière bornée est constante : il n'y a donc pas de tels exemples.

(f)

$$\begin{array}{rccc} C: & \mathbb{H} & \longrightarrow & \Delta \\ & z & \longmapsto & \frac{z-i}{z+i} \end{array} \quad \text{ou bien} \quad \begin{array}{rccc} e: & \mathbb{H} & \longrightarrow & \Delta \\ & z & \longmapsto & \exp(2i\pi z) \end{array}$$

Correction de l'exercice 7628 ▲



On écrit la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} = \frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{4z^2}.$$

Les premier et troisième termes correspondent aux pôles simples P_2 et P_1 à l'intérieur du cercle $\partial\Delta_2(1)$. Donc,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \left(\frac{5}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{4z}\right) dz = (2i\pi)(\frac{5}{16} - \frac{1}{4}) = \frac{i\pi}{8}.$$

Le deuxième terme correspond au pôle P_3 à l'extérieur du cercle $\partial\Delta_2(1)$ donc, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{16(z+2)}dz = 0$. Le dernier terme est l'intégrale sur un chemin fermé de l'application exacte $z \mapsto \frac{1}{4z^2}$ de primitive $z \mapsto -\frac{1}{4z}$. Donc, $\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{1}{4z^2}dz = 0$. En conclusion,

$$\int_{\partial\Delta_2(1)} \frac{z^2+z-1}{z(z^2-4)}dz = \frac{i\pi}{8}.$$

Une autre démarche serait : on écrit la décomposition en éléments simples de la fraction rationelle

$$\frac{1}{z^2(z^2-4)} = \frac{1}{16}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{16(z+2)} - \frac{1}{4z^2}.$$

et donc avec $f(z)=z^2+z-1$ holomorphe sur $\mathbb{C}$

$$\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)}=\frac{1}{16}\frac{f(z)}{z-2}-\frac{f(z)}{16(z+2)}-\frac{f(z)}{4z^2}.$$

Par le théorème de Cauchy sur les disques, puisque 0 et 2 sont dans $\Delta_2(1)$ mais pas -2,

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{z^2+z-1}{z^2(z^2-4)} &= \frac{1}{16}\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{z-2}-\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{16(z+2)}-\int_{\partial\Delta_2(1)}\frac{f(z)}{4z^2}\\ &= \frac{2i\pi f(2)}{16}-0-\frac{2i\pi f'(0)}{4}=\frac{5i\pi}{8}-\frac{i\pi}{2}=\frac{i\pi}{8}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7629 ▲

(a) Supposons que 0 n'est pas dans l'adhérence de l'image de f. Il existe alors $r>0$ tel que $f(\mathbb{C})\cap\Delta_r=\emptyset$. Autrement dit,

$$\forall z\in\Delta,\ |f(z)|\geqslant r.$$

L'application f ne s'annule donc pas dans $\mathbb{C}$ et la fonction holomorphe $1/f$ est majorée par $1/r$ sur $\mathbb{C}$. Par le théorème de Liouville, elle est donc constante, ainsi que f.

(b) Soit $c\in\mathbb{C}$. En appliquant le résultat précédent à $f-c$ on obtient que c est dans l'adhérence de l'image de f. Par conséquent, l'adhérence de l'image de f est $\mathbb{C}$.

Correction de l'exercice 7630 ▲

(a) Si f avait une singularité apparente ou polaire en 0, comme $z\mapsto 1/z$ a une singularité polaire en 0, $f+1/z$ aurait une singularité apparente ou polaire. Or pour tout entier naturel n, et pour tout réel x strictement positif, $x^n\exp(\frac{1}{x})\geqslant x^n\frac{1}{(n+1)!x^{n+1}}$. Donc, $\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}}x^n\exp(\frac{1}{x})=+\infty$. Par conséquent $z\mapsto\exp(\frac{1}{z})$ a une singularité essentielle en 0, ainsi que f.

(b) En écrivant le développement en séries entières de l'exponentielle, on obtient

$$\forall z\in\mathbb{C}^\star,\ \ f(z)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{-n}}{n!}.$$

Or la série, $z+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{-n+1}}{(-n+1)n!}$ est, comme l'application exponentielle, normalement convergente sur $\mathbb{C}^\star$ et y définit donc une application holomorphe F telle que F' qui se calcule comme somme des dérivées, par convergence normale, vérifie $F'=f$: c'est une primitive de f.

(c) Puisque l'application f est exacte sur D et que $\partial\Delta$ est un chemin orienté fermé dans D, $\int_{\partial\Delta}fdz=0$. On en déduit

$$\int_{\partial\Delta}\exp(\frac{1}{z})dz=\int_{\partial\Delta}\frac{1}{z}dz=2i\pi.$$

Correction de l'exercice 7631 ▲

(a) Cette application est continue en i : elle ne tend donc pas vers $+\infty$ en module quand z tend vers i. Elle ne tend donc pas vers $+\infty$ en module quand $|z|$ tend vers 1.

(b) Par le principe du maximum appliqué à la fonction holomorphe $\Delta\to\mathbb{C}$, $z\mapsto 1/f(z)$,

$$|1/f(0)|\leqslant\sup_{|z|=r_n}|1/f(z)|=\frac{1}{\inf_{|z|=r_n}|f(z)|}\leqslant 1/n.$$

Donc, pour tout n, $|f(0)|\geqslant n$, ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de telle suite. Donc, dans le cas où f n'a pas de zéro, $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1.

(c) Comme $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1, il existe $r\in]0,1[$ tel que pour tout $z\in\Delta$ avec $|z|>r$, $|f(z)|>1$. L'application f ne s'annule donc pas sur $\Delta-\overline{\Delta_r}$. Par le théorème des zéros isolés, puisque f holomorphe n'est pas constante, elle n'admet qu'un nombre fini de zéro dans le compact $\overline{\Delta_r}$ et par suite dans tout le disque Δ. Soit $P(z)$ le polynôme unitaire qui a pour zéros les zéros de f avec les mêmes multiplicités. L'application $h=\frac{f}{P}$ a des singularités isolées en les zéros de f. Au voisinage de ces zéros, le développement en séries entières de f montre que les singularités sont apparentes et que h tend vers une valeur finie non nulle en ces points. L'application h se prolonge donc par continuité en une application holomorphe g sur Δ. L'égalité $f=hP$ sur $\Delta-f^{-1}(0)$ se prolonge par continuité en $f=gP$ sur Δ. Par construction, par le choix des multiplicités, l'application g n'a pas de zéro aux zéros de f, et n'a donc pas de zéro sur Δ. Comme $|f(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1 et que $|P|$ tend vers une valeur finie en tout point de $\partial\Delta$, $|g|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1. Le cas précédent montre que l'existence d'une telle application g est absurde. Donc, $|f(z)|$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers 1.

Correction de l'exercice 7633 ▲

Une telle application serait majorée en module par le maximum du module de ses valeurs sur le carré compact délimité par les points d'affixes $0,1,1+i,i$. Elle serait donc entière et bornée donc constante, par le théorème de Liouville. Il n'y a donc pas de telle application.

Correction de l'exercice 7634 ▲

(a) Sous cette hypothèse, on peut considérer les applications holomorphes sur D, f/g et g/f. Elles sont majorées en module par 1 sur le disque unité, et donc aussi sur le disque fermé par le principe du maximum. Elles sont donc toutes les deux de module 1 sur le disque unité, et donc constantes sur le disque unité par le théorème de l'application ouverte. Par connexité de D, elles sont constantes sur D. Il existe donc $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $f=\lambda g$ sur D. Par égalité des modules, on conclut que $|\lambda|=1$.

(b) Non, les applications $z\mapsto z$ et $z\mapsto z^2$ sont de même module sur le disque unité, mais ne sont pas proportionnelles.

Correction de l'exercice 7635 ▲

(a) On note d'abord que les indices de w_1,w_2,w_3 par rapport à Γ sont respectivement $-1,1$ et 0. L'application $\mathbb{C}-\{w_1,w_2,w_3\}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec des pôles simples en w_1,w_2,w_3 de résidu respectif $\lim_{z\to w_1}(z-w_1)\frac{1}{(z-w_1)(z-w_2)(z-w_3)}=\frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}$, $\frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}$, $\frac{1}{(w_3-w_1)(w_3-w_2)}$. Par le théorème de Cauchy,

$$\begin{aligned}
A &= 2i\pi\left(Ind_\Gamma(w_1)Res_{w_1}(f)+Ind_\Gamma(w_2)Res_{w_2}(f)+Ind_\Gamma(w_2)Res_{w_3}(f)\right)\\
&= 2i\pi\left(-\frac{1}{(w_1-w_2)(w_1-w_3)}+\frac{1}{(w_2-w_1)(w_2-w_3)}+0\right)\\
&= \frac{2i\pi(w_1+w_2-2w_3)}{(w_2-w_1)(w_1-w_3)(w_2-w_3)}
\end{aligned}$$

(b) L'application $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto\sin z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ étoilé : son intégrale sur le chemin fermé Γ est donc nulle.

(c) Par le théorème de Cauchy pour les dérivées,

$$C=2i\pi Ind_\Gamma(w_1)\sin'(w_1)=-2i\pi\cos(w_1).$$

Correction de l'exercice 7636 ▲

(a) Sur le bord de Δ_2

$$|P(z)-z^4| = |6z+3| \leqslant 6\times 2+3 = 15 < 16 = 2^4 = |z|^4.$$

Par le théorème de Rouché, P de degré 4 a donc, comme $z\mapsto z^4$ ses quatre racines dans Δ_2.

(b) Sur le bord de Δ

$$|P(z)-(6z+3)| = |z^4| = 1 < 6-3 \leqslant |6z|-3 \leqslant |6z+3|.$$

Par le théorème de Rouché, le polynôme P n'a, comme $z\mapsto 6z+3$ qu'une racine dans Δ.

(c) Sur le bord de $\Delta_{\frac{1}{3}}$

$$|P(z)-(6z+3)| = |z^4| = \frac{1}{81} < 3-6/3 = 3-|6z| \leqslant |6z+3|.$$

Par le théorème de Rouché, le polynôme P n'a, comme $z\mapsto 6z+3$ aucune racine dans $\Delta_{\frac{1}{3}}$.

(d) Par la question 2, $z\mapsto \frac{4z^3+6}{z^4+6z+3}z$ est méromorphe sur $\Delta_{1+\varepsilon}$ avec comme seul pôle un point a. Le résidu en a de P'/P est la multiplicité 1 de a comme zéro de P. Par conséquent, le résidu en a de $\frac{4z^3+6}{z^4+6z+3}z$ est a. La formule demandée résulte donc du théorème des résidus.

Correction de l'exercice 7639 ▲

(a) On note $f = u+iv$.

$$\begin{aligned}\Delta|f|^2 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2(x,y)+v^2(x,y))\\ &= 2(\left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right|^2)\\ &\quad +2u\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+2v\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

Par les identités de Cauchy-Riemann pour la fonction holomorphe $f = u+iv$, et par symétrie de Schwarz, les deux dernières quantités entre parenthèses sont nulles. On trouve donc

$$\Delta|f|^2 = 4|f'|^2.$$

(b) On applique la formule précédente à chaque f_i pour obtenir

$$\Delta\sum_{i=1}^N |f_i(z)|^2 = 4\sum_{i=1}^N |f_i'(z)|^2 = 0.$$

On en déduit que chaque application holomorphe f_i est de dérivée identiquement nulle et donc constante sur D connexe.

Correction de l'exercice 7640 ▲

Soit $\varphi(z) = \frac{4z+3}{4+3z}$. Soit $\zeta\in\partial\Delta$,

$$|\varphi(\zeta)|^2 = \frac{16|\zeta|^2+9+12(\zeta+\overline{\zeta})}{16+9|\zeta|^2+12(\zeta+\overline{\zeta})} = 1.$$

Par le principe du maximum appliqué à φ holomorphe sur le disque $\Delta_{4/3}$ on obtient que pour tout $z\in\Delta$, $|\varphi(z)|\leqslant 1$.

Correction de l'exercice 7641 ▲

Les zéros du polynôme $2z^2-5z+2=(z-2)(2z-1)$ et donc les singularités de l'application méromorphe $f(z)=\frac{1}{2z^2-5z+2}$ sont 2 et $1/2$. Ce sont des pôles simples. Leurs résidus respectifs sont $res_2(f)=\lim_{z\to 2}(z-2)\frac{1}{2z^2-5z+2}=\frac{1}{3}$ et $res_{1/2}(f)=\lim_{z\to 1/2}(z-\frac{1}{2})\frac{1}{2z^2-5z+2}=-\frac{1}{3}$. Leurs indices par rapport au chemin orienté $\partial\Delta_r$ sont 0 ou 1, suivant qu'ils sont ou pas dans le disque Δ_r. On trouve donc, par le théorème des résidus appliqué à l'application méromorphe f : (les valeurs de r exclues sont $1/2$ et 2 car les cercles correspondants passent par une singularité.)

(a) si $0<r<1/2$, $I_r=0$.

(b) si $1/2<r<2$, $I_r=-2i\pi/3$.

(c) si $2<r$, $\quad I_r=1/3-1/3=0$.

Correction de l'exercice 7688 ▲

Le vecteur vitesse est $\dot{c}(t)=(-4\sin t,-5\cos t,3\sin t)$. Sa norme est 5. Par conséquent, le paramétrage par $C\ :\ t\mapsto(4\cos t/5,5-5\sin t/5,-3\cos t/5)$ est un paramétrage par la longueur d'arc. Le nouveau vecteur vitesse est $\dot{C}(t)=(-4/5\sin t/5,-\cos t/5,3/5\sin t/5)$. Le vecteur accélération est $\ddot{C}(t)=(-4/25\cos t/5,1/5\sin t/5,3/25\cos t/5)$. Sa norme $1/5$ est la courbure κ. Le vecteur normal unitaire est donc $n(t)=(-4/5\cos t/5,\sin t/5,3/5\cos t/5)$. Le vecteur binormal est $\dot{C}(t)\times n(t)=(-3/5,0,-4/5)$. Comme il est constant, la torsion est nulle par les formules de Frenet.

Oui la courbe est plane, puisque la torsion est nulle. On peut aussi remarquer que la courbe est dans le plan d'équation $3X+4Z=0$.

Correction de l'exercice 7689 ▲

(a) Le vecteur vitesse de la courbe C' est $(1,2t,0)$ de norme $\sqrt{1+4t^2}$. La longueur de la courbe C' est donc $l[C']=\int_0^1\sqrt{1+4t^2}dt$. La courbe C est paramétrée par $x=t$, $y=t^2$ $z=2/3t^3$ pour t parcourant $[0,1]$. Le vecteur vitesse de la courbe C est $(1,2t,2t^2)$ de norme $\sqrt{1+4t^2+4t^4}=1+2t^2$. La longueur de la courbe C est donc $l[C]=\int_0^1 1+2t^2dt$. Comme pour tout $t\in[0,1],0\leqslant 1+4t^2\leqslant(1+2t^2)^2$, pour tout $t\in[0,1]$, $\sqrt{1+4t^2}\leqslant(1+2t^2)$ et par intégration $l[C']\leqslant l[C]$.

(b) En utilisant le changement de variables $2t=\sinh(u)$, on obtient le calcul de primitive

$$\begin{aligned}4\int\sqrt{1+4t^2}dt &= 2\int\cosh^2 u du=\int(\cosh(2u)+1)du\\ &= \sinh(2u)/2+u\\ &= \sinh u\cosh u+u\\ &= 2t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2}).\end{aligned}$$

Par conséquent, la longueur de C' est $1/4[2t\sqrt{1+4t^2}+\ln(2t+\sqrt{1+4t^2})]_0^1=1/4(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))$. La longueur de C est $1+2/3$.

Correction de l'exercice 7690 ▲

(a) La surface S est le graphe de la fonction $\mathscr{C}^\infty$ $f\ :\ (y,z)\mapsto-2(2z^2+y^2)$. Elle est donc régulière.

(b) La surface S est paramétrée par $F(u,v)=(-2(u^2+2v^2),u,v)$.

(c) Le point A est obtenu au point de paramètre $(1,-1)$ On calcule $\frac{\partial F}{\partial u}=(-4u,1,0)=(-4,1,0)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}=(-8v,0,1)=(8,0,1)$. Ces deux vecteurs forment une base de l'espace tangent à S au point de paramètre (u,v).

(d) Comme S est la ligne de niveau 0 de la fonction $\varphi(x,y,z)=2(2z^2+y^2)+x$ sur $\mathbb{R}^3$, on calcule $(grad\varphi)_A=(1,4y,8z)=(1,4,-8)=:n$. Ce vecteur est bien orthogonal au plan tangent obtenu à la question 3.

(e) Comme $< V, n >=< (27,-29,-1),(1,4,-8) >= -81 \neq 0$, le vecteur V n'est pas dans le plan tangent à S en A.

Correction de l'exercice 7691 ▲

On paramètre $\mathscr{E}$ en coordonnées sphériques par $F(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, 1/\sqrt{5}\cos\varphi)$ avec $\theta \in [0,2\pi[$ et $\varphi \in [0,\pi]$. Le plan tangent est engendré par les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial\theta} = (-\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\varphi, 0)$ et $\frac{\partial F}{\partial\varphi} = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, -1/\sqrt{5}\sin\varphi)$. Dans cette base, la matrice de la première forme fondamentale est $\begin{pmatrix}\sin^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi + 1/5\sin^2\varphi\end{pmatrix}$. L'élément de volume est $1/\sqrt{5}\sin\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\theta d\varphi$. L'aire de l'ellipsoïde est donc

$$\begin{aligned}
A[\mathscr{E}] &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\theta=0}^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\varphi d\theta \\
&= 2\pi\int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\varphi\sqrt{1+4\cos^2\varphi}d\varphi \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{5}}\int_{t=-1}^{1}\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{\pi}{\sqrt{5}}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})) \\
&= \pi(2+\frac{\ln(2+\sqrt{5})}{\sqrt{5}}).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7692 ▲

On paramètre la surface S par $F(u,v) = (u,v,u^2-v^2)$. L'espace tangent en p est engendré par $(\frac{\partial F}{\partial u})_p = (1,0,2u)_p = (1,0,0)$ et $(\frac{\partial F}{\partial v})_p = (0,1,-2v)_p = (0,1,0)$. La matrice de la première forme fondamentale dans cette base est en p de paramètre $(0,0)$ $\begin{pmatrix}1+4u^2 & -4uv \\ -4uv & 1+4v^2\end{pmatrix} = Id$. La matrice de la seconde forme fondamentale se calcule à l'aide du vecteur normal $n = (\frac{\partial F}{\partial u}\times\frac{\partial F}{\partial v})_p = (0,0,1)$ par $\begin{pmatrix} < \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, n > & < \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}, n > \\ < \frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}, n > & < \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}, n >\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & -2\end{pmatrix}$. Comme la matrice de la première forme fondamentale est l'identité, cette dernière matrice est aussi celle de l'endomorphisme de Weingarten. La courbure de Gauss est donc le déterminant -4. Les deux directions principales sont dirigées par les vecteurs $\frac{\partial F}{\partial u}_p = (1,0,0)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}_p = (0,1,0)$.

Correction de l'exercice 7693 ▲

(a) La fonction courbure est continue et non constante sur le compact $[0,\ell]$. Elle atteint donc son maximum et son minimum en deux points distincts P et Q. Comme elle est continûment dérivable, en ces points sa dérivée est nulle. Ce sont donc des coins.

(b) On utilise la formule de Frenet $\dot{n}(t) = -\kappa(t)\dot{c}(t)$.

$$\int_0^{\ell}\dot{\kappa}c(t) = -\int_0^{\ell}\kappa\dot{c}(t) = \int_0^{\ell}\dot{n}(t) = n(\ell)-n(0) = 0.$$

(c) Par hypothèse, l'ordonnée de $\dot{\kappa}(t)c(t)$ serait de signe constant sur les deux parties de la courbe délimitées par P et Q. Ceci contredit l'annulation de l'intégrale.

(d) S'il n'y a que trois coins, la courbe est partagée en trois parties. Sur deux des parties adjacentes $\dot{\kappa}$ a le même signe. Le raisonnement précédent en déplaçant la courbe, de sorte que $\dot{\kappa}$ soit de signe constant sur chaque demi-plan $(y \geqslant 0)$ et $(y \leqslant 0)$ aboutit à une contradiction.

Correction de l'exercice 7697 ▲

(a) Les composantes de l'application c sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. La dérivée de la dernière composante n'est jamais nulle. La courbe c est donc régulière.

(b) Pour tout paramètre t, $\|\dot{c}(t)\| = \sqrt{2+t^2} \geqslant \sqrt{2}$. Donc,

$$L[c_{|[a,b]}] = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt \geqslant \sqrt{2}(b-a).$$

(c) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2 = t^2 = (t)^2.$$

Par conséquent, $\mathscr{C}$ est dans la quadrique d'équation $x^2+y^2=z^2$.

(d) Soit $t \in \mathbb{R}$, $c(-t) = \begin{pmatrix} -t\cos t \\ t\sin t \\ -t \end{pmatrix}$ et se déduit donc de $c(t)$ par le demi-tour autour de l'axe des ordonnées (d'équation $x=z=0$).

(e)

(f)

$$c(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \\ t \end{pmatrix}; \dot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \\ 0 \end{pmatrix}; \dddot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\cos t + t\sin t \\ -3\sin t - t\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\det \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t & -2\sin t - t\cos t & -3\cos t + t\sin t \\ \sin t + t\cos t & 2\cos t - t\sin t & -3\sin t - t\cos t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = t^2+6$$

Par ailleurs,

$$\dot{c}(t)\wedge\ddot{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cos t + t\sin t \\ -2\sin t - t\cos t \\ 2+t^2 \end{pmatrix}$$

dont la norme au carré est t^4+5t^2+8. La fonction torsion de c est donc

$$\tau(t) = \frac{t^2+6}{t^4+5t^2+8}.$$

Correction de l'exercice 7698 ▲

L'application F est injective et différentiable car ses composantes le sont. On calcule

$$X =_u= \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} \sinh(u)\cos(v) \\ \sinh(u)\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_v = \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\cosh(u)\sin(v) \\ \cosh(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

pour déterminer le rang de dF, qui est donc 2. Par conséquent, l'image S de F est une surface régulière. On peut aussi déterminer

$$G = \cosh^2 u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On s'en sert aussi pour trouver un champs de vecteurs normaux unitaires différentiable $N = \frac{1}{\cosh u}\begin{pmatrix} -\cos v \\ -\sin v \\ \sinh u \end{pmatrix}$.

On peut ensuite, soit calculer

$$W(X_u) = -dN \cdot X_u = -\frac{\partial N}{\partial u} = -(\cosh^{-2} u)X_u$$

$$\text{et} \quad W(X_v) = -dN \cdot X_v = -\frac{\partial N}{\partial u} = (\cosh^{-2} u)X_v$$

et en déduire que les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten W sont $-\cosh^{-2} u$ et $\cosh^{-2} u$. Donc, W est de demi-trace nulle, et la courbure moyenne de ImF est partout nulle.

On peut aussi calculer $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ pour obtenir $H = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule $G^{-1} = \cosh^{-2} u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc $W = G^{-1}H = \begin{pmatrix} -\cosh^{-2} u & 0 \\ 0 & \cosh^{-2} u \end{pmatrix}$. Comme la demi-trace de W est nulle, la surface S est partout de courbure moyenne nulle.

Correction de l'exercice 7699 ▲

(a) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $a_i n \mathbb{R}$, $c(t+a) = t_{(0,0,a)}(c(t))$, l'image de F est invariante par toutes les translations de vecteur parallèle à $\vec{k}$, le troisième vecteur de la base canonique.
On remarque aussi que $F(-t,-s)$ s'obtient à partir de $F(t,s)$ par le demi-tour d'axe des abscisses. Ce demi-tour conserve donc l'image de F.

(b) Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

$$(1-t^2)^2(1-(1-t^2)) = (1-t^2)^2 t^2 = [t(1-t^2)]^2.$$

Donc, l'image de F est incluse dans l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.
Soit (x,y,z) inclus dans l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$. Si $x = 0$, $y = 0$ et $(x,y,z) = F(1,z)$. Si $x \neq 0$, soit $s = z$ et $t = y/x$. On vérifie que $F(t,s) = (x,y,z)$.
Donc, l'image de F est l'ensemble d'équation $y^2 = x^2(1-x)$.

(c) Au voisinage du point $(0,0,0)$ de l'image de S, la projection sur le plan $x = 0$ donne a chaque point deux antécédents, la projection sur la plan $y = 0$ aussi, et la projection sur la plan $z = 0$ donne à chaque point soit une infinité, soit aucun antécédent. Par conséquent, au voisinage de $(0,0,0)$ l'image de S n'est pas un graphe. L'image de F n'est donc pas une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

Correction de l'exercice 7700 ▲

On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^3$. La fonction f est différentiable sur la sphère comme restriction d'une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^3$. La fonction f continue sur le compact S atteint ses extrema. En un point extremal, la différentielle de la fonction f restreinte à l'espace tangent doit être nulle. Le gradient de f doit donc être normal à l'espace tangent. On trouve que le vecteur $\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ doit être parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Comme x, y et z ne sont pas simultanément nuls sur S, $z = 0$ et $x^2 = y^2$. Puisque $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$ et $y = \pm 1/\sqrt{2}$. En comparant les valeurs en ces quatre points, on trouve que le minimum absolu de la fonction f est donc $-1/2$ atteint au deux points $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$ et $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$. Le maximum absolu de la fonction f est donc $1/2$ atteint au deux points $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)$.

Correction de l'exercice 7701 ▲

(a) Comme les composantes de c sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$. La dérivée de la dernière coordonnée ne s'annule jamais. La courbe c est donc régulière.

(b) Le vecteur vitesse
$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \\ 4 \end{pmatrix}$$
est de norme 5. Comme la courbe c est régulière, on peut trouver un paramétrage par longueur d'arc. Le paramétrage
$$\begin{array}{rccc} e : &]0,5[& \to & \mathbb{R}^3 \\ & s & \mapsto & \begin{pmatrix} 3\cos(s/5) \\ 3\sin(s/5) \\ 4s/5 \end{pmatrix} \end{array}$$
de la forme $e(s) = c(\phi(s))$ est un reparamétrage par longueur d'arc, car de/ds est partout de norme 1.

(c) On utilise le paramétrage par longueur d'arc. Le premier vecteur est le vecteur vitesse $\dot{e}(s) = v(s) = \begin{pmatrix} -3/5\sin(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix}$. Le deuxième est le vecteur normal. Le vecteur accélération est $\ddot{e}(s) = \begin{pmatrix} -3/25\cos(s/5) \\ -3/25\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve que la courbure est $3/25$ et le vecteur normal $n(s) = \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le troisième vecteur est le vecteur binormal $b(s) = v(s) \wedge n(s) = \begin{pmatrix} -3/5\sin(s/5) \\ 3/5\cos(s/5) \\ 4/5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\cos(s/5) \\ -\sin(s/5) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5\sin(s/5) \\ -4/5\cos(s/5) \\ 3/5 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7702 ▲

(a)

(b) L'application F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et injective. On calcule $X_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ et $X_\theta = \begin{pmatrix} -(2+\cos(\varphi))\sin(\theta) \\ (2+\cos(\varphi))\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

Si $\varphi \neq 0$, $\sin(\varphi) \neq 0$ et les deux premières coordonnées sont indépendantes. Si $\varphi = 0$, $X_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ainsi, dF est partout de rang 2 donc un homéomorphisme local. Puisqu'elle est injective, l'application F est donc un paramétrage. L'image T est donc une surface régulière de $\mathbb{R}^3$.

(c) On détermine d'abord la matrice de la première forme fondamentale
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2+\cos(\varphi))^2 \end{pmatrix}$$
On choisit comme champ de vecteurs normaux unitaires
$$N = -\frac{X_\varphi \wedge X_\theta}{2+\cos(\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) \\ -\cos(\varphi) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

On détermine ensuite l'endomorphisme de Weingarten W par

$$WX_\varphi = \frac{\partial N}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ -\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = X_\varphi$$

$$\text{et} \quad WX_\theta = \frac{\partial N}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)} X_\theta$$

On en déduit que les valeurs propres de W sont 1 et $\frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$, et que la courbure de Gauss est donc $K(\varphi,\theta) = \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}$.

(d)

$$\begin{aligned} \int_T K(m)d\sigma(m) &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} K(\varphi,\theta)\sqrt{detG}d\varphi d\theta \\ &= \int_{]-\pi,\pi[\times]-\pi,\pi[} \frac{\cos(\varphi)}{2+\cos(\varphi)}(2+\cos(\varphi))d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\varphi)d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7703 ▲

(a) Comme F est un paramétrage de la surface régulière T, les vecteurs $X_\varphi = \frac{\partial F}{\partial \varphi}$ et $X_\theta = \frac{\partial F}{\partial \theta}$ sont indépendants et forment une base de l'espace tangent à T en $F(\varphi,\theta)$. La matrice imposée est bien celle d'un produit scalaire. Comme elle est constante, elle dépend de façon $\mathscr{C}^\infty$ de (φ,θ).

(b) Comme la matrice de la métrique riemannienne est constante, les symboles de Christoffel sont nuls en tous points et le tenseur de courbure est identiquement nul. On en déduit que la courbure de Gauss est identiquement nulle.

(c) D'après la question précédente $\int_T K(m)d\sigma(m) = 0$

Correction de l'exercice 7710 ▲

(a) La courbure d'un cercle de rayon r est en valeur absolue $1/r$.

(b) Puisque la fonction norme (au carré) ϕ est différentiablement continue et maximale au point de paramètre τ, sa dérivée en τ s'annule. On trouve $\phi'(\tau) = 2 < c(\tau), \dot{c}(\tau) >= 0$. Par ailleurs, comme la fonction c donne un paramétrage par la longueur d'arc, la fonction $t \mapsto \|\dot{c}(t)\|^2$ est constante égale à 1, donc aussi de dérivée nulle en τ. On trouve $2 < \ddot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) >= 0$. Par conséquent, en notant $\vec{n}$ un vecteur normal unitaire à $\dot{c}(\tau)$, on trouve $c(\tau) = +/-\vec{n}$ et $\ddot{c}(\tau) = \kappa(\tau)\vec{n}$.

(c) Puisque la fonction norme ϕ est deux fois différentiablement continue et maximale au point de paramètre τ, sa dérivée seconde en τ est négative. On trouve $\phi''(\tau) = 2 < c(\tau), \ddot{c}(\tau) > +2 < \dot{c}(\tau), \dot{c}(\tau) >= +/-2r\kappa(\tau)+2 \leqslant 0$. Donc, $-/+2r\kappa(\tau) \geqslant 2$ et par suite $-/+r\kappa(\tau)$ est positif de valeur absolue au moins 1. En divisant par $r > 0$, on trouve le résultat.

(d) La courbe est en ses points extrémaux plus courbée que le cercle de rayon r qui la borde.

Correction de l'exercice 7711 ▲

(a) Le plan $T_M\mathscr{S}$ tangent à $\mathscr{S}$ au point M est engendré par les deux vecteurs

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2u_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \begin{pmatrix} 2v_0 \\ -2v_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne du plan $T_M\mathscr{S}$ est obtenue par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\mathscr{S} \iff \begin{vmatrix} 1 & 2v_0 & X \\ 2u_0 & -2v_0 & Y \\ 0 & 1 & Z \end{vmatrix} = 0 \iff -2u_0X + Y + 2(1+2u_0)v_0Z = 0.$$

(b) Il suffit de dire que le plan tangent $T_M\Sigma$ est le noyau de la différentielle de la fonction $\psi : (x,y,z) \mapsto x^5 + y^5 + z^5 - 1$ en (x_0, y_0, z_0). On trouve

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff 5(x_0^4X + y_0^4Y + z_0^4Z) = 0 \iff x_0^4X + y_0^4Y + z_0^4Z = 0.$$

(c) Une équation du graphe $\mathscr{G}$ de f est $z = f(x,y)$. Une équation du plan tangent en M de coordonnées $(x, y, f(x,y))$ est donc

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \in T_M\Sigma \iff Z = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)X + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)Y.$$

Correction de l'exercice 7712 ▲

(a) Par l'exercice précédent, $\mathscr{P}$ a pour plan tangent au point $M(x,y,z)$ le plan d'équation $Z = 2yY - 2xX$. En particulier, le plan tangent en A est le plan d'équation $Z = 0$ engendré par les deux vecteurs de base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Un champs de vecteurs normaux unitaires est donc

$$N(x,y,y) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) L'endomorphisme de Weingarten est donné au point $A(0,0,0)$ par $W_A = -dN(A) : T_A\mathscr{P} \to T_A\mathscr{P}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Ses valeurs propres sont donc -2 et 2. La courbure de Gauss de $\mathscr{P}$ en A est donc -4. Les directions propres sont donc les axes de coordonnées x et y.

Correction de l'exercice 7713 ▲

On trouve en utilisant la relation $\vec{NP'} \parallel \vec{NP}$ que la projection stéréographique depuis le pôle nord sur le plan équatoriale est donnée par

$$\begin{array}{rccc} p : & S^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{x}{1-z} \\ \frac{y}{1-z} \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

et la réciproque

$$\begin{array}{rcl} F:\mathbb{R}^2 & \to & S^2 \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \frac{2x'}{(x')^2+(y')^2+1} \\ \frac{2y'}{(x')^2+(y')^2+1} \\ 1-\frac{2}{(x')^2+(y')^2+1} \end{pmatrix} \end{array}$$

En particulier, la différentielle du paramétrage F au point de paramètres $(0,0)$ est

$$\begin{array}{rrcl} dF(0,0): & T_{(0,0)}\mathbb{R}^2 & \to & S^2_S \\ & \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2X' \\ 2Y' \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

n'est ni une isométrie, ni de déterminant $+/-1$. La projection stéréographique ne conserve donc ni les longueurs, ni les aires. Par contre, la différentielle du paramétrage F au point de paramètres (x',y') est

$$\begin{array}{rrcl} dF(x',y'): & T_{(x',y')}\mathbb{R}^2 & \to & TS^2 \\ & \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\frac{-(x')^2+(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' - 4\frac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ -4\frac{x'y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 2\frac{(x')^2-(y')^2+1}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \\ 4\frac{x'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}X' + 4\frac{y'}{((x')^2+(y')^2+1)^2}Y' \end{pmatrix} \end{array}$$

On vérifie alors que

$$\left\| dF(x',y')\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{4\left\|\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}\right\|^2}{(x')^2+(y')^2+1}.$$

Donc, $dF(x',y')$ conserve les angles.

Correction de l'exercice 7714 ▲

Non, par exemple, les deux surfaces régulières (graphes) d'équation $(z=0)$ et $(z=x^2-y^3)$ s'intersectent sur la courbe d'équation $(z=0, x^2-y^3=0)$ qui est singulière en $(0,0,0)$.

Correction de l'exercice 7723 ▲

Le théorème de Sylow donne que ce nombre N est congru à 1 modulo 5 et divise 24. C'est donc 1 ou 6. Comme $(12)(12345)(12) = (21345)$ n'est pas dans le 5-Sylow (d'ordre 5) $<(12345)>$ il y a un 5-Sylow non distingué. Ainsi, $N=6$.

Correction de l'exercice 7725 ▲

(a) Comme le seul élément non nul de $\mathbb{F}^2$ est 1, $SL(4,\mathbb{F}^2) = GL(4,\mathbb{F}_2)$. Le centre de $GL(4,\mathbb{F}_2)$ composé des homothéties inversibles est donc réduit à l'identité ainsi que celui de $SL(4,\mathbb{F}_2)$. Ainsi, $|PSL(4,\mathbb{F}^2)| = |GL(4,\mathbb{F}^2)| = (2^4-1)(2^4-2)(2^4-2^2)(2^4-2^3) = 15\times 14\times 12\times 8 = 7\times 5\times 3^2\times 2^6$.

(b) Ces deux matrices sont d'ordre 2. Elles ne sont pas conjuguées car la dimension des espaces propres de valeurs propres 1 n'est pas la même pour les deux.

(c) Tous les éléments de $\mathbb{F}_4^\times$ sont des racines 3-ième d'unité par le théorème de Lagrange. Par conséquent toutes les homothéties inversibles sont dans le centre de $SL(3,\mathbb{F}_4)$. Donc, $|PSL(3,\mathbb{F}^4) = GL(3,\mathbb{F}_4)/(3\times 3) = (4^3-1)(4^3-4)(4^3-4^2)/9 = 63\times 60\times 48/9 = 7\times 5\times 3^2\times 2^6$.

(d) i. $P(f^3) = F^3 = F$ car F est une involution. $g = f^3$ n'est donc pas l'identité, mais $g^2 = f^6 = (f^2)^3 = Id$ car f^2 est dans le centre de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ qui est d'ordre 3.

ii. Le corps $\mathbb{F}_4$ est de caractéristique 2. $(g-Id)^2 = g^2-2g+Id = 0$. Par conséquent, $\dim Im(g-Id) \leqslant \dim Ker(g-Id)$ et $\dim Im(g-Id) + \dim Ker(g-Id) = 3$. Comme $g \neq Id$, $\dim Ker(g-Id) = 2$.

iii. Ainsi g est un élément de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ qui admet un plan de points fixes. C'est donc une transvection.

(e) Dans $PSL(4,\mathbb{F}_2)$, il y a au moins deux classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2 par la question 1. Dans $SL(3,\mathbb{F}_4)$ comme toutes les transvections sont conjuguées, la question 4 permet d'affirmer qu'il n'y a qu'une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2. Les deux groupes ne sont donc pas isomorphes.

Correction de l'exercice 7726 ▲

(a) Si q et Q sont équivalents, il existe un isomorphisme linéaire u de E tel que $Q = q \circ u$. Par conséquent Q prend toutes les valeurs que prend q.

(b) On sait dans ce cas, que le vecteur isotrope est dans un plan hyperbolique, sur lequel q est équivalente à la forme $Q(x,y) = xy$ qui prend toutes les valeurs de k.

(c) On procède par récurrence comme dans le cours en utilisant le fait que l'orthogonal d'un espace non singulier dan un espace non-singulier est non-singulier et on s'arrête quand la forme n'a plus de vecteurs isotropes non nuls.

(d) Si dans une telle décomposition, il y a k plans hyperboliques, et dans une autre k', si $k \leqslant k'$, par le théorème de Witt, l'isométrie entre k des plans hyperboliques des deux décompositions induit une équivalence des orthogonaux. En particulier, ils n'ont pas de vecteurs isotropes. Donc $k' = k$. A l'aide de la décomposition, on peut facilement construire un sous-espace totalement isotrope I de dimension k. Ce nombre k est donc inférieur à l'indice de q. On injecte I dans un sous-espace totalement isotrope de dimension maximale M. Par le théorème de Witt, les orthogonaux sont isomorphes et ne contiennent donc pas de vecteurs isotropes. Donc, I est de dimension maximale, et $k = \nu(q)$.

Correction de l'exercice 7727 ▲

(a) Il faut montrer que σ est un morphisme de corps, puis que c'est une bijection. La bijection inverse est alors automatiquement un morphisme de corps. Pour le premier point, σ est facilement multiplicative et $\sigma(1) = 1$. Pour montrer que $\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b)$, on utilise la formule du binôme puis le fait que le corps $\mathbb{F}_5$ est de caractéristique 5. Pour le second point, il suffit de montrer que σ est injective puisque son ensemble de départ a le même cardinal fini que son ensemble d'arrivée. Pour cela, il suffit de dire que σ est un morphisme de corps.

(b) Les formes f_1 et f_3 sont linéaires par rapport à la première variable, et en utilisant l'expression

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) = x\sigma(x') + 3z\sigma(y') + 3y\sigma(z')$$

on montre aussi qu'elles sont σ-semi linéaire par rapport à la seconde variable. Elles sont donc sesquilinéaires. Par contre, comme il n'y a au plus que cinq élément de $\mathbb{F}_{25}$ qui vérifient $\lambda^5 = \lambda$, il existe un $\lambda \in \mathbb{F}_{25}$ tel que $f_2(\lambda \cdot (1,1,1),(1,1,1)) = 3\lambda^5 \neq \lambda \cdot f_2((1,1,1),(1,1,1))$. La forme f_2 n'est donc pas sesquilinéaires.

(c) Par un théorème du cours, c'est le rang qui classifie les formes sesquilinéaires sur les corps finis. Comme f_1 et f_3 ont même rang 3, elles sont équivalentes.

Correction de l'exercice 7728 ▲

(a) La restriction d'une forme alternée sur une droite est nulle. Les droites sont donc toutes isométriques. Par le théorème de Witt, toute isométrie entre deux droites se prolonge à l'espace E non dégénéré en un élément de G. Par conséquent, les droites sont toutes dans la même orbite pour l'action de G.

(b) Les formes alternées sont classifiées à équivalence près par leur rang qui est toujours pair. Par conséquent, les restrictions à un plan sont donc la forme nulle ou une forme symplectique de rang 2.

(c) Par la question précédente et par le théorème de Witt, on conclut comme dans la première question qu'il y a deux orbites sur l'ensemble des plans de E.

Correction de l'exercice 7729 ▲

(a) Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini E. Alors le nombre N d'orbites se calcule par

$$N = \frac{1}{\mathrm{Card}G}\sum_{g\in G}\mathrm{Card}Fix(\phi(g)) = \frac{1}{\mathrm{Card}G}\sum_{x\in E}\mathrm{Card}Stab(x).$$

(b) Le groupe des déplacements du tétraède est isomorphe à $\mathscr{A}_4$. Il y a l'identité, les $8 = 4\times 2$ rotations d'ordre 3, dont l'axe passe par un sommet et le centre de la face opposée, les 3 demi-tours (d'ordre 2) dont l'axe passe par les milieux de deux arêtes opposées.

(c) On considère l'ensemble des coloriages. Il est de cardinal c^4, puisqu'il s'agit de choisir une couleur pour chacune des quatre faces. Le groupe des déplacements du tétraèdre agit sur cet ensemble et les façons différentes de colorier sont les orbites de cette action. Par la formule de Burnside, il suffit de déterminer le nombre de coloriages fixés par chacun des déplacements. Pour l'identité : c^4. Pour les rotations d'ordre 3 : c^2 (si l'axe est vertical, toutes les trois faces obliques doivent avoir la même couleur et la face horizontale doit avoir une couleur.) Pour les demi-tours : c^2 (les faces se correspondent deux à deux.). En conclusion, le nombre de façons différentes de colorier est

$$N = \frac{1}{\mathrm{Card}G}\sum_{g\in G}\mathrm{Card}Fix(\phi(g)) = \frac{1}{c^4}(c^4+11c^2) = \frac{1}{c^2}(c^2+11).$$

Correction de l'exercice 7738 ▲

(a) Le groupe $\mathscr{A}_6$ est simple et n'a donc pas de sous-groupes distingués. De façon plus élémentaire,

$$(1,2)(3,4)\circ(3,4)(1,5) = (1,2)(1,5) = (1,5,2)$$

et l'ensemble proposé n'est donc pas un sous-groupe.

(b) L'intersection de deux espaces vectoriels F et G de dimension 3 dans un espace vectoriel E de dimension 4 est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F + \dim G - \dim(F+G) = 6 - \dim(F+G)$ avec $3 \leqslant \dim F + G \leqslant \min(\dim E, \dim F + \dim G) = 4$ donc soit 3, soit 2. L'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$ est donc soit un plan projectif soit une droite projective.

L'intersection de deux espaces vectoriels F et G de dimension 3 dans un espace vectoriel E de dimension 5 est un sous-espace vectoriel de dimension $\dim F + \dim G - \dim(F+G) = 6 - \dim(F+G)$ avec $3 \leqslant dimF + G \leqslant \min(\dim E, \dim F + \dim G) = 5$ donc soit 3, soit 2, soit 1. L'intersection de deux plans projectifs de $\mathbb{P}^3$ est donc soit un plan projectif, soit une droite projective, soit un point.

(c) Comme une homographie est caractérisée par l'image d'un repère projectif, il suffit de prendre cinq points A, B, C, D E deux à deux distincts : il n'existe aucune homographie qui fixe A, B et C et qui échange D et E par exemple.

Sinon, On choisit un repère projectif et des coordonnées homogènes. Les points de coordonnées $A[1:0], B[0,1], C[1,1]$ et $D[2,1]$ ont pour birapport 2 alors que ceux de coordonnées $A[1:0], B[0,1], C[1,1]$ et $E[3,1]$ ont pour birapport 3. Par conséquent, pour tout point M les quintuplets

$$(A,B,C,D,M) \text{ et } (A,B,C,E,M)$$

ne sont images l'un de l'autre dans aucune homographie.

Correction de l'exercice 7740 ▲

(a) On note O le centre de gravité de $\mathscr{P}_n$. Dans D_n, toutes les isométries, qui sont affines, conservent le centre de gravité. Il n'y a donc aucune translation ni symétrie glissée. Il y a les n rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$ avec $k = 0, \cdots, n-1$. Si n est pair, il y a les $n/2$ symétries orthogonales d'axe (OS) pour chaque sommet S et les $n/2$ symétries d'axe médiateur d'un des n côtés. Si n est impair, il y a les n symétries d'axe médiateur d'un des n côtés.

(b) On considère l'action de D_n sur l'ensemble fini des n sommets de $\mathscr{P}_n$. À l'aide des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$, on montre que l'action est transitive. Le stabilisateur d'un sommet S est le sous-groupe d'ordre 2 engendré par la symétrie orthogonale d'axe (OS) où O est le centre du polygone. Par la seconde formule des classes, D_n est d'ordre $2n$. La liste précédente est donc complète.

(c) Comme n est impair, les 2-Sylow sont d'ordre 2. Ce sont les sous-groupes engendrés par les symétries orthogonales. Si s est une symétrie d'axe d et r la rotation de centre O et d'angle $2k\pi/n$, rsr^{-1} est la symétrie d'axe $r(d)$. Comme n est impair, le groupe engendré par r agit transitivement sur les axes de symétrie. Toutes les symétries sont donc conjuguées.

(d) Les 2-Sylow sont d'ordre 4 dans D_6 d'ordre $2^2 \times 3$. Le groupe engendré par deux symétries d'axe orthogonal (qui commutent) est d'ordre 4. En conjuguant par la rotation de centre O et d'angle $2\pi/6$, on obtient un autre 2-Sylow. Les 2-Sylow ne sont donc pas distingués. Le nombre de 2-Sylow est congru à 1 modulo 2 et divise 12 et n'est pas 1. Il y a donc trois 2-Sylow.

(e) La conjuguée, par une rotation d'angle $2k\pi/6$ ou par une symétrie, d'une symétrie d'axe médiateur d'un coté est une symétrie d'axe médiateur d'un coté. Les symétries d'axe médiateur d'un coté et les symétries d'axe passant par un sommet (qui diffèrent car 6 est pair) ne sont donc pas conjuguées dans D_6.

(f) Le sous-groupe engendré par une rotation d'angle $4\pi/6$ est d'ordre 3 et c'est un 3-Sylow.

Correction de l'exercice 7741 ▲

Les ordres des éléments de G sont $3, 11$ ou 33. Une application directe du théorème de Sylow montre qu'on a un seul groupe d'ordre 11 et un seul groupe d'ordre 3. Les éléments d'ordre 3 et 11 sont contenus dans ces deux groupes. On a au plus

$$1 + (3-1) + (11-1) = 1 + 2 + 10 = 13$$

éléments d'ordre $1, 3$ ou 11. Il existe donc un élément d'ordre 33 dans G qui est donc cyclique isomorphe à $\mathbf{Z}/33\mathbf{Z}$.

Correction de l'exercice 7744 ▲

(a)

(b) Non, il faut au moins avoir l'image d'un repère projectif.

Correction de l'exercice 7745 ▲

(a) Comme F admet une droite d de points fixes, f fixe toutes les droites d'un plan. C'est donc en restriction à ce plan, une homothétie. Quitte à diviser par ce rapport non nul, on peut supposer que f est l'identité sur ce plan.

(b) L'application f est alors soit une dilatation, soit une transvection. Dans le premier cas, avec un repère adapté, tout point de coordonnées (X,Y,Z) et son image de coordonnées $X,Y,\lambda Z)$ sont coplanaires avec le point de coordonnées $(0,0,1)$. Dans le second cas tout point de coordonnées (X,Y,Z) et son image de coordonnées $(X,Y+Z,Z)$ sont coplanaires avec le point de coordonnées $(0,1,0)$. On en déduit donc l'existence d'un centre O.

(c) On choisit un repère projectif de P^2 composé de M_1 et M_2 sur d, puis $M_3 = O$ et comme point unitaire $M_4 = A$. On obtient un repère tel que d ait pour équation $Z = 0$ et O pour coordonnées homogènes $[0:0:1]$ et A pour coordonnées homogènes $[1:1:1]$. Notons $[x:x:z]$ des coordonées homogènes de A' aligné avec O et A avec $x \neq 0$ car $A' \neq O$ et $z \neq 0$ car $A' \notin d$. On peut donc normaliser avec $A'[1:1:z]$. Comme d doit être laissée fixe par l'homographie cherchée $P(f)$, quitte à normaliser, on peut supposer que f est l'identité sur $vect(e_1,e_2)$. Comme $P(f)(A) = A'$, $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+e_2+f(e_3)$ est proportionel à $e_1+e_2+ze_3$. Donc, $f(e_3) = ze_3$. Réciproquement, cette application f satisfait les conditions requises (voir le cas de la dilatation).

(d)

FIGURE 4 –

Notons ϕ l'homographie de droite fixe d de centre O qui envoie P sur P'. On vérifie successivement qu'elle envoie P sur P', Q sur Q', P' sur P et enfin Q' sur Q. Elle coïncide avec H sur un repère projectif donc partout.

Correction de l'exercice 7746 ▲

(a) Dire que F et F' ont les mêmes points fixes revient dire que f et f' ont les mêmes directions propres $d_1 = vect(v_1)$ et $d_2 = vect(v_2)$. les matrices de f et f' dans la base (v_1,v_2) sont diagonales et donc commutent, ce qui implique que F et F' commutent.

(b) Comme $dim(E) = 2$, un élément de $Gl(E)$ qui a trois directions propres distinctes est une homothétie et donc induit l'identité sur $P(E)$.

(c) On utilise la commutativité : $F(F'(A)) = F \circ F'(A) = F' \circ F(A) = F'(A)$ donc $F'(A)$ est un point fixe de F. De même $F'(B)$ est un point fixe de F, $F(A')$ est un point fixe de F' et $F(B')$ est un point fixe de F'. On en déduit $\{F'(A),F'(B)\} = \{A,B\}$ et $\{F(A'),F(B')\} = \{A',B'\}$ puisque F et F' n'ont chacune que deux points fixes.

(d) F n'a que deux points fixes (car $F \neq Id_\Delta$ puisque $F^2 \neq Id_\Delta$), comme A' et B' sont distincts (par hypothèse sur F') et sont fixés par F on a le résultat souhaité.

(e) F^2 ne possède que deux points fixes, puisque $F^2 \neq Id_\Delta$. Sous l'hypothèse, A' et B' sont des points fixes de F^2, distincts par hypothèse sur F', donc l'ensemble des points fixes de F^2 est $\{A',B'\}$. D'autre part A et B sont aussi fixés par F^2 puisque fixés par F et $A \neq B$ par hypothèse sur F, donc l'ensemble des points fixes de F^2 est $\{A,B\}$. Enfin, par transitivité de l'égalité, $\{A',B'\} = \{A,B\}$. On a ainsi obtenu une absurdité, puisqu'on a supposé que F échangeait A' et B' et qu'on a obtenu qu'elle les fixait.

(f) On a donc toujours la situation envisagée en 4., et F et F' ont les mêmes points fixes.

Correction de l'exercice 7756 ▲

Soit 6 points $A,B,\cdots F$ du plan $\mathbb{R}^2$ tels que $ABCDEF$ soit un hexagone régulier.

Etant données les images $A' = h(A)$, $B' = h(B)$, $D' = h(D)$ et $E' = h(E)$ par une homographie h de $P^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, pour construire à la règle les images des autres points, on commence par déterminer l'ancienne droite à l'infini, en déterminant les points d'intersection d'image de couple de droites parallèles.

Correction de l'exercice 7838 ▲

Soit n un entier supérieur à 3. Soit D_{2n} le groupe des isométries d'un polygone régulier P à n côtés d'un plan euclidien réel. Comme toutes les isométries sont affines, l'isobarycentre G des sommets de P est conservé. Les éléments de D_{2n} de déterminant positif sont donc des rotations de centre G, et ceux de déterminant négatif des symétries orthogonales par rapport à des droites passant par G. Comme une rotation qui a deux points fixes est l'identité, les rotations sont d'ordre inférieur à n. Il n'y a donc que les n rotations d'angle multiple de $2\pi/n$. Comme la composée de deux symétries d'axe passant par G est une rotation, il y a aussi exactement n symétries, obtenues comme produit des n rotations par une symétrie fixée.

L'application $\det : D_{2n} \to \{-1,1\}$ est un morphisme de groupes qui a pour image le groupe commutatif $\{-1,1\}$ et pour noyau le groupe commutatif R_n des rotations de centre G d'angle multiple de $2\pi/n$. Le groupe dérivé $D^{(1)}(D_{2n})$ de D_{2n} est donc inclus dans le sous-groupe commutatif des rotations. Par conséquent, le deuxième groupe dérivé $D^{(2)}(D_{2n}) = \{Id\}$ et D_{2n} est résoluble.

Correction de l'exercice 7839 ▲

Les formes bilinéaires symétriques données par les formes quadratiques suivantes sur $\mathbb{F}_7^3$, $q(x,y,z) = x^2+6y^2+2z^2$ et $Q(x,y,z) = xy+3z^2$ ont pour matrice dans la base canonique

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et sont non-dégénérées de discriminant 5 et 1. Comme $5^{\frac{7-1}{2}} = -1[7]$, 5 n'est pas un carré alors que $1 = 1^2$ en est un, les formes ne sont donc pas équivalentes.

Correction de l'exercice 7840 ▲

Soit (E,f) et $(E,f')'$ deux espaces symplectiques non-singuliers de dimension 4. Soit $d \subset E$ et $d' = vect(x') \subset E'$ deux droites et f une application linéaire bijective de d sur d'. On écrit $d = vect(x)$ et $d' = vect(x')$ où $x' = f(x)$.

Notons que comme d et d' sont de dimension 1 donc isotropes, f est une isométrie (pour les formes bilinéaires induites). Puisque f est non dégénérée, on choisit un vecteur z (non colinéaire à x) tel que $f(x,z)$ est non nul donc inversible dans k. On définit y sous la forme $y = \alpha x + f(x,z)^{-1}z$. Alors, (x,y) est une paire symplectique. L'orthogonal de $vect(x,y)$ (muni de la forme induite) est un plan non-singulier puisque $vect(x,y)$ est non-singulier. Par la construction précédente, on y trouve une paire symplectique (X,Y). Le même raisonnement permet de trouver une base (x',y',X',Y') de E' telle que (x',y') et (X',Y') soient deux paires symplectiques orthogonales de E'. L'application f définie par $x \mapsto x'$, $y \mapsto y'$, $X \mapsto X'$ et $Y \mapsto Y'$ est une isométrie de E sur E' qui prolonge f.