

## Développements limités

---

Corrections d'Arnaud Bodin.

### 1 Calculs

#### Exercice 1

---

Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1.  $\cos x \cdot \exp x$  à l'ordre 3
2.  $(\ln(1+x))^2$  à l'ordre 4
3.  $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$  à l'ordre 6
4.  $\exp(\sin(x))$  à l'ordre 4
5.  $\sin^6(x)$  à l'ordre 9
6.  $\ln(\cos(x))$  à l'ordre 6
7.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4
8.  $\tan x$  à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)
9.  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  à l'ordre 3
10.  $\arcsin(\ln(1+x^2))$  à l'ordre 6

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006888]

#### Exercice 2

---

1. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $f(x) = \sqrt{x}$ .
2. Développement limité en 1 à l'ordre 3 de  $g(x) = e^{\sqrt{x}}$ .
3. Développement limité à l'ordre 3 en  $\frac{\pi}{3}$  de  $h(x) = \ln(\sin x)$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001243]

#### Exercice 3

---

Donner un développement limité à l'ordre 2 de  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$  en 0. En déduire un développement à l'ordre 2 en  $+\infty$ . Calculer un développement à l'ordre 1 en  $-\infty$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001244]

## 2 Applications

### Exercice 4

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001247]

### Exercice 5

Étudier la position du graphe de l'application  $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$  par rapport à sa tangente en 0 et 1.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001249]

### Exercice 6

Déterminer:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$   
(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x}$

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001265]

## 3 Formules de Taylor

### Exercice 7

Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$ . Calculer  $f^{(n)}(0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001267]

### Exercice 8

Soit  $a$  un nombre réel et  $f : ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$ . On suppose  $f$  et  $f''$  bornées ; on pose  $M_0 = \sup_{x>a} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x>a} |f''(x)|$ .

- En appliquant une formule de Taylor reliant  $f(x)$  et  $f(x+h)$ , montrer que, pour tout  $x > a$  et tout  $h > 0$ , on a :  $|f'(x)| \leq \frac{h}{2} M_2 + \frac{2}{h} M_0$ .
- En déduire que  $f'$  est bornée sur  $]a, +\infty[$ .
- Établir le résultat suivant : soit  $g : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^2$  à dérivée seconde bornée et telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001268]

## 4 DL implicite

### Exercice 9 $\tan(x) = x$

---

1. Montrer que l'équation  $\tan x = x$  possède une unique solution  $x_n$  dans  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
2. Quelle relation lie  $x_n$  et  $\arctan(x_n)$  ?
3. Donner un DL de  $x_n$  en fonction de  $n$  à l'ordre 0 pour  $n \rightarrow \infty$ .
4. En reportant dans la relation trouvée en 2, obtenir un DL de  $x_n$  à l'ordre 2.

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[004037]

---

## 5 Equivalents

### Exercice 10 Recherche d'équivalents

---

Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes :

1.  $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ , en 0
2.  $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$ , en 0
3.  $\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3}$ , en  $\sqrt{3}$
4.  $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ , en  $+\infty$
5.  $\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$ , en 0

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[004044]

---

### Exercice 11 Approximation de cos

---

Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$\cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit un  $o(x^n)$  en 0 avec  $n$  maximal.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[004045]

---

### Exercice 12

---

Calculer

$$\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x.$$

Donner un équivalent de

$$\left( \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)^x - \ell$$

lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[002657]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

---

1.  $\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$
  2.  $(\ln(1+x))^2 = x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)$
  3.  $\frac{\operatorname{sh} x - x}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + o(x^6)$
  4.  $\exp(\sin(x)) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$
  5.  $\sin^6(x) = x^6 - x^8 + o(x^9)$
  6.  $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)$
  7.  $\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$
  8.  $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$
  9.  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x}\ln(1+x)\right) = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$
  10.  $\arcsin(\ln(1+x^2)) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)$
- 

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Pour la première question vous pouvez appliquer la formule de Taylor ou bien poser  $h = x - 1$  et considérer un dl au voisinage de  $h = 0$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

En  $x = 0$  c'est le quotient de deux dl. En  $x = +\infty$ , on pose  $h = \frac{1}{x}$  et on calcule un dl en  $h = 0$ .

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Il s'agit bien sûr de calculer d'abord des dl afin d'obtenir la limite. On trouve :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$
  2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0$
  3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$
- 

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

---

Faire un dl en  $x = 0$  à l'ordre 2 cela donne  $f(0)$ ,  $f'(0)$  et la position par rapport à la tangente donc tout ce qu'il faut pour répondre aux questions. Idem en  $x = 1$ .

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Il s'agit de faire un dl afin de trouver la limite.

1. (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = +\infty$   
(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = -\frac{3}{2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} = -2$$

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

Calculer d'abord le dl puis utiliser une formule de Taylor.

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

1. La formule à appliquer est celle de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.
  2. Étudier la fonction  $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$  et trouver  $\inf_{h>0} \phi(h)$ .
  3. Il faut choisir un  $a > 0$  tel que  $g(x)$  soit assez petit sur  $]a, +\infty[$  ; puis appliquer les questions précédentes à  $g$  sur cet intervalle.
- 

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

Identifier les dl de  $\cos x$  et  $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  en  $x = 0$ .

---

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Faites un développement faisant intervenir des  $x$  et des  $\ln x$ . Trouvez  $\ell = 1$ .

---

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $\cos x \cdot \exp x$  (à l'ordre 3).

Le dl de  $\cos x$  à l'ordre 3 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3.$$

Le dl de  $\exp x$  à l'ordre 3 est

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3.$$

Par convention toutes nos fonctions  $\varepsilon_i(x)$  vérifierons  $\varepsilon_i(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

On multiplie ces deux expressions

$$\begin{aligned}\cos x \times \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\ &= 1 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \quad \text{on développe la ligne du dessus} \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\ &\quad + \varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right)\end{aligned}$$

On va développer chacun de ces produits, par exemple pour le deuxième produit :

$$-\frac{1}{2!}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{2}x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3.$$

Mais on cherche un dl à l'ordre 3 donc tout terme en  $x^4$ ,  $x^5$  ou plus se met dans  $\varepsilon_3(x)x^3$ , y compris  $x^2 \cdot \varepsilon_2(x)x^3$  qui est un bien de la forme  $\varepsilon(x)x^3$ . Donc

$$-\frac{1}{2}x^2 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3.$$

Pour le troisième produit on a

$$\varepsilon_1(x)x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) = \varepsilon_1(x)x^3 + x\varepsilon_1(x)x^3 + \dots = \varepsilon_4(x)x^3$$

On en arrive à :

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \exp x &= \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \varepsilon_1(x)x^3\right) \times \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_2(x)x^3\right) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \varepsilon_1(x)x^3 \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \varepsilon_3(x)x^3 \\ &\quad + \varepsilon_4(x)x^3 \quad \text{il ne reste plus qu'à regrouper les termes :} \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \varepsilon_5(x)x^3 \\ &= 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3\end{aligned}$$

Ainsi le dl de  $\cos x \cdot \exp x$  en 0 à l'ordre 3 est :

$$\cos x \cdot \exp x = 1 + x - \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_5(x)x^3.$$

2.  $(\ln(1+x))^2$  (à l'ordre 4).

Il s'agit juste de multiplier le dl de  $\ln(1+x)$  par lui-même. En fait si l'on réfléchit un peu on s'aperçoit qu'un dl à l'ordre 3 sera suffisant (car le terme constant est nul) :

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3$$

$\varepsilon_5(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ .

$$\begin{aligned} (\ln(1+x))^2 &= \ln(1+x) \times \ln(1+x) \\ &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\ &= x \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}x^2 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\ &\quad + \frac{1}{3}x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\ &\quad + \varepsilon(x)x^3 \times \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon(x)x^3\right) \\ &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon(x)x^4 \\ &\quad - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \varepsilon_1(x)x^4 \\ &\quad + \frac{1}{3}x^4 + \varepsilon_2(x)x^4 \\ &\quad + \varepsilon_3(x)x^4 \\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \varepsilon_4(x)x^4 \end{aligned}$$

3.  $\frac{\operatorname{sh}x - x}{x^3}$  (à l'ordre 6).

Pour le dl de  $\frac{\operatorname{sh}x - x}{x^3}$  on commence par faire un dl du numérateur. Tout d'abord :

$$\operatorname{sh}x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9$$

donc

$$\operatorname{sh}x - x = \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par  $x^3$  :

$$\frac{\operatorname{sh}x - x}{x^3} = \frac{\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \varepsilon(x)x^9}{x^3} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}x^2 + \frac{1}{7!}x^4 + \frac{1}{9!}x^6 + \varepsilon(x)x^6$$

Remarquez que nous avons commencé par calculer un dl du numérateur à l'ordre 9, pour obtenir après division un dl à l'ordre 6.

4.  $\exp(\sin(x))$  (à l'ordre 4).

On sait  $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$  et  $\exp(u) = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + o(u^4)$ .

On note désormais toute fonction  $\varepsilon(x)x^n$  (où  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ ) par  $o(x^n)$ . Cela évite les multiples expressions  $\varepsilon_i(x)x^n$ .

On substitue  $u = \sin(x)$ , il faut donc calculer  $u, u^2, u^3$  et  $u^4$  :

$$\begin{aligned} u &= \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \\ u^2 &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \\ u^3 &= \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^3 = x^3 + o(x^4) \\ u^4 &= x^4 + o(x^4) \quad \text{et} \quad o(u^4) = o(x^4) \end{aligned}$$

Pour obtenir :

$$\begin{aligned} \exp(\sin(x)) &= 1 + x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) \\ &\quad + \frac{1}{3!}\left(x^3 + o(x^4)\right) \\ &\quad + \frac{1}{4!}\left(x^4 + o(x^4)\right) \\ &\quad + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

#### 5. $\sin^6(x)$ (à l'ordre 9).

On sait  $\sin(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)$ .

Si l'on voulait calculer un dl de  $\sin^2(x)$  à l'ordre 5 on écrirait :

$$\sin^2(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^2 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) = x^2 - 2\frac{1}{3!}x^4 + o(x^5).$$

En effet tous les autres termes sont dans  $o(x^5)$ .

Le principe est le même pour  $\sin^6(x)$ :

$$\sin^6(x) = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right)^6 = \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^4)\right) \times \dots$$

Lorsque l'on développe ce produit en commençant par les termes de plus petits degrés on obtient

$$\sin^6(x) = x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot \left(-\frac{1}{3!}x^3\right) + o(x^9) = x^6 - x^8 + o(x^9)$$

#### 6. $\ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

Le dl de  $\cos x$  à l'ordre 6 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Le dl de  $\ln(1+u)$  à l'ordre 6 est  $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6)$ .

On pose  $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)$  de sorte que

$$\ln(\cos x) = \ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + \frac{1}{5}u^5 - \frac{1}{6}u^6 + o(u^6).$$



Il ne reste qu'à développer les  $u^k$ , ce qui n'est pas si dur que cela si les calculs sont bien menés et les puissances trop grandes écartées.

Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u^2 &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \right)^2 \\ &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \right)^2 + o(x^6) \\ &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 \right)^2 + 2 \left( -\frac{1}{2!}x^2 \right) \left( \frac{1}{4!}x^4 \right) + o(x^6) \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} u^3 &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \right)^3 \\ &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 \right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{8}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

En effet lorsque l'on développe  $u^3$  le terme  $(x^2)^6$  est le seul terme dont l'exposant est  $\leq 6$ .

Enfin les autres termes  $u^4$ ,  $u^5$ ,  $u^6$  sont tous des  $o(x^6)$ . Et en fait développer  $\ln(1+u)$  à l'ordre 3 est suffisant.

Il ne reste plus qu'à rassembler :

$$\begin{aligned} \ln(\cos x) &= \ln(1+u) \\ &= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) \\ &= \left( -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{8}x^6 + o(x^6) \right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

7.  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4.

Le dl de  $\cos x$  à l'ordre 4 est

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4).$$

Le dl de  $\frac{1}{1+u}$  à l'ordre 2 (qui sera suffisant ici) est  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$ .

On pose  $u = -\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)$  et on a  $u^2 = \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1+u} \\
&= 1 - u + u^2 + o(u^2) \\
&= 1 - \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right) + \left(-\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)
\end{aligned}$$

8.  $\tan x$  (à l'ordre 5 (ou 7 pour les plus courageux)).

Pour ceux qui souhaitent seulement un dl à l'ordre 5 de  $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$  alors il faut multiplier le dl de  $\sin x$  à l'ordre 5 par le dl de  $\frac{1}{\cos x}$  à l'ordre 4 (voir question précédente).

Si l'on veut un dl de  $\tan x$  à l'ordre 7 il faut d'abord refaire le dl  $\frac{1}{\cos x}$  mais cette fois à l'ordre 6 :

$$\frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + o(x^6)$$

Le dl à l'ordre 7 de  $\sin x$  étant :

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^7)$$

Comme  $\tan x = \sin x \times \frac{1}{\cos x}$ , il ne reste donc qu'à multiplier les deux dl pour obtenir après calculs :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7)$$

9.  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$  (à l'ordre 3).

Si l'on pense bien à écrire  $(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = \exp\left(\frac{1}{1+x} \ln(1+x)\right)$  alors c'est juste des calculs utilisant les dl à l'ordre 3 de  $\ln(1+x)$ ,  $\frac{1}{1+x}$  et  $\exp x$ .

On trouve

$$(1+x)^{\frac{1}{1+x}} = 1 + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

10.  $\arcsin(\ln(1+x^2))$  (à l'ordre 6).

Tout d'abord  $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$ . Et  $\arcsin u = u + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ . Donc en posant  $u = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)$  on a :

$$\begin{aligned}
\arcsin(\ln(1+x^2)) &= \arcsin\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + o(x^6)\right) \\
&= \arcsin u \\
&= u + \frac{1}{6}u^3 + o(u^3) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right)^3 + o(x^6) \\
&= \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3}\right) + \frac{x^6}{6} + o(x^6) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{2} + o(x^6)
\end{aligned}$$

---

## Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. Première méthode. On applique la formule de Taylor (autour du point  $x = 1$ )

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Comme  $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$  alors  $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$  et donc  $f'(1) = \frac{1}{2}$ . Ensuite on calcule  $f''(x)$  (puis  $f''(1)$ ),  $f'''(x)$  (et enfin  $f'''(1)$ ).

On trouve le dl de  $f(x) = \sqrt{x}$  au voisinage de  $x = 1$  :

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

Deuxième méthode. Posons  $h = x - 1$  (et donc  $x = h + 1$ ). On applique la formule du dl de  $\sqrt{1+h}$  autour de  $h = 0$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} = \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + \frac{1}{16}h^3 + o(h^3) \quad \text{c'est la formule du dl de } \sqrt{1+h} \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

2. La première méthode consiste à calculer  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \exp \sqrt{x}$ ,  $g''(x)$ ,  $g'''(x)$  puis  $g(1)$ ,  $g'(1)$ ,  $g''(1)$ ,  $g'''(1)$  pour pouvoir appliquer la formule de Taylor conduisant à :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{48}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$$

(avec  $e = \exp(1)$ ).

Autre méthode. Commencer par calculer le dl de  $k(x) = \exp x$  en  $x = 1$  ce qui est très facile car pour tout  $n$ ,  $k^{(n)}(x) = \exp x$  et donc  $k^{(n)}(1) = e$  :

$$\exp x = e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + o((x-1)^3).$$

Pour obtenir le dl  $g(x) = h(\sqrt{x})$  en  $x = 1$  on écrit d'abord :

$$\exp(\sqrt{x}) = e + e(\sqrt{x}-1) + \frac{e}{2!}(\sqrt{x}-1)^2 + \frac{e}{3!}(\sqrt{x}-1)^3 + o((\sqrt{x}-1)^3).$$

Il reste alors à substituer  $\sqrt{x}$  par son dl obtenu dans la première question.

3. Posons  $u = x - \frac{\pi}{3}$  (et donc  $x = \frac{\pi}{3} + u$ ). Alors

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + u\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(u) + \sin(u)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos u + \frac{1}{2}\sin u$$

On connaît les dl de  $\sin u$  et  $\cos u$  autour de  $u = 0$  (car on cherche un dl autour de  $x = \frac{\pi}{3}$ ) donc

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos u + \frac{1}{2} \sin u \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( 1 - \frac{1}{2!} u^2 + o(u^3) \right) + \frac{1}{2} \left( u - \frac{1}{3!} u^3 + o(u^3) \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} u - \frac{\sqrt{3}}{4} u^2 - \frac{1}{12} u^3 + o(u^3) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^2 - \frac{1}{12} \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^3 + o\left( \left( x - \frac{\pi}{3} \right)^3 \right)
\end{aligned}$$

Maintenant pour le dl de la forme  $\ln(a+v)$  en  $v=0$  on se ramène au dl de  $\ln(1+v)$  ainsi :

$$\ln(a+v) = \ln\left(a\left(1 + \frac{v}{a}\right)\right) = \ln a + \ln\left(1 + \frac{v}{a}\right) = \ln a + \frac{v}{a} - \frac{1}{2} \frac{v^2}{a^2} + \frac{1}{3} \frac{v^3}{a^3} + o(v^3)$$

On applique ceci à  $h(x) = \ln(\sin x)$  en posant toujours  $u = x - \frac{\pi}{3}$  :

$$\begin{aligned}
h(x) = \ln(\sin x) &= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{4}u^2 - \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\right) \\
&= \dots \quad \text{on effectue le dl du ln et on regroupe les termes} \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}u - \frac{2}{3}u^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}u^3 + o(u^3) \\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{4}{9\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right)$$

Bien sûr une autre méthode consiste à calculer  $h(1)$ ,  $h'(1)$ ,  $h''(1)$  et  $h'''(1)$ .

1. Dl de  $f(x)$  à l'ordre 2 en 0.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{1+x+1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)} \quad \text{car } \sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
 &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{2 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^4)\right)} \quad \text{on pose } u = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^4) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1+u} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times (1 - u + u^2 + o(u^2)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)^2 + o(x^2)\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} + o(x^2)\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)
 \end{aligned}$$

2. En  $+\infty$  on va poser  $h = \frac{1}{x}$  et se ramener à un dl en  $h = 0$ .

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{1}{x}+1+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} = \frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h+\sqrt{1+h^2}} = f(h).$$

Ici -miraculeusement- on retrouve exactement l'expression de  $f$  dont on a déjà calculé le dl en  $h = 0$  :  
 $f(h) = \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{4} + o(h^2)$ . Ainsi

$$f(x) = f(h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3. Attention cela ne fonctionne plus du tout en  $-\infty$ . Dans le calcul de la deuxième question on était en voisinage de  $+\infty$  et nous avons considéré que  $x$  était positif. En  $-\infty$  il faut faire attention au signe, par exemple  $\sqrt{1+x^2} = |x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = -x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}$ .

Ainsi toujours en posant  $h = \frac{1}{x}$ .

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{1+x^2}} \\
 &= \frac{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(1+\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right)} \\
 &= -\frac{\sqrt{1+h^2}}{1+h-\sqrt{1+h^2}} \\
 &= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{1+h-\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right)} \\
 &= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h-\frac{1}{2}h^2+o(h^2)} \\
 &= -\frac{1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)}{h\left(1-\frac{1}{2}h+o(h)\right)} \\
 &= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h^2+o(h^2)\right) \times \left(1+\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
 &= -\frac{1}{h}\left(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{4}h^2+o(h^2)\right) \\
 &= -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}h+o(h) \\
 &= -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi un développement (asymptotique) de  $f$  en  $-\infty$  est

$$f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{4x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit par exemple que  $f(x)$  se comporte essentiellement comme la fonction  $-x$  en  $-\infty$  et en particulier  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. On a

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + o(x^4) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

On s'aperçoit qu'en fait un dl à l'ordre 2 suffit :

$$e^{x^2} - \cos x = \left(1 + x^2 + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$$

Ainsi  $\frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2} + o(1)$  (où  $o(1)$  désigne une fonction qui tend vers 0) et donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

2. On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3).$$

Les dl sont distincts dès le terme de degré 2 donc un dl à l'ordre 2 suffit :

$$\ln(1+x) - \sin x = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

donc

$$\frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = -\frac{x}{2} + o(x)$$

et ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x} = 0.$$

3. Sachant

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

et

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} &= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\right)}{x^4} \\ &= \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \frac{1}{6} + o(1) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1}{6}$$

### Correction de l'exercice 5 ▲

Commençons en  $x = 0$ , le dl de  $f(x) = \ln(1+x+x^2)$  à l'ordre 2 est

$$\ln(1+x+x^2) = (x+x^2) - \frac{(x+x^2)^2}{2} + o(x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

Par identification avec  $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + o(x^2)$  cela entraîne donc  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  (et  $f''(0) = 1$ ). L'équation de la tangente est donc  $y = f'(0)(x-0) + f(0)$  donc  $y = x$ .

La position par rapport à la tangente correspond à l'étude du signe de  $f(x) - y(x)$  où  $y(x)$  est l'équation de la tangente.

$$f(x) - y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Ainsi pour  $x$  suffisamment proche de 0,  $f(x) - y(x)$  est du signe de  $\frac{1}{2}x^2$  et est donc positif. Ainsi dans un voisinage de 0 la courbe de  $f$  est au-dessus de la tangente en 0.

Même étude en  $x = 1$ .

Il s'agit donc de faire le dl de  $f(x)$  en  $x = 1$ . On pose  $x = 1 + h$  (de sorte que  $h = x - 1$  est proche de 0) :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(1 + x + x^2) = \ln(1 + (1 + h) + (1 + h)^2) \\
 &= \ln(3 + 3h + h^2) \\
 &= \ln\left(3\left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right)\right) \\
 &= \ln 3 + \ln\left(1 + h + \frac{h^2}{3}\right) \\
 &= \ln 3 + \left(h + \frac{h^2}{3}\right) - \frac{\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2}{2} + o\left(\left(h + \frac{h^2}{3}\right)^2\right) \\
 &= \ln 3 + h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{2} + o(h^2) \\
 &= \ln 3 + h - \frac{1}{6}h^2 + o(h^2) \\
 &= \ln 3 + (x - 1) - \frac{1}{6}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)
 \end{aligned}$$

La tangente en  $x = 1$  est d'équation  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$  et est donc donnée par le dl à l'ordre 1 : c'est  $y = (x - 1) + \ln 3$ . Et la différence  $f(x) - (\ln 3 + (x - 1)) = -\frac{1}{6}(x - 1)^2 + o((x - 1)^2)$  est négative pour  $x$  proche de 1. Donc, dans un voisinage de 1, le graphe de  $f$  est en-dessous de la tangente en  $x = 1$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) La première limite n'est pas une forme indéterminée, en effet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = +\infty$$

- (b) Lorsque  $x \rightarrow -\infty$  la situation est tout autre car

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

donc  $\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x$  est une forme indéterminée !

Calculons un développement limité à l'ordre 1 en  $-\infty$  en faisant très attention au signe (car par exemple  $|x| = -x$ ):

$$\begin{aligned}
 \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x &= |x| \left( \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 \right) \\
 &= |x| \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) \\
 &= |x| \left( \frac{1}{2} \frac{3}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
 &= -\frac{3}{2} + o(1)
 \end{aligned}$$

Et donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = -\frac{3}{2}$$



2. Nous utiliserons que

$$\begin{aligned} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} &= \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln(\arctan x)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln(x + o(x))\right) \quad \text{car } \arctan x = x + o(x) \end{aligned}$$

Mais lorsque  $x \rightarrow 0^+$  on sait que  $\ln(x + o(x)) \rightarrow -\infty$ ,  $x^2 \rightarrow 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x + o(x))}{x^2} = -\infty$$

Composé avec l'exponentielle on trouve :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arctan x)^{\frac{1}{x^2}} = 0$$

3. Effectuons le dl à l'ordre 2 : comme

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

alors

$$(1+3x)^{\frac{1}{3}} = 1 + x - x^2 + o(x^2).$$

$$\sin x = x + o(x^2) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} &= \frac{-x^2 + o(x^2)}{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{-1 + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \quad \text{après factorisation par } x^2 \\ &= -2 + o(1) \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}} - 1 - \sin x}{1 - \cos x} = -2$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

Habituellement on trouve le développement limité d'une fonction à partir des dérivées successives. Ici on va faire l'inverse.

Calcul du dl (à un certain ordre) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{1+x^6} = x^3 \frac{1}{1+x^6} \\ &= x^3 \left(1 - x^6 + x^{12} - \dots \pm x^{6\ell} \dots\right) \\ &= x^3 - x^9 + x^{15} - \dots \pm x^{3+6\ell} \dots \\ &= \sum_{\ell \geq 0} (-1)^\ell x^{3+6\ell} \end{aligned}$$

Il s'agit d'identifier ce développement avec la formule de Taylor :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Par unicité des DL, en identifiant les coefficients devant  $x^n$  on trouve :

$$\begin{cases} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^\ell & \text{si } n = 3 + 6\ell \\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $n = 3 + 6\ell$  (avec  $\ell \in \mathbb{N}$ ) alors on peut écrire  $\ell = \frac{n-3}{6}$  et donc on peut conclure :

$$\begin{cases} f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n-3}{6}} \cdot n! & \text{si } n \equiv 3 \pmod{6} \\ f^{(n)}(0) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre  $x$  et  $x+h$  (avec  $h > 0$ ) donne :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}$$

où  $c_{x,h} \in ]x, x+h[$ .

Cela donne :

$$f'(x)h = f(x+h) - f(x) - f''(c_{x,h})\frac{h^2}{2!}.$$

On peut maintenant majorer  $f'(x)$  :

$$\begin{aligned} h|f'(x)| &\leq |f(x+h)| + |f(x)| + \frac{h^2}{2} |f''(c_{x,h})| \\ &\leq 2M_0 + \frac{h^2}{2} M_2 \end{aligned}$$

Donc

$$|f'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2.$$

2. Soit  $\phi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\phi(h) = \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0$ . C'est une fonction continue et dérivable.

La limite en 0 et  $+\infty$  est  $+\infty$ . La dérivée  $\phi'(h) = \frac{1}{2}M_2 - \frac{2M_0}{h^2}$  s'annule en  $h_0 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$  et en ce point  $\phi$  atteint son minimum  $\phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$ .

Fixons  $x > a$ . Comme pour tout  $h > 0$  on a  $|f'(x)| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{2}{h}M_0 = \phi(h)$  alors en particulier pour  $h = h_0$  on obtient  $|f'(x)| \leq \phi(h_0) = 2\sqrt{M_0M_2}$ . Et donc  $f'$  est bornée.

3. Fixons  $\varepsilon > 0$ .  $g''$  est bornée, notons  $M_2 = \sup_{x>0} |g''(x)|$ . Comme  $g(x) \rightarrow 0$  alors il existe  $a > 0$  tel que sur l'intervalle  $]a, +\infty[$ ,  $g$  soit aussi petit que l'on veut. Plus précisément nous choisissons  $a$  de sorte que

$$M_0 = \sup_{x>a} |g(x)| \leq \frac{\varepsilon^2}{4M_2}.$$

La première question appliquée à  $g$  sur l'intervalle  $]a, +\infty[$  implique que pour tout  $h > 0$  :

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{h}M_0 + \frac{h}{2}M_2$$

En particulier pour  $h = \frac{\varepsilon}{M_2}$  et en utilisant  $M_0 \leq \frac{\varepsilon^2}{4M_2}$  on obtient :

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{\frac{\varepsilon}{M_2}} \frac{\varepsilon^2}{4M_2} + \frac{\varepsilon}{2} M_2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour chaque  $\varepsilon$  on a trouvé  $a > 0$  tel que si  $x > a$  alors  $|g'(x)| \leq \varepsilon$ . C'est exactement dire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = 0$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons  $I_n$  l'intervalle  $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ . Alors sur chaque  $I_n$  la fonction définie par  $f(x) = \tan x - x$  est une fonction continue et dérivable. De plus  $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x$ . La dérivée est strictement positive sauf en un point où elle est nulle et ainsi la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I_n$ . La limite à gauche est  $-\infty$  et la limite à droite est  $+\infty$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique  $x_n \in I_n$  tel que  $f(x_n) = 0$  c'est-à-dire  $\tan x_n = x_n$ .

2.  $x \mapsto \arctan x$  est la bijection réciproque de la restriction de la tangente  $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} \rightarrow ]-\infty, +\infty[$ . Sur ces intervalles on a bien  $\tan x = y \iff x = \arctan y$ . Mais si  $y \notin ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  il faut d'abord se ramener dans l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

Ainsi  $x_n \in I_n$  donc  $x_n - n\pi \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Maintenant  $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$ .

Donc  $\arctan x_n = \arctan(\tan(x_n - n\pi)) = x_n - n\pi$ . Ainsi

$$x_n = \arctan x_n + n\pi.$$

L'erreur classique est de penser que  $\arctan(\tan x) = x$ . Ce qui n'est vrai que pour  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  !

3. Comme  $x_n \in I_n$  alors  $x_n \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

On sait par ailleurs que pour  $x > 0$  on a  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ . Ainsi  $\arctan x_n = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n}$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  alors  $\frac{1}{x_n} \rightarrow 0$  donc  $\arctan \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ .

Ainsi

$$x_n = n\pi + \arctan x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n} = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

4. On va utiliser le dl obtenu précédemment pour obtenir un dl à un ordre plus grand :

$$\begin{aligned} x_n &= n\pi + \arctan x_n \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x_n} \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{car } \arctan u = u + o(u^2) \text{ en } u = 0 \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi en  $+\infty$  on a le développement :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

Il s'agit bien sûr de calculer un développement limité, le premier terme de ce développement donne l'équivalent cherché.

1. Le dl à l'ordre 3 en 0 est

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} = -\frac{11x^3}{3} + o(x^3)$$

donc

$$2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2} \sim -\frac{11x^3}{3}.$$

2. De même

$$(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x} \sim \frac{x^5}{4}.$$

3. On pose  $h = x - \sqrt{3}$  alors

$$\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{h^2}{8\sqrt{3}} + o(h^2)$$

donc

$$\arctan x + \arctan \frac{3}{x} - \frac{2\pi}{3} \sim -\frac{(x - \sqrt{3})^2}{8\sqrt{3}}.$$

4. En  $+\infty$

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} = \frac{1}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc

$$\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2} \sim \frac{1}{12x}.$$

5. Il faut distinguer les cas  $x > 0$  et  $x < 0$  pour trouver :

$$\operatorname{argch}\left(\frac{1}{\cos x}\right) \sim |x|.$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

Le dl de  $\cos x$  en 0 à l'ordre 6 est :

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6).$$

Calculons celui de  $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1+ax^2}{1+bx^2} &= (1+ax^2) \times \frac{1}{1+bx^2} \\ &= (1+ax^2) \times (1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + o(x^6)) \quad \text{car } \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \\ &= \dots \quad \text{on développe} \\ &= 1 + (a-b)x^2 - b(a-b)x^4 + b^2(a-b)x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

Notons  $\Delta(x) = \cos x - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  alors

$$\Delta(x) = \left(-\frac{1}{2} - (a-b)\right)x^2 + \left(\frac{1}{24} + b(a-b)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} - b^2(a-b)\right)x^6 + o(x^6).$$

Pour que cette différence soit la plus petite possible (lorsque  $x$  est proche de 0) il faut annuler le plus possible de coefficients de bas degré. On souhaite donc avoir

$$-\frac{1}{2} - (a - b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{24} + b(a - b) = 0.$$

En substituant l'égalité de gauche dans celle de droite on trouve :

$$a = -\frac{5}{12} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{12}.$$

On obtient alors

$$\Delta(x) = \left(-\frac{1}{720} - b^2(a - b)\right)x^6 + o(x^6) = \frac{1}{480}x^6 + o(x^6).$$

Avec notre choix de  $a, b$  nous avons obtenu une très bonne approximation de  $\cos x$ . Par exemple lorsque l'on évalue  $\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$  (avec  $a = -\frac{5}{12}$  et  $b = \frac{1}{12}$ ) en  $x = 0.1$  on trouve :

$$0.9950041631\dots$$

Alors que

$$\cos(0.1) = 0.9950041652\dots$$

En l'on trouve ici  $\Delta(0.1) \simeq 2 \times 10^{-9}$ .

### Correction de l'exercice 12 ▲

$$\ln(x+1) = \ln\left(x \times \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x &= \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) \\ &= \exp\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(x \left(\frac{1}{x \ln x} + o\left(\frac{1}{x \ln x}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{1}{\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right) \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x = 1$$

et que lorsque  $x \rightarrow +\infty$

$$\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1 \sim \frac{1}{\ln x}.$$