Calculs de déterminants

Fiche corrigée par Arnaud Bodin

Exercice 1

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006885]

Exercice 2

1. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de $\mathbb{R}^3$ à coefficients entiers est un nombre entier.

Correction ▼ Vidéo ■ [002753]

Exercice 3

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [006886]

Exercice 4

Calculer les déterminants suivant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006887]

Exercice 5

Soit $(a_0,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, $x \in \mathbb{C}$. Calculer

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 0 & & a_0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & x & a_{n-2} \\ 0 & & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001143]

Exercice 6

Soit a un réel. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Démontrer que : $\forall n \geqslant 2 \quad \Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001145]

Exercice 7 Déterminant de Vandermonde

Montrer que

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i)$$

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [002453]

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Règle de Sarrus.
2. Développer par rapport à la deuxième ligne.
3. Faire apparaître des 0 sur la première colonne.
4. Utiliser la linéarité par rapports à chaque ligne et chaque colonne pour simplifier les coefficients.
5. Faire apparaître des 0...
6. Faire apparaître des 0...
7. Permuter les lignes et les colonnes pour faire apparaître une matrice triangulaire par blocs.

Indication pour l'exercice 5 ▲

Développer par rapport à la dernière colonne.

Indication pour l'exercice 6 ▲

Développer par rapport à la première colonne pour obtenir Δ_{n-1} et un autre déterminant facile à calculer en développant par rapport à sa première ligne.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Faire les opérations suivantes sur les colonnes $C_n \leftarrow C_n - t_n C_{n-1}$, puis $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - t_n C_{n-2}$,..., $C_2 \leftarrow C_2 - t_n C_1$. Développer par rapport a la bonne ligne et reconnaître que l'on obtient le déterminant recherché mais au rang $n-1$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Donc $\begin{vmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} = 7 \times 4 - 11 \times (-8) = 116$.

2. Nous allons voir différentes méthodes pour calculer les déterminants.

   Première méthode. *Règle de Sarrus.* Pour le matrice 3×3 il existe une formule qui permet de calculer directement le déterminant.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

   Donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times 21 + 0 \times 15 \times 5 + 3 \times 6 \times 6 - 5 \times 4 \times 6 - 6 \times 15 \times 1 - 3 \times 0 \times 21 = -18$$

   Attention ! La règle de Sarrus ne s'applique qu'aux matrices 3×3.

3. **Deuxième méthode.** *Se ramener à une matrice diagonale ou triangulaire.*

   Si dans une matrice on change un ligne L_i en $L_i - \lambda L_j$ alors le déterminant reste le même. Même chose avec les colonnes.

$$\begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 1 \times 4 \times (-\tfrac{3}{2}) = -6$$

   On a utilisé le fait que le déterminant d'une matrice diagonale (ou triangulaire) est le produit des coefficients sur la diagonale.

4. **Troisième méthode.** *Développement par rapport à une ligne ou une colonne.* Nous allons développer par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-0) \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (+3) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 3 \times 7 - 1 \times 7 = 14$$

   Bien souvent on commence par simplifier la matrice en faisant apparaître un maximum de 0 par les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Puis on développe en choisissant la ligne ou la colonne qui a le plus de 0.

5. On fait apparaître des 0 sur la première colonne puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

   Pour calculer le déterminant 3×3 on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on la développe.

$$-\Delta = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 6L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 20 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} = -96$$

   Donc $\Delta = 96$.

6. La matrice a déjà beaucoup de 0 mais on peut en faire apparaître davantage sur la dernière colonne, puis on développe par rapport à la dernière colonne.

$$\Delta' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On développe ce dernier déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

7. Toujours la même méthode, on fait apparaître des 0 sur la première colonne, puis on développe par rapport à cette colonne.

$$\Delta'' = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la deuxième colonne :

$$\Delta'' = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -12$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. L'aire $\mathscr{A}$ du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ est la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ donc $\mathscr{A} = |ad - bc|$. Ici on trouve $\mathscr{A} = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = +5$ où abs désigne la fonction valeur absolue.

2. Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice formée des trois vecteurs. Ici

$$\mathscr{V} = \operatorname{abs} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{abs} \left(+1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) = 4$$

où l'on a développé par rapport à la première ligne.

3. Si un parallélépipède est construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les coefficients sont des entiers alors le volume correspond au déterminant d'une matrice à coefficients entiers. C'est donc un entier.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Par la règle de Sarrus :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

2. On développe par rapport à la seconde ligne qui ne contient qu'un coefficient non nul et on calcule le déterminant 3×3 par la règle de Sarrus :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

3.

$$\Delta_3 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3 = (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -16$$

4. Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes et aussi chacune de ses colonnes. Par exemple les coefficients de la première ligne sont tous des multiples de 5 donc

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

On fait la même chose avec la troisième ligne :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Et enfin les coefficients la première colonne sont des multiples de 2 et ceux de la troisième colonne sont des multiples de 7 donc :

$$\Delta_4 = 5 \times 2 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times 2 \times 2 \times 7 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Les coefficients sont plus raisonnables ! On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir :

$$\Delta_4 = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 140 \times 56 = 7840$$

5.

$$\Delta_5 = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3 \end{array} \begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \\ c & 0 & a & a \\ -c & c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On fait ensuite les opérations suivantes sur les colonnes : $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ et $C_3 \leftarrow C_3 - C_4$ pour obtenir une dernière ligne facile à développer :

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & 2a & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & b \\ c & c & 0 & a \\ -c & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = +c \times \begin{vmatrix} 2a & b & 0 \\ 0 & -2b & b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = bc(bc - 4a^2)$$

6. On fait d'abord les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$ et $C_2 \leftarrow C_2 - C_4$ et on développe par rapport à la première ligne :

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3 \\ b & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (-2) \times \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix}$$

Le premier déterminant à calculer se développe par rapport à la deuxième colonne et le second déterminant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_6 = (-2) \times a \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} + 3 \times b \times \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ b & 0 & a \end{vmatrix} = 4a^3 + 27b^2$$

7. Nous allons permuter des lignes et des colonnes pour se ramener à une matrice diagonale par blocs. Souvenons-nous que lorsque l'on échange deux lignes (ou deux colonnes) alors le déterminant change de signe. Nous allons rassembler les zéros. On commence par échanger les colonnes C_1 et C_3 : $C_1 \leftrightarrow C_3$:

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on échange les lignes L_1 et L_4 : $L_1 \leftrightarrow L_4$:

$$\Delta_7 = + \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

Notre matrice est sous la forme d'une matrice diagonale par blocs et son déterminant est le produit des déterminants.

$$\Delta_7 = \left|\begin{array}{cc|ccc} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -3 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = (-31) \times (-6) = 186$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On retire la première colonne à toutes les autres colonnes

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ a_1 & 0 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_2 - a_1 \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\Delta_1 = (-1)^{n-1} a_1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 - a_1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_1 (a_2 - a_1)^{n-1}$$

Où l'on a reconnu le déterminant d'un matrice triangulaire supérieure. Donc

$$\Delta_1 = a_1(a_1-a_2)^{n-1}.$$

2. On va transformer la matrice correspondante en une matrice triangulaire supérieure, on commence par remplacer la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ (on ne note que les coefficients non nuls) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & -1 \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Puis on remplace la ligne L_3 par $L_3 - L_2$ (attention il s'agit de la nouvelle ligne L_2) et on continue ainsi de suite jusqu'à $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$ (n est la taille de la matrice sous-jacente) :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & 1 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & 1 & (-1)^n \\ & & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On fait attention pour le dernier remplacement $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$ légèrement différent et qui conduit au déterminant d'une matrice triangulaire : :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & & & & & +1 \\ 0 & 1 & & & & -1 \\ & 0 & 1 & & & +1 \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 1 & (-1)^n \\ & & & & 0 & 1-(-1)^n \end{vmatrix} = 1-(-1)^n.$$

En conclusion $\Delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

3. On retire la colonne C_1 aux autres colonnes C_i pour faire apparaître des 0 :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & -b & & \cdots & -b \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

On remplace ensuite L_1 par $L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$ (ou ce qui revient au même : faites les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ puis $L_1 \leftarrow L_1 + L_3, \ldots$ chacune de ces opérations fait apparaître un 0 sur la première ligne) pour obtenir une matrice triangulaire inférieure :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} na+b & 0 & & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ a & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b & 0 \\ a & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix} = (na+b)b^{n-1}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Commençons par un travail préparatoire : le calcul du déterminant de taille $(n-1)\times(n-1)$:

$$\Gamma_k = \left|\begin{array}{cccc|cccc}
x & & & & & & & \\
-1 & x & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & -1 & x & & & & \\
\hline
 & & & & -1 & x & & \\
 & & & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & & & \ddots & x \\
 & & & & & & & -1
\end{array}\right|$$

où le bloc en haut à gauche est de taille $k\times k$.
On développe, en commençant par la première ligne, puis encore une fois par la première ligne,... pour trouver que

$$\Gamma_k = x^k \times (-1)^{n-1-k}$$

Autre méthode : on retrouve le même résultat en utilisant les déterminant par blocs :

$$\left|\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline (0) & C \end{array}\right| = \det A \times \det C$$

Revenons à l'exercice !
Contrairement à l'habitude on développe par rapport à la colonne qui a le moins de 0. En développant par rapport à la dernière colonne on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \begin{vmatrix}
x & 0 & & a_0 \\
-1 & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & \ddots & x & a_{n-2} \\
0 & & -1 & x+a_{n-1}
\end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}a_0 \begin{vmatrix}
-1 & x & & \\
 & -1 & x & \\
 & & \ddots & \ddots \\
 & & & -1
\end{vmatrix} + (-1)^n a_1 \begin{vmatrix}
x & & & & \\
 & -1 & x & & \\
 & & -1 & x & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & -1
\end{vmatrix} \\
&\quad + \cdots + (-1)^{2n-3}a_{n-2} \begin{vmatrix}
x & & & & \\
-1 & \ddots & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & & -1 & x & \\
 & & & & -1
\end{vmatrix} + (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1}) \begin{vmatrix}
x & & & \\
-1 & \ddots & & \\
 & \ddots & \ddots & \\
 & & -1 & x
\end{vmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times \Gamma_k \quad + \quad (-1)^{2n-2}(x+a_{n-1})\Gamma_{n-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-1+k} a_k \times x^k \times (-1)^{n-1-k} \quad + \quad (x+a_{n-1})x^{n-1} \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. En développant par rapport à la première colonne on trouve la relation suivante :

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^{n-1}(n-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ a & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 3 \\ 0 & \cdots & a & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{vmatrix}$$

Notons δ ce dernier déterminant (dont la matrice est de taille $n-1 \times n-1$). On le calcule en développant par rapport à la première ligne

$$\delta = (-1)^{n-2}(n-1)\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{n-2}(n-1)a^{n-2}.$$

Donc

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2.$$

2. Prouvons la formule

$$\Delta_n = a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- **Initialisation.** Pour $n=2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$ donc la formule est vraie.
- **Hérédité.** Supposons la formule vraie vraie au rang $n-1$, c'est-à-dire $\Delta_{n-1} = a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2$. Calculons Δ_n :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= a\Delta_{n-1} - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{par la première question}\\ &= a\Big(a^{n-1} - a^{n-3}\sum_{i=1}^{n-2} i^2\Big) - a^{n-2}(n-1)^2 \qquad \text{par l'hypothèse de récurrence}\\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-2} i^2 - a^{n-2}(n-1)^2\\ &= a^n - a^{n-2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2\end{aligned}$$

  La formule est donc vraie au rang n.
- **Conclusion.** Par le principe de récurrence la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$.

Correction de l'exercice 7 ▲

Notons V_n le déterminant à calculer et $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice correspondante.
Nous allons faire les opérations suivantes sur les colonnes en partant de la dernière colonne. C_n est remplacée par $C_n - t_nC_{n-1}$, puis C_{n-1} est remplacée par $C_{n-1} - t_nC_{n-2}$,... jusqu'à C_2 qui est remplacée par $C_2 - t_nC_1$. On obtient donc

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \dots & t_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t_1 - t_n & t_1^2 - t_1t_n & \dots & t_1^{n-1} - t_1^{n-2}t_n \\ 1 & t_2 - t_n & t_2^2 - t_2t_n & \dots & t_2^{n-1} - t_2^{n-2}t_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on écrit $t_i^k - t_i^{k-1} t_n = t_i^{k-1}(t_i - t_n)$ pour obtenir :

$$V_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} t_1 - t_n & t_1(t_1 - t_n) & \dots & t_1^{n-2}(t_1 - t_n) \\ t_2 - t_n & t_2(t_2 - t_n) & \dots & t_2^{n-2}(t_2 - t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} - t_n & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

Nous utilisons maintenant la linéarité du déterminant par rapport à chacune des lignes : on factorise la première ligne par $t_1 - t_n$; la second par $t_2 - t_n$,... On obtient

$$V_n = (-1)^{n-1}(t_1 - t_n)(t_2 - t_n)\cdots(t_{n-1} - t_n) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{n-2} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & t_{n-1} & t_{n-1}^2 & \dots & t_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

Donc

$$V_n = V_{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j).$$

Si maintenant on suppose la formule connue pour V_{n-1} c'est-à-dire $V_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (t_j - t_i)$ Alors on obtient par récurrence que

$$V_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n) = V_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \prod_{j=1}^{n-1} (t_n - t_j) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (t_j - t_i).$$
