



Matrice d'une application linéaire

Corrections d'Arnaud Bodin.

Exercice 1

Soit \mathbb{R}^2 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe des abscisses $\mathbb{R}\vec{i}$ parallèlement à $\mathbb{R}(\vec{i} + \vec{j})$. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$, la matrice de f dans la base (\vec{i}, \vec{j}) .

Même question avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ où \mathcal{B}' est la base $(\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j})$ de \mathbb{R}^2 . Même question avec $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}'}(f)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001087]

Exercice 2

Soient trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de \mathbb{R}^3 . On note ϕ l'application linéaire définie par $\phi(e_1) = e_3$, $\phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$ et $\phi(e_3) = e_3$.

1. Écrire la matrice A de ϕ dans la base (e_1, e_2, e_3) . Déterminer le noyau de cette application.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3 . Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de \mathbb{R}^3 ?
3. Calculer $\phi(f_1), \phi(f_2), \phi(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3 . Écrire la matrice B de ϕ dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application ϕ .
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et calculer P^{-1} . Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001097]

Exercice 3

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice par rapport à la base canonique (e_1, e_2, e_3) est

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \quad e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, \quad e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de \mathbb{R}^3 et calculer la matrice de f par rapport à cette base.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002433]

Exercice 4

Soient A, B deux matrices semblables (i.e. il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$). Montrer que si l'une est inversible, l'autre aussi ; que si l'une est idempotente, l'autre aussi ; que si l'une est nilpotente, l'autre aussi ; que si $A = \lambda I$, alors $A = B$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002444]

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 et déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.
2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer l'ensemble des suites réelles qui vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \frac{2}{3}y_n \\ y_{n+1} = -\frac{5}{2}x_n - \frac{2}{3}y_n \end{cases}$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001104]

Exercice 6

Soit a et b deux réels et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\text{rg}(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\text{rg}(A) = 2$?

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002774]

Exercice 7

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Calculer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$. Déterminer une base du noyau

et une base de l'image pour chacune des applications linéaires associées f_A et f_B .

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001099]

Exercice 8

Soit E un espace vectoriel et f une application linéaire de E dans lui-même telle que $f^2 = f$.

1. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n . Posons $r = \dim \text{Im } f$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : $f(e_i) = e_i$ si $i \leq r$ et $f(e_i) = 0$ si $i > r$. Déterminer la matrice de f dans cette base \mathcal{B} .

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001093]

Exercice 9

Trouver toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient

1. $M^2 = 0$;
2. $M^2 = M$;
3. $M^2 = I$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002475]

Exercice 10

Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie en posant pour tout $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$: $f(P(X)) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$.

1. Montrer que f est linéaire et que son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans le cas où $n = 3$, donner la matrice de f dans la base $1, X, X^2, X^3$. Déterminer ensuite, pour une valeur de n quelconque, la matrice de f dans la base $1, X, \dots, X^n$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f . Calculer leur dimension respective.
4. Soit Q un élément de l'image de f . Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001094]

Exercice 11

Pour toute matrice carrée A de dimension n , on appelle trace de A , et l'on note $\text{tr}A$, la somme des éléments diagonaux de A :

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$$

1. Montrer que si A, B sont deux matrices carrées d'ordre n , alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
2. Montrer que si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , M sa matrice par rapport à une base e , M' sa matrice par rapport à une base e' , alors $\text{tr}M = \text{tr}M'$. On note $\text{tr}f$ la valeur commune de ces quantités.
3. Montrer que si g est un autre endomorphisme de E , $\text{tr}(f \circ g - g \circ f) = 0$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002442]

Indication pour l'exercice 1 ▲

f est l'application qui à $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 4 ▲

A est *idempotente* s'il existe un n tel que $A^n = I$ (la matrice identité).

A est *nilpotente* s'il existe un n tel que $A^n = (0)$ (la matrice nulle).

Indication pour l'exercice 9 ▲

Il faut trouver les propriétés de l'application linéaire f associée à chacune de ces matrices. Les résultats s'expriment en explicitant une (ou plusieurs) matrice M' qui est la matrice de f dans une base bien choisie et ensuite en montrant que toutes les autres matrices sont de la forme $M = P^{-1}M'P$.

Plus en détails pour chacun des cas :

1. $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ et discuter suivant la dimension du noyau.
 2. Utiliser l'exercice 8 : $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ et il existe une base telle que $f(e_i) = 0$ ou $f(e_i) = e_i$.
 3. Poser $N = \frac{I+M}{2}$ (et donc $M = \dots$) chercher à quelle condition $M^2 = I$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

L'expression de f dans la base \mathcal{B} est la suivante $f(x,y) = (x-y, 0)$. Autrement dit à un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le vecteur $\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}$. On note que f est bien une application linéaire. Cette expression nous permet de calculer les matrices demandées.

Remarque : comme \mathcal{B} est la base canonique on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ pour $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ qui est le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$.

1. Calcul de $\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Comme $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$, la matrice s'obtient en calculant $f(\vec{i})$ et $f(\vec{j})$:

$$f(\vec{i}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i} \quad f(\vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\vec{i}$$

donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On garde la même application linéaire mais la base de départ change (la base d'arrivée reste \mathcal{B}). Si on note $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, on a $\mathcal{B}' = (\vec{i} - \vec{j}, -2\vec{i} + 3\vec{j}) = (\vec{u}, \vec{v})$. On exprime $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base d'arrivée \mathcal{B} .

$$f(\vec{u}) = f(\vec{i} - \vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f(\vec{v}) = f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Toujours avec le même f on prend \mathcal{B}' comme base de départ et d'arrivée, il s'agit donc d'exprimer $f(\vec{u})$ et $f(\vec{v})$ dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$. Nous venons de calculer que

$$f(\vec{u}) = f(\vec{i} - \vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\vec{i} \quad f(\vec{v}) = f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = f\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = -5\vec{i}$$

Mais il nous faut obtenir une expression en fonction de la base \mathcal{B}' . Remarquons que

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} \\ \vec{v} = -2\vec{i} + 3\vec{j} \end{cases} \implies \begin{cases} \vec{i} = 3\vec{u} + \vec{v} \\ \vec{j} = 2\vec{u} + \vec{v} \end{cases}$$

Donc

$$f(\vec{u}) = f(\vec{i} - \vec{j}) = 2\vec{i} = 6\vec{u} + 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad f(\vec{v}) = f(-2\vec{i} + 3\vec{j}) = -5\vec{i} = -15\vec{u} - 5\vec{v} = \begin{pmatrix} -15 \\ -5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Donc

$$\text{Mat}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Remarque : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ désigne le vecteur $x\vec{u} + y\vec{v}$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On note la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = xe_1 + ye_2 + ze_3$. La matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est composée des vecteurs colonnes $\phi(e_i)$, on sait

$$\phi(e_1) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \phi(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \phi(e_3) = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le noyau de ϕ (ou celui de A) est l'ensemble de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = 0$.

$$AX = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -y = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Ker } \phi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \text{Vect}(e_1 - e_3)$. Le noyau est donc de dimension 1.

2. On applique le pivot de Gauss comme si c'était un système linéaire :

$$\begin{cases} e_1 & - e_3 = f_1 & L_1 \\ e_1 & - e_2 & = f_2 & L_2 \\ -e_1 & + e_2 + e_3 = f_3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} e_1 & - e_3 = f_1 \\ & - e_2 + e_3 = f_2 - f_1 & L_2 - L_1 \\ & e_2 & = f_3 + f_1 & L_3 + L_1 \end{cases}$$

On en déduit

$$\begin{cases} e_1 = f_1 + f_2 + f_3 \\ e_2 = f_1 + f_3 \\ e_3 = f_2 + f_3 \end{cases}$$

Donc tous les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ s'expriment en fonction de (f_1, f_2, f_3) , ainsi la famille (f_1, f_2, f_3) est génératrice. Comme elle a exactement 3 éléments dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 de dimension 3 alors $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base.

3.

$$\phi(f_1) = \phi(e_1 - e_3) = \phi(e_1) - \phi(e_3) = e_3 - e_3 = 0$$

$$\phi(f_2) = \phi(e_1 - e_2) = \phi(e_1) - \phi(e_2) = e_3 - (-e_1 + e_2 + e_3) = e_1 - e_2 = f_2$$

$$\phi(f_3) = \phi(-e_1 + e_2 + e_3) = -\phi(e_1) + \phi(e_2) + \phi(e_3) = -e_3 + (-e_1 + e_2 + e_3) + e_3 = -e_1 + e_2 + e_3 = f_3$$

Donc, dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, nous avons

$$\phi(f_1) = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad \phi(f_2) = f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad \phi(f_3) = f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Donc la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B}' est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ est la projection sur $\text{Vect}(f_2, f_3)$ parallèlement à $\text{Vect}(f_1)$ (autrement dit c'est la projection sur le plan d'équation $(x' = 0)$, parallèlement à l'axe des x' , ceci dans la base \mathcal{B}').

4. P est la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . En effet la matrice de passage contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base \mathcal{B}' exprimés dans l'ancienne base \mathcal{B} .

Si un vecteur a pour coordonnées X dans la base \mathcal{B} et X' dans la base \mathcal{B}' alors $PX' = X$ (attention à l'ordre). Et si A est la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B} et B est la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B}' alors

$$B = P^{-1}AP$$

(Une matrice de passage entre deux bases est inversible.)

Ici on calcule l'inverse de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retrouve donc bien les mêmes résultats que précédemment.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons l'ancienne base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et ce qui sera la nouvelle base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$. Soit P la matrice de passage qui contient -en colonnes- les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base \mathcal{B}' exprimés dans l'ancienne base \mathcal{B}

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On vérifie que P est inversible (on va même calculer son inverse) donc \mathcal{B}' est bien une base. De plus

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et on calcule} \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B est la matrice de f dans la base \mathcal{B}' .

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit A, B tel que $B = P^{-1}AP$.

1. Supposons A inversible, alors il existe A' tel que $A \times A' = I$ et $A' \times A = I$. Notons alors $B' = P^{-1}A'P$. On a

$$B \times B' = (P^{-1}AP) \times (P^{-1}A'P) = P^{-1}A(PP^{-1})A'P = P^{-1}AA'P = P^{-1}IP = I$$

De même $B' \times B = I$. Donc B est inversible d'inverse B' .

2. Supposons que $A^n = I$. Alors

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1}) \dots AP \\ &= P^{-1}A^nP \\ &= P^{-1}IP = I \end{aligned}$$

Donc B est idempotente.

- Si $A^n = (0)$ alors le même calcul qu'au-dessus conduit à $B^n = (0)$.
- Si $A = \lambda I$ alors $B = P^{-1}(\lambda I)P = \lambda I \times P^{-1}P = \lambda I$ (car la matrice λI commute avec toutes les matrices).

Correction de l'exercice 5 ▲

- Notons P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$ vers (ce qui va être) la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2)$. C'est la matrice composée des vecteurs colonnes e_1 et e_2 :

$$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det P = -4 \neq 0$ donc P est inversible et ainsi \mathcal{B}' est bien une base.

Alors la matrice de f dans la base \mathcal{B}' est :

$$B = P^{-1}AP = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- Il est très facile de calculer la puissance d'une matrice diagonale :

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n \end{pmatrix}$$

Comme $A = PBP^{-1}$ on va en déduire A^n :

$$A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 10 - \frac{6}{3^n} & 4 - \frac{4}{3^n} \\ -15 + \frac{15}{3^n} & -6 + \frac{10}{3^n} \end{pmatrix}$$

- Si l'on note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ alors les équations que vérifient les suites s'écrivent en terme matriciel :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

Si l'on note les conditions initiales $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ alors $X_n = A^n X_0$. On en déduit

$$\begin{cases} x_n &= \frac{1}{4} \left((10 - \frac{6}{3^n})x_0 + (4 - \frac{4}{3^n})y_0 \right) \\ y_n &= \frac{1}{4} \left((-15 + \frac{15}{3^n})x_0 + (-6 + \frac{10}{3^n})y_0 \right) \end{cases}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Avant toute, un coup d'œil sur la matrice nous informe de deux choses : (a) A n'est pas la matrice nulle donc $\text{rg}(A) \geq 1$; (b) il y a 3 lignes donc $\text{rg}(A) \leq 3$ (le rang est plus petit que le nombre de colonnes et que le nombre de lignes).

- Montrons de différentes façons que $\text{rg}(A) \geq 2$.

- Première méthode : sous-déterminant non nul.** On trouve une sous-matrice 2×2 dont le déterminant est non nul. Par exemple la sous-matrice extraite du coin en bas à gauche vérifie

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \text{ donc } \text{rg}(A) \geq 2.$$

- **Deuxième méthode : espace vectoriel engendré par les colonnes.** On sait que l'image de l'application linéaire associée à la matrice A est engendrée par les vecteurs colonnes. Et le rang est la dimension de cette image. On trouve facilement deux colonnes linéairement indépendantes :

la deuxième $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et la troisième $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ colonne. Donc $\text{rg}(A) \geq 2$.

- **Troisième méthode : espaces vectoriel engendré par les lignes.** Il se trouve que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les lignes égal la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes (car $\text{rg}(A) = \text{rg}(^tA)$). Comme les deuxième et troisième lignes sont linéairement indépendantes alors $\text{rg}(A) \geq 2$.

Attention : les dimensions des espaces vectoriels engendrés sont égales mais les espaces sont différents !

2. En utilisant la dernière méthode : le rang est exactement 2 si la première ligne est dans le sous-espace engendré par les deux autres. Donc

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) = 2 &\iff (a, 2, -1, b) \in \text{Vect}\{(3, 0, 1, -4), (5, 4, -1, 2)\} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (a, 2, -1, b) = \lambda(3, 0, 1, -4) + \mu(5, 4, -1, 2) \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} 3\lambda + 5\mu = a \\ 4\mu = 2 \\ \lambda - \mu = -1 \\ -4\lambda + 2\mu = b \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \\ a = 1 \\ b = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion la rang de A est 2 si $(a, b) = (1, 3)$. Sinon le rang de A est 3.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. (a) Commençons par des remarques élémentaires : la matrice est non nulle donc $\text{rg}(A) \geq 1$ et comme il y a $p = 4$ lignes et $n = 3$ colonnes alors $\text{rg}(A) \leq \min(n, p) = 3$.

- (b) Ensuite on va montrer $\text{rg}(A) \geq 2$ en effet le sous-déterminant 2×2 (extrait du coin en haut à gauche)

$$: \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \text{ est non nul.}$$

- (c) Montrons que $\text{rg}(A) = 2$. Avec les déterminants il faudrait vérifier que pour toutes les sous-matrices 3×3 les déterminants sont nuls. Pour éviter de nombreux calculs on remarque ici que les colonnes sont liées par la relation $v_2 = v_1 + v_3$. Donc $\text{rg}(A) = 2$.

- (d) L'application linéaire associée à la matrice A est l'application $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Et le théorème du rang $\dim \text{Ker } f_A + \dim \text{Im } f_A = \dim \mathbb{R}^3$ donne ici $\dim \text{Ker } f_A = 3 - \text{rg}(A) = 1$.

Mais la relation $v_2 = v_1 + v_3$ donne immédiatement un élément du noyau : en écrivant $v_1 - v_2 + v_3 =$

$$0 \text{ alors } A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ Donc } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } f_A. \text{ Et comme le noyau est de dimension 1 alors}$$

$$\text{Ker } f_A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (e) Pour un base de l'image, qui est de dimension 2, il suffit par exemple de prendre les deux premiers vecteurs colonnes de la matrice A (ils sont clairement non colinéaires) :

$$\text{Im } f_A = \text{Vect}\{v_1, v_2\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. On fait le même travail avec B et f_B .

(a) Matrice non nulle avec 4 lignes et 4 colonnes donc $1 \leq \text{rg}(B) \leq 4$.

(b) Comme le sous-déterminant (du coin supérieur gauche) $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2$ est non nul alors $\text{rg}(B) \geq 2$.

(c) Et pareil avec le sous-déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

qui est non nul donc $\text{rg}(B) \geq 3$.

(d) Maintenant on calcule le déterminant de la matrice B et on trouve $\det B = 0$, donc $\text{rg}(B) < 4$. Conclusion $\text{rg}(B) = 3$. Par le théorème du rang alors $\dim \text{Ker } f_B = 1$.

(e) Cela signifie que les colonnes (et aussi les lignes) sont liées, comme il n'est pas clair de trouver la relation à la main on résout le système $BX = 0$ pour trouver cette relation ; autrement dit :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ou encore } \begin{cases} 2x + 2y - z + 7t = 0 \\ 4x + 3y - z + 11t = 0 \\ -y + 2z - 4t = 0 \\ 3x + 3y - 2z + 11t = 0 \end{cases}$$

Après résolution de ce système on trouve que les solutions s'écrivent $(x, y, z, t) = (-\lambda, -2\lambda, \lambda, \lambda)$. Et ainsi

$$\text{Ker } f_B = \text{Vect} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et pour une base de l'image il suffit, par exemple, de prendre les 3 premiers vecteurs colonnes v_1, v_2, v_3 de la matrice B , car ils sont linéairement indépendants :

$$\text{Im } f_B = \text{Vect} \{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Nous devons montrer $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$ et $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$.

(a) Si $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$ alors d'une part $f(x) = 0$ et d'autre part il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$. Donc $0 = f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$ donc $x = 0$ (on a utilisé $f \circ f = f$). Donc $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

(b) Pour $x \in E$ on le réécrit $x = x - f(x) + f(x)$. Alors $x - f(x) \in \text{Ker } f$ (car $f(x - f(x)) = f(x) - f \circ f(x) = 0$) et $f(x) \in \text{Im } f$. Donc $x \in \text{Ker } f + \text{Im } f$. Donc $\text{Ker } f + \text{Im } f = E$.

(c) Conclusion : $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

2. Notons r le rang de f : $r = \dim \text{Im } f$. Soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de $\text{Im } f$ et soit $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ une base de $\text{Ker } f$. Comme $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ alors (e_1, \dots, e_n) est une base de E . Pour $i > r$ alors $e_i \in \text{Ker } f$ donc $f(e_i) = 0$.

Comme $f \circ f = f$ alors pour n'importe quel $x \in \text{Im } f$ on a $f(x) = x$: en effet comme $x \in \text{Im } f$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ ainsi $f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$. En particulier si $i \leq r$ alors $f(e_i) = e_i$.

3. La matrice de f dans la base (e_1, \dots, e_n) est donc :

$$\begin{pmatrix} I & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

où I désigne la matrice identité de taille $r \times r$ et les (0) désignent des matrices nulles.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit M une matrice telle que $M^2 = 0$ et soit f l'application linéaire associée à M . Comme $M^2 = 0$ alors $f \circ f = 0$. Cela entraîne $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. Discutons suivant la dimension du noyau :

(a) Si $\dim \text{Ker } f = 3$ alors $f = 0$ donc $M = 0$ (la matrice nulle).

(b) Si $\dim \text{Ker } f = 2$ alors prenons une base de \mathbb{R}^3 formée de deux vecteurs du noyau et d'un troisième vecteur. Dans cette base la matrice de f est $M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ mais comme $f \circ f = 0$ alors $M'^2 = 0$

; un petit calcul implique $c = 0$. Donc M et M' sont les matrices de la même application linéaire f mais exprimées dans des bases différentes, donc M et M' sont semblables.

(c) Si $\dim \text{Ker } f = 1$ alors comme $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ on a $\dim \text{Im } f \leq 1$ mais alors cela contredit le théorème du rang : $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}^3$. Ce cas n'est pas possible.

(d) Conclusion : M est une matrice qui vérifie $M^2 = 0$ si et seulement si il existe une matrice inversible P et des réels a, b tels que

$$M = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

2. On va s'aider de l'exercice 8. Si $M^2 = M$ et f est l'application linéaire associée alors $f \circ f = f$. On a vu dans l'exercice 8 qu'alors $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ et que l'on peut choisir une base (e_1, e_2, e_3) telle que $f(e_i) = e_i$ puis $f(e_i) = 0$. Suivant la dimension du noyau cela donne que la matrice M' de f dans cette base est

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant M est semblable à l'une de ces matrices : il existe P inversible telle que $M = P^{-1}M'P$ où M' est l'une des quatre matrices A_i ci-dessus.

Géométriquement notre application est une projection (projection sur une droite pour la seconde matrice et sur un plan pour la troisième).

3. Posons $N = \frac{I+M}{2}$ et donc $M = 2N - I$. Alors $M^2 = I \iff (2N - I)^2 = I \iff 4N^2 - 4N - I = I \iff N^2 = N$. Donc par la deuxième question N est semblable à l'une des matrices A_i : $N = P^{-1}A_iP$. Donc $M = 2P^{-1}A_iP - I = P^{-1}(2A_i - I)P$. Ainsi M est semblable à l'une des matrices $2A_i - I$ suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce sont des matrices de symétrie (par rapport à l'origine pour la première matrice, par rapport à une droite pour la seconde matrice et par rapport à un plan pour la troisième).

L'idée de poser $N = \frac{I+M}{2}$ est la suivante : si $M^2 = I$ alors géométriquement l'application linéaire s associée à M est une *symétrie*, alors que si $N^2 = N$ alors l'application linéaire p associée est une *projection*. Et projection et symétrie sont liées par $p(x) = \frac{x+s(x)}{2}$ (faites un dessin !) c'est-à-dire $p = \frac{\text{id}+s}{2}$ ou encore $N = \frac{I+M}{2}$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Il est facile de voir que $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ donc f est linéaire, de plus, P étant un polynôme de degré $\leq n$ alors $f(P)$ aussi.
2. Pour $n = 3$ on calcule l'image de chacun des éléments de la base :

$$f(1) = 1 + 1 - 2 = 0, \quad f(X) = (X + 1) + (X - 1) - 2X = 0,$$

$$f(X^2) = (X + 1)^2 + (X - 1)^2 - 2X^2 = 2, \quad f(X^3) = (X + 1)^3 + (X - 1)^3 - 2X^3 = 6X.$$

Donc la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour le cas général on calcule

$$\begin{aligned} f(X^p) &= (X + 1)^p + (X - 1)^p - 2X^p \\ &= \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^k + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} X^k (-1)^{p-k} - 2X^p \\ &= \sum_{p-k \text{ pair et } k < p} 2 \binom{p}{k} X^k \end{aligned}$$

Donc la matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\binom{p}{0} & 0 & \cdots & 2\binom{p}{p} & 0 \\ 0 & 0 & 2\binom{p}{1} & 0 & \cdots & 0 & 2\binom{p+1}{1} \\ & 0 & 0 & \cdots & 2\binom{p}{2} & 0 & 0 \\ & & 0 & & 0 & 2\binom{p+1}{3} & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots & 0 & \\ & & & & 0 & \vdots & \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple de matrice, p est pair. Chaque colonne commence en alternant une valeur nulle/une valeur non-nulle jusqu'à l'élément diagonal (qui est nul).

3. Nous savons que $f(1) = 0$ et $f(X) = 0$ donc 1 et X sont dans le noyau $\text{Ker } f$. Il est aussi clair que les colonnes de la matrices $f(X^2), \dots, f(X^n)$ sont linéairement indépendantes (car la matrice est échelonnée). Donc $\text{Im } f = \text{Vect}\{f(X^2), f(X^3), \dots, f(X^n)\}$ et $\dim \text{Im } f = n - 1$.
Par la formule du rang $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim \text{Ker } f = 2$. Comme nous avons déjà deux vecteurs du noyau alors $\text{Ker } f = \text{Vect}\{1, X\}$.
4. (a) Soit $Q \in \text{Im } f$. Il existe donc $R \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(R) = Q$. On pose ensuite $P(X) = R(X) - R(0) - R'(0)X$. On a tout fait pour que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 0$. De plus par la linéarité de f et son noyau alors

$$f(P) = f(R(X) - R(0) - R'(0)X) = f(R(X)) - R(0)f(1) - R'(0)f(X) = f(R) = Q.$$

Donc notre polynôme P convient.

- (b) Montrons l'unicité. Soient P et \tilde{P} tels que $f(P) = f(\tilde{P}) = Q$ avec $P(0) = P'(0) = 0 = \tilde{P}(0) = \tilde{P}'(0)$. Alors $f(P - \tilde{P}) = Q - Q = 0$ donc $P - \tilde{P} \in \text{Ker } f = \text{Vect}\{1, X\}$. Ainsi $P - \tilde{P}$ s'écrit $P - \tilde{P} = aX + b$. Mais comme $(P - \tilde{P})(0) = 0$ alors $b = 0$, et comme $(P - \tilde{P})'(0) = 0$ alors $a = 0$. Ce qui prouve $P = \tilde{P}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Notons $C = AB$ et $D = BA$. Alors par la définition du produit de matrice :

$$c_{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{donc } c_{ii} = \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$

Ainsi

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}C = \sum_{1 \leq i \leq n} c_{ii} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki}$$

De même

$$\text{tr}(BA) = \text{tr}D = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} b_{ik} a_{ki}$$

Si dans cette dernière formule on renomme l'indice i en k et l'indice k en i (ce sont des variables muettes donc on leur donne le nom qu'on veut) alors on obtient :

$$\text{tr}(BA) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{1 \leq i \leq n} b_{ki} a_{ik} = \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} a_{ik} b_{ki} = \text{tr}(AB)$$

2. M et M' sont semblables donc il existe une matrice de passage P telle que $M' = P^{-1}MP$ donc

$$\text{tr}M' = \text{tr}(P^{-1}(MP)) = \text{tr}((MP)P^{-1}) = \text{tr}(MI) = \text{tr}M$$

3. La trace a aussi la propriété évidente que

$$\text{tr}(A + B) = \text{tr}A + \text{tr}B.$$

Fixons une base de E . Notons A la matrice de f dans cette base et B la matrice de g dans cette même base. Alors AB est la matrice de $f \circ g$ et BA est la matrice de $g \circ f$. Ainsi la matrice de $f \circ g - g \circ f$ est $AB - BA$ Donc

$$\text{tr}(f \circ g - g \circ f) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$