



Droites du plan ; droites et plans de l'espace

Fiche corrigée par Arnaud Bodin

1 Droites dans le plan

Exercice 1

Soit P un plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points et les vecteurs sont exprimés par leurs coordonnées dans \mathcal{R} .

- Donner un vecteur directeur, la pente une équation paramétrique et une équation cartésienne des droites (AB) suivantes :
 - $A(2, 3)$ et $B(-1, 4)$
 - $A(-7, -2)$ et $B(-2, -5)$
 - $A(3, 3)$ et $B(3, 6)$
- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites passant par A et dirigées par \vec{v} avec :
 - $A(2, 1)$ et $\vec{v}(-3, -1)$
 - $A(0, 1)$ et $\vec{v}(1, 2)$
 - $A(-1, 1)$ et $\vec{v}(1, 0)$
- Donner des équations paramétriques et cartésiennes des droites définies comme suit :
 - passant par le point $(0, 4)$ et de pente 3,
 - passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des x ,
 - passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite $D : 8x + 4y = 3$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001956]

Exercice 2

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x + 2y = 3$, $(AC) : x + y = 2$, $(BC) : 2x + 3y = 4$.

- Donner les coordonnées des points A, B, C .
- Donner les coordonnées des milieux A', B', C' des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
- Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[001960]

Exercice 3 Point équidistant d'une famille de droites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la droite D_λ d'équation cartésienne : $(1 - \lambda^2)x + 2\lambda y = 4\lambda + 2$.
Montrer qu'il existe un point M_0 équidistant de toutes les droites D_λ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[004952]

Exercice 4

Déterminer le projeté orthogonal du point $M_0(x_0, y_0)$ sur la droite (D) d'équation $2x - 3y = 5$ ainsi que son symétrique orthogonal.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[006884]

2 Droites et plans dans l'espace

Exercice 5

1. Trouver une équation du plan (P) défini par les éléments suivants.

(a) A, B et C sont des points de (P)

i. $A(0, 0, 1), B(1, 0, 0)$ et $C(0, 1, 0)$.

ii. $A(1, 1, 1), B(2, 0, 1)$ et $C(-1, 2, 4)$.

(b) A est un point de (P) , \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs directeurs de (P)

i. $A(1, 2, 1), \vec{u}(4, 0, 3)$ et $\vec{v}(1, 3, -1)$.

ii. $A(1, 0, 2), \vec{u}(2, -1, 3)$ et $\vec{v}(-1, 4, 5)$.

(c) A est un point de (P) , D est une droite contenue dans (P)

i. $A(0, 0, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ 4x - y + 2z = 0 \end{cases}$

ii. $A(1, 1, 0)$ et $(D) : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$

(d) D et D' sont des droites contenues dans (P)

i. $(D) : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 3x - y - z + 5 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases}$

ii. $(D) : \begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ et $(D') : \begin{cases} 2x + y - 3z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$

2. Montrer que les représentations paramétriques suivantes définissent le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 - s - t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 1 + 3s' - t' \\ y = 3 + 3s' + t' \\ z = 1 - 2s' \end{cases}$$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002011]

Exercice 6

On considère la famille de plans $(P_m)_{m \in \mathbb{R}}$ définis par les équations cartésiennes :

$$m^2x + (2m - 1)y + mz = 3$$

1. Déterminer les plans P_m dans chacun des cas suivants :

(a) $A(1, 1, 1) \in P_m$

(b) $\vec{n}(2, -\frac{5}{2}, -1)$ est normal à P_m .

(c) $\vec{v}(1, 1, 1)$ est un vecteur directeur de P_m

2. Montrer qu'il existe un unique point Q appartenant à tous les plans P_m .

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002020]

Exercice 7

1. Déterminer la distance du point A au plan (P)

(a) $A(1, 0, 2)$ et $(P) : 2x + y + z + 4 = 0$.

(b) $A(3, 2, 1)$ et $(P) : -x + 5y - 4z = 5$.

2. Calculer la distance du point $A(1, 2, 3)$ à la droite $(D) : \begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002021]

Exercice 8

1. On considère le point $A(-2, 4, 1)$, les vecteurs $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 2, -4)$, $\vec{w}(3, -1, 1)$ et le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On note x', y' et z' les coordonnées dans ce repère. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x, y, z en fonction de x', y', z' .

2. On considère la droite $(D) : \begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Utiliser le changement de repère pour donner une équation de D dans le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

3. Donner les formules analytiques du changement de repère inverse.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002034]

Exercice 9

1. Définir analytiquement la projection orthogonale sur le plan d'équation $2x + 2y - z = 1$.

2. Définir analytiquement la projection orthogonale sur la droite d'équation $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$.

3. Donner l'expression analytique de la projection sur le plan (P) contenant le point $C(2, -1, 1)$ et ayant pour vecteurs directeurs $\vec{u}(0, -1, 1)$ et $\vec{u}'(-2, 0, 1)$, selon la droite (AB) , où $A(1, -1, 0)$ et $B(0, -1, 3)$.

[Correction ▼](#) [Vidéo ■](#)

[002039]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Les médianes sont les droites (AA') , (BB') , (CC') .

Indication pour l'exercice 3 ▲

La distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) Un vecteur directeur est \vec{AB} dont les coordonnées sont $(x_B - x_A, y_B - y_A) = (-3, 1)$. Pour n'importe quel vecteur directeur $\vec{v} = (x_v, y_v)$ la pente est le réel $p = \frac{y_v}{x_v}$. La pente est indépendante du choix du vecteur directeur. On trouve ici $p = -\frac{1}{3}$. Une équation paramétrique de la droite de vecteur directeur

\vec{v} passant par $A = (x_A, y_A)$ est donnée par $\begin{cases} x = x_v t + x_A \\ y = y_v t + y_A \end{cases}$. Donc ici pour le vecteur directeur \vec{AB} on

trouve l'équation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 3 \end{cases}$

Il y a plusieurs façons d'obtenir une équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Première méthode. On sait que $A = (x_A, y_A)$ appartient à la droite donc ses coordonnées vérifient l'équation $ax_A + by_A + c = 0$, idem avec B . On en déduit le système $\begin{cases} 2a + 3b + c = 0 \\ -a + 4b + c = 0 \end{cases}$. Les solutions s'obtiennent à une constante multiplicative près, on peut fixer $a = 1$ et on trouve alors $b = 3$ et $c = -11$. L'équation est donc $x + 3y - 11 = 0$.

- (b) On trouve $\vec{v} = \vec{AB} = (5, -3)$, $p = -\frac{3}{5}$ et $\begin{cases} x = 5t - 7 \\ y = -3t - 2 \end{cases}$

Deuxième méthode. Pour trouver l'équation cartésienne on part de l'équation paramétrique réécrite

ainsi $\begin{cases} \frac{x+7}{5} = t \\ -\frac{y+2}{3} = t \end{cases}$ On en déduit $\frac{x+7}{5} = -\frac{y+2}{3}$; d'où l'équation $3x + 5y + 31 = 0$.

- (c) On trouve $\vec{v} = \vec{AB} = (0, 3)$, la droite est donc verticale (sa pente est infinie) une équation paramétrique est $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3t + 6 \end{cases}$. Une équation cartésienne est simplement $(x = 3)$.

2. (a) Equation paramétrique $\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}$

Troisième méthode. Pour une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, on sait que $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite et donc $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur (car alors $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$). Réciproquement si $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur alors une équation est de la forme $ax + by + c = 0$ pour une certaine constante c à déterminer.

Ici on nous donne le vecteur directeur $\vec{v} = (-3, -1)$ donc on cherche une équation sous la forme $-x + 3y + c = 0$. Pour trouver c , on utilise que A appartient à la droite donc $-x_A + 3y_A + c = 0$, ce qui conduit à $c = -1$. Ainsi une équation de la droite est $-x + 3y = 1$.

- (b) On trouve $2x - y + 1 = 0$.
(c) Droite horizontale d'équation $(y = 1)$.

3. Voici juste les résultats :

- (a) $y = 3x + 4$,
(b) $y = -3$,
(c) $8x + 4y = 4$ (les droites parallèles à $8x + 4y = 3$ sont de la forme $8x + 4y = c$).
-

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Le point A est l'intersection des droites (AB) et (AC) . Les coordonnées (x, y) de A sont donc solutions du système : $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ donné par les équations des deux droites. La seule solution est $(x, y) = (1, 1)$. On a donc $A = (1, 1)$. On fait de même pour obtenir le point $B = (-1, 2)$ et $C = (2, 0)$.
2. Notons A' le milieu de $[BC]$ alors les coordonnées se trouvent par la formule suivante $A' = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}) = (\frac{1}{2}, 1)$. De même on trouve $B' = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ et $C' = (0, \frac{3}{2})$.
3. (a) Les médianes ont pour équations : $(AA') : (y = 1)$; $(BB') : (3x + 5y = 7)$; $(CC') : (3x + 4y = 6)$.

- (b) Vérifions que les trois médianes sont concourantes (ce qui est vrai quelque soit le triangle). On calcule d'abord l'intersection $I = (AA') \cap (BB')$, les coordonnées du point I d'intersection vérifient donc le système $\begin{cases} y = 1 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$. On trouve $I = (\frac{2}{3}, 1)$.
- Il ne reste plus qu'à vérifier que I appartient à la droite (CC') d'équation $3x + 4y = 6$. En effet $3x_I + 4y_I = 6$ donc $I \in (CC')$.
- Conclusion : les médianes sont concourantes au point $I = (\frac{2}{3}, 1)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Nous savons que la distance d'un point $M_0(x_0, y_0)$ à une droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est donnée par la formule $d(M_0, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Pour une droite D_λ la formule donne : $d(M_0, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}}$.

Analyse.

On cherche un point $M_0 = (x_0, y_0)$ tel que pour tout λ , $d(M_0, D_\lambda) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. L'égalité $d(M_0, D_\lambda)^2 = k^2$ conduit à

$$\left((1-\lambda^2)x_0 + 2\lambda y_0 - (4\lambda + 2) \right)^2 = k^2 \left((1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2 \right)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Nos inconnues sont x_0, y_0, k . On regarde l'égalité comme une égalité de deux polynômes en la variable λ .

Pour ne pas avoir à tout développer on raffine un peu : on identifie les termes de plus haut degré en λ^4 : $x_0^2 \lambda^4 = k^2 \lambda^4$ donc $x_0^2 = k^2$.

En évaluant l'égalité pour $\lambda = 0$ cela donne $(x_0 - 2)^2 = k^2$. On en déduit $(x_0 - 2)^2 = x_0^2$ dont la seule solution est $x_0 = 1$. Ainsi $k = 1$ (car $k > 0$).

L'égalité pour $\lambda = +1$ donne $(2y_0 - 6)^2 = 4k^2$ et pour $\lambda = -1$ donne $(-2y_0 + 2)^2 = 4k^2$. La seule solution est $y_0 = 2$.

Synthèse. Vérifions que le point de coordonnées $M_0 = (1, 2)$ est situé à une distance $k = 1$ de toutes les droites D_λ .

Pour $(x_0, y_0) = (1, 2)$, on trouve : $d(M_0, D_\lambda) = \frac{|(1-\lambda^2) + 4\lambda - (4\lambda + 2)|}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\lambda^2}} = \frac{|\lambda^2 + 1|}{\sqrt{(\lambda^2 + 1)^2}} = \frac{|\lambda^2 + 1|}{|\lambda^2 + 1|} = 1$. Donc $M_0 = (1, 2)$ est bien équidistant de toutes les droites D_λ .

Correction de l'exercice 4 ▲

(D) est une droite de vecteur normal $\vec{n} = (2, -3)$. Le projeté orthogonal $p(M_0)$ de M_0 sur (D) est de la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$ où λ est un réel à déterminer. Le point $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$ a pour coordonnées $(x_0 + 2\lambda, y_0 - 3\lambda)$.

$$M_0 + \lambda \cdot \vec{n} \in (D) \iff 2(x_0 + 2\lambda) - 3(y_0 - 3\lambda) = 5 \iff \lambda = \frac{-2x_0 + 3y_0 + 5}{13}$$

$p(M_0)$ a pour coordonnées $(x_0 + 2 \frac{-2x_0 + 3y_0 + 5}{13}, y_0 - 3 \frac{-2x_0 + 3y_0 + 5}{13})$ ou encore $p(M_0) = (\frac{9x_0 + 6y_0 + 10}{13}, \frac{6x_0 + 4y_0 - 15}{13})$.

Le symétrique orthogonal $s(M_0)$ vérifie : $s(M_0) = M_0 + 2M_0 p(M_0)$ (car $p(M_0)$ est le milieu du segment $[M_0, s(M_0)]$) autrement dit $s(M_0) = M_0 + 2\lambda \cdot \vec{n}$ (pour le λ obtenu ci-dessus).

Ses coordonnées sont donc $s(M_0) = (x_0 + 4 \frac{-2x_0 + 3y_0 + 5}{13}, y_0 - 6 \frac{-2x_0 + 3y_0 + 5}{13})$ ou encore $(\frac{5x_0 + 12y_0 + 20}{13}, \frac{12x_0 - 5y_0 - 30}{13})$.

Correction de l'exercice 5 ▲

- (a) Une équation d'un plan est $ax + by + cz + d = 0$. Si un point appartient à un plan cela donne une condition linéaire sur a, b, c, d . Si l'on nous donne trois point cela donne un système linéaire de trois équations à trois inconnues (car l'équation est unique à un facteur multiplicatif non nul près). On trouve :

- i. $x + y + z - 1 = 0$
 ii. $3x + 3y + z - 7 = 0$
- (b) $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal au plan. Si $\vec{n} = (a, b, c)$ alors une équation du plan est $ax + by + cz + d = 0$. On trouve :
- i. $-9x + 7y + 12z - 17 = 0$
 ii. $17x + 13y - 7z - 3 = 0$
- (c) Trouver deux points B, C de la droite D . Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P . Procédé ensuite comme la question précédente. On obtient :
- i. Par exemple $B = (0, -6, -3)$ et $C = (-1, 0, 2)$ appartiennent à D . On trouve l'équation $4x - y + 2z = 0$.
 ii. Par exemple $B = (0, -1, 1)$ (pour $t = 0$) et $C = (1, 1, -2)$ (pour $t = 1$) appartiennent à D . On trouve l'équation $2x - y - 1 = 0$.
- (d) Trouver un point A de D et deux points B, C de la droite D' . Le vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs de P . Puis procédé comme avant.
2. Les plans sont définis paramétriquement par $(P) : (2, 2, 1) + s(1, 2, -1) + t(2, 1, -1)$ donc deux des vecteurs directeurs sont $\vec{u} = (1, 2, -1)$ et $\vec{v} = (2, 1, -1)$. Un vecteur normal à (P) est alors $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-1, -1, -3)$.
 Pour le plan (P') défini par $(1, 3, 1) + s'(3, 3, -2) + t'(-1, 1, 0)$, il a pour vecteurs directeurs $\vec{u}' = (3, 3, -2)$ et $\vec{v}' = (-1, 1, 0)$. Un vecteur normal à (P') est alors $\vec{n}' = \vec{u}' \wedge \vec{v}' = (2, 2, 6)$.
 Les vecteurs normaux \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires donc les plans (P) et (P') sont parallèles (ou confondus).
 Maintenant le point $A = (2, 2, 1)$ appartient à (P) (on a fait $s = 0$ et $t = 0$). Il appartient aussi à (P') (en prenant $s' = 0$ et $t' = -1$).
 Bilan. (P) et (P') sont parallèles et ont un point commun : ils sont égaux !

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (a) Un point A appartient à un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ si et seulement si $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$. Donc $A(1, 1, 1) \in P_m$ si et seulement si $m^2 + (2m - 1) + m = 3$. Ce qui équivaut à $m^2 + 3m - 4 = 0$. Les deux solutions sont $m = 1$ et $m = -4$. Donc A appartient aux plans P_1 et P_{-4} et pas aux autres.
- (b) Un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} = (a, b, c)$. Donc si $\vec{n} = (2, -\frac{5}{2}, -1)$ est un vecteur normal à P_m une équation cartésienne est de la forme $2x - \frac{5}{2}y - z + d = 0$. Or une équation de P_m est $m^2x + (2m - 1)y + mz - 3 = 0$. Ces deux équations sont égales à un facteur multiplicatif près $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $2x - \frac{5}{2}y - z + d = \lambda(m^2x + (2m - 1)y + mz - 3)$. On en déduit $2 = \lambda m^2$, $-\frac{5}{2} = \lambda(2m - 1)$ et $-1 = \lambda m$. En divisant la première égalité par la troisième on trouve : $m = -2$. D'où $\lambda = \frac{1}{2}$. La seconde égalité est alors vérifiée.
 Le seul plan ayant \vec{n} pour vecteur normal est P_{-2} .
- (c) Un vecteur est directeur du plan P si et seulement si le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$. Ici $\vec{n} = (m^2, 2m - 1, m)$. Donc $\vec{v} = (1, 1, 1)$ est vecteur directeur si et seulement si $m^2 + 2m - 1 + m = 0$. Ce qui équivaut à $m^2 + 3m - 1 = 0$. Les deux plans qui ont pour vecteur directeur \vec{v} sont les plans ayant le paramètre $m = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$.
2. Nous allons prendre 3 plans de la famille (P_m) , calculer leur point d'intersection et finalement montrer que ce point appartient aux autres plans.
 Prenons trois paramètre "au hasard" $m = 0, m = 1, m = -1$. Un point qui appartient à ces trois plans doit vérifier les trois équations :

$$\begin{cases} y = -3 \\ x + y + z = 3 \\ x - 3y - z = 3 \end{cases}$$

On résout ce système pour trouver que l'intersection des trois plans P_0, P_1 et P_{-1} est le point $Q = (0, -3, 6)$.

Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à tous les plans P_m : c'est le cas car $m^2 \cdot 0 + (2m - 1) \cdot (-3) + m \cdot 6 - 3 = 0$.

Autre méthode. On cherche un point $Q = (x_0, y_0, z_0)$ qui vérifie l'égalité $m^2 x_0 + (2m - 1)y_0 + m z_0 - 3 = 0$ pour tout m . En considérant que c'est une égalité polynomiale en m (x_0, y_0, z_0 sont fixés) on en déduit que $m^2 x_0 + (2m - 1)y_0 + m z_0 - 3$ est le polynôme nul : $x_0 m^2 + (2y_0 + z_0)m - y_0 - 3 = 0$. Ces coefficients sont nuls : $x_0 = 0$ (le coefficient de m^2), $2y_0 + z_0 = 0$ (le coefficient de m), $-y_0 - 3 = 0$ (le terme constant). On trouve bien sûr le même point d'intersection de tous les plans : $Q = (0, -3, 6)$.

Correction de l'exercice 7 ▲

1. La distance d'un point $A = (x_0, y_0, z_0)$ à un plan P d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est donnée par la formule :

$$d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

On trouve donc

$$(a) \quad d(A, P) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

$$(b) \quad d(A, P) = \frac{2}{\sqrt{42}}.$$

2. Trouvons d'abord une équation paramétrique de la droite D . On pose par exemple $z = t$ et on exprime x et y en fonction de t . Partant du système $\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$ on trouve $x = 1 - t$ et $y = 3 + t$. La droite D est donc l'ensemble des points $M_t = (1 - t, 3 + t, t)$ (t parcourant \mathbb{R}).

La distance AM_t vérifie donc

$$AM_t^2 = \|\vec{AM}_t\|^2 = \|(1 - t - 1, 3 + t - 2, t - 3)\|^2 = t^2 + (t + 1)^2 + (t - 3)^2 = 3t^2 - 4t + 10.$$

Minimiser cette distance c'est trouver le minimum de la fonction $\delta(t) = 3t^2 - 4t + 10$. Il est donc atteint pour t_0 vérifiant $\delta'(t_0) = 0$, donc pour $t_0 = \frac{2}{3}$. La distance entre A et la droite D est donc la longueur $AM_{t_0} = \sqrt{\delta(t_0)} = \sqrt{\frac{26}{3}}$. Au passage on a obtenu la perpendiculaire à D passant par A c'est la droite (AM_{t_0}) .

Autre méthode.

Il existe une formule pour calculer directement la distance. Si \vec{v} est un vecteur directeur de D et M_0 un point de D alors

$$d(A, D) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{AM}_0\|}{\|\vec{v}\|}.$$

On a paramétré la droite D par les points $M_t = (1, 3, 0) + t(-1, 1, 1)$. Donc $M_0 = (1, 3, 0) \in D$ et $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ est un vecteur directeur de D . On a alors $\vec{AM}_0 = (0, 1, -3)$ et $\vec{v} \wedge \vec{AM}_0 = (-4, -3, -1)$: on obtient :

$$d(A, D) = \frac{\|\vec{v} \wedge \vec{AM}_0\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{3}}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. Notons \mathcal{R} le repère initial $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dire qu'un point M du plan a pour coordonnées (x, y, z) dans \mathcal{R} signifie $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Si \mathcal{R}' désigne un autre repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ alors le même point M a pour coordonnées (x', y', z') dans \mathcal{R}' signifie $\vec{AM} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$.

La formule de changement c'est simplement écrire les coordonnées de l'égalité $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}$$

Mais on connaît les coordonnées de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ dans \mathcal{R} :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + z' \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où l'égalité de changement de repère :

$$(\mathcal{S}) \quad \begin{cases} x = -2 + x' + 2y' + 3z' \\ y = 4 + x' + 2y' - z' \\ z = 1 + x' - 4y' + z' \end{cases}$$

2. Dans l'équation de la droite (D) $\begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ dans le repère \mathcal{R} on remplace x, y, z par la formule (\mathcal{S}) obtenue à la question précédente.

On obtient :

$$\begin{cases} (4 + x' + 2y' - z') - (1 + x' - 4y' + z') = 3 \\ (-2 + x' + 2y' + 3z') + (4 + x' + 2y' - z') = 2 \end{cases} .$$

Ce qui donne une équation de (D) dans le repère \mathcal{R}' :

$$\begin{cases} 6y' - 2z' = 0 \\ 2x' + 4y' + 2z' = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} 3y' - z' = 0 \\ x' + 2y' + z' = 0 \end{cases}$$

En particulier en faisant $(x', y', z') = (0, 0, 0)$ on remarque que cette droite passe par A .

3. Nous avons obtenu l'égalité (\mathcal{S}) de changement de repère de \mathcal{R}' vers \mathcal{R} qui s'écrit :

$$\begin{cases} x + 2 = x' + 2y' + 3z' \\ y - 4 = x' + 2y' - z' \\ z - 1 = x' - 4y' + z' \end{cases} \implies \begin{cases} X = x' + 2y' + 3z' \\ Y = x' + 2y' - z' \\ Z = x' - 4y' + z' \end{cases}$$

Où l'on a noté $X = x + 2, Y = y - 4, Z = z - 1$. On inverse le système par la méthode de Gauss pour obtenir après calculs :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}(X + 7Y + 4Z) \\ y' = \frac{1}{12}(X + Y - 2Z) \\ z' = \frac{1}{12}(3X - 3Y) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{12}(x + 7y + 4z - 30) \\ y' = \frac{1}{12}(x + y - 2z) \\ z' = \frac{1}{12}(3x - 3y + 18) \end{cases}$$

Avec les matrices cela se fait ainsi : le système (\mathcal{S}) devient

$$\begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Notons P le plan d'équation $2x + 2y - z = 1$. Et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque. $\vec{n} = (2, 2, -1)$ est un vecteur normal au plan. On cherche $p(M_0)$ appartenant au plan sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{n}$.

$$\begin{aligned} p(M_0) \in P &\iff M_0 + \lambda \cdot \vec{n} \in P \\ &\iff (x_0, y_0, z_0) + \lambda(2, 2, -1) \in P \\ &\iff (x_0 + 2\lambda, y_0 + 2\lambda, z_0 - \lambda) \in P \\ &\iff 2(x_0 + 2\lambda) + 2(y_0 + 2\lambda) - (z_0 - \lambda) = 1 \\ &\iff \lambda = \frac{1 - 2x_0 - 2y_0 + z_0}{9} \end{aligned}$$

En posant $\lambda_0 = \frac{1 - 2x_0 - 2y_0 + z_0}{9}$, le projeté orthogonal de M_0 sur P est défini par $p(M_0) = (x_0 + 2\lambda_0, y_0 + 2\lambda_0, z_0 - \lambda_0)$.

2. Notons D la droite d'équation $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - z = 2 \end{cases}$ et soit $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point quelconque.

Il nous faut deux vecteurs normaux : par exemple $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ et $\vec{n}_2 = (2, 0, -1)$ (qui sont les vecteurs normaux aux deux plans définissant D).

On cherche le projeté orthogonal $\pi(M_0)$ sur la droite D sous la forme $M_0 + \lambda_1 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2$. On va déterminer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que ce point appartienne à D .

$$\begin{aligned} \pi(M_0) \in D &\iff M_0 + \lambda_1 \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2 \in D \\ &\iff (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2, 0, -1) \in D \\ &\iff (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2, y_0 + \lambda_1, z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) \in D \\ &\iff \begin{cases} (x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) + (y_0 + \lambda_1) + (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 1 \\ 2(x_0 + \lambda_1 + 2\lambda_2) - (z_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda_1 + \lambda_2 = 1 - x_0 - y_0 - z_0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 = 2 - 2x_0 + z_0 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \frac{1}{14}(3 - 3x_0 - 5y_0 - 6z_0) \text{ et } \lambda_2 = \frac{1}{14}(5 - 5x_0 + y_0 + 4z_0) \end{aligned}$$

Ainsi $\pi(M_0) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2, 0, -1)$ avec les valeurs de λ_1, λ_2 obtenues.

3. Le principe est similaire, voici les étapes :

- (a) Trouver une équation du plan. Un vecteur normal au plan est $\vec{u} \wedge \vec{u}' = (-1, -2, -2)$. Donc le plan est d'équation $x + 2y + 2z - 2 = 0$.
- (b) Chercher le projeté d'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ sous la forme $M_0 + \lambda \cdot \vec{AB}$. Trouver λ_0 de sorte que $M_0 + \lambda_0 \cdot \vec{AB}$ appartienne au plan.
- (c) On trouve $\vec{AB} = (-1, 0, 3)$ et $\lambda_0 = -\frac{1}{5}(x_0 + 2y_0 + 2z_0 - 2)$ et donc le projeté cherché est $p(M_0) = (x_0 - \lambda_0, y_0, z_0 + 3\lambda_0)$.
-