



## Calculs sur les matrices

---

Corrections d'Arnaud Bodin.

### 1 Opérations sur les matrices

#### Exercice 1

---

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001040]

#### Exercice 2

---

Soit  $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  pour  $\theta \in \mathbb{R}$ . Calculer  $A(\theta) \times A(\theta')$  et  $(A(\theta))^n$  pour  $n \geq 1$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001061]

#### Exercice 3

---

Soient  $A$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(BX)$ . Montrer que  $A = B$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001063]

#### Exercice 4

---

Que peut-on dire d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui vérifie  $\operatorname{tr}(A^t A) = 0$  ?

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001064]

### 2 Inverse

#### Exercice 5

---

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[006872]

---

**Exercice 6**

---

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001052]

---

**Exercice 7**  $M$  antisymétrique  $\Rightarrow I + M$  est inversible

---

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  antisymétrique.

1. Montrer que  $I + M$  est inversible (si  $(I + M)X = 0$ , calculer  ${}^t(MX)(MX)$ ).
2. Soit  $A = (I - M)(I + M)^{-1}$ . Montrer que  ${}^tA = A^{-1}$ .

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[003380]

---

**Exercice 8**

---

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que  $A$  est inversible.

[Indication ▼](#)   [Correction ▼](#)   [Vidéo ■](#)

[001069]

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

---

Il faut connaître les formules de  $\cos(\theta + \theta')$  et  $\sin(\theta + \theta')$ .

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

---

Essayer avec  $X$  la matrice élémentaire  $E_{ij}$  (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne).

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

---

Appliquer la formule du produit pour calculer les coefficients diagonaux de  $A {}^tA$

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

---

Une fois que l'on a calculé  $A^2$  et  $A^3$  on peut en déduire  $A^{-1}$  sans calculs.

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

---

$M$  antisymétrique signifie  ${}^tM = -M$ .

1. Si  $Y$  est un vecteur alors  ${}^tYY = \|Y\|^2$  est un réel positif ou nul.
  2.  $I - M$  et  $(I + M)^{-1}$  commutent.
- 

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

---

Prendre un vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  tel que  $AX = 0$ , considérer le rang  $i_0$  tel  $|x_{i_0}| = \max \{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ .

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

Si  $C = A \times B$  alors on obtient le coefficient  $c_{ij}$  (situé à la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne de  $C$ ) en effectuant le produit scalaire du  $i$ -ème vecteur-ligne de  $A$  avec le  $j$ -ème vecteur colonne de  $B$ .

On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

### Correction de l'exercice 2 ▲

$$\begin{aligned} A(\theta) \times A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \theta' & -\sin \theta' \\ \sin \theta' & \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' & -\cos \theta \sin \theta' - \sin \theta \cos \theta' \\ \sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta' & -\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta + \theta') \end{aligned}$$

Bilan :  $A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta + \theta')$ .

Nous allons montrer par récurrence sur  $n \geq 1$  que  $(A(\theta))^n = A(n\theta)$ .

- C'est bien sûr vrai pour  $n = 1$ .
- Fixons  $n \geq 1$  et supposons que  $(A(\theta))^n = A(n\theta)$  alors

$$(A(\theta))^{n+1} = (A(\theta))^n \times A(\theta) = A(n\theta) \times A(\theta) = A(n\theta + \theta) = A((n+1)\theta)$$

- C'est donc vrai pour tout  $n \geq 1$ .

Remarques :

- On aurait aussi la formule  $A(\theta') \times A(\theta) = A(\theta + \theta') = A(\theta) \times A(\theta')$ . Les matrices  $A(\theta)$  et  $A(\theta')$  commutent.
- En fait il n'est pas plus difficile de montrer que  $(A(\theta))^{-1} = A(-\theta)$ . On sait aussi que par définition  $(A(\theta))^0 = I$ . Et on en déduit que pour  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $(A(\theta))^n = A(n\theta)$ .
- En terme géométrique  $A(\theta)$  est la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose une rotation d'angle  $\theta$  avec une rotation d'angle  $\theta'$  alors on obtient une rotation d'angle  $\theta + \theta'$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Notons  $E_{ij}$  la matrice élémentaire (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne).

Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors

$$A \times E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

La seule colonne non nulle est la  $j$ -ème colonne.

La trace est la somme des éléments sur la diagonale. Ici le seul élément non nul de la diagonale est  $a_{ji}$ , on en déduit donc

$$\text{tr}(A \times E_{ij}) = a_{ji}$$

(attention à l'inversion des indices).

Maintenant prenons deux matrices  $A, B$  telles que  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(BX)$  pour toute matrice  $X$ . Alors pour  $X = E_{ij}$  on en déduit  $a_{ji} = b_{ji}$ . On fait ceci pour toutes les matrices élémentaires  $E_{ij}$  avec  $1 \leq i, j \leq n$  ce qui implique  $A = B$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Notons  $A = (a_{ij})$ , notons  $B = {}^tA$  si les coefficients sont  $B = (b_{ij})$  alors par définition de la transposée on a  $b_{ij} = a_{ji}$ .

Ensuite notons  $C = A \times B$  alors par définition du produit de matrices le coefficients  $c_{ij}$  de  $C$  s'obtient par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Appliquons ceci avec  $B = {}^tA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}.$$

Et pour un coefficient de la diagonale on a  $i = j$  donc

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2.$$

La trace étant la somme des coefficients sur la diagonale on a :

$$\text{tr}(A {}^tA) = \text{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_{ik}^2.$$

Si on change l'indice  $k$  en  $j$  on obtient

$$\text{tr}(A {}^tA) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2.$$

Donc cette trace vaut la somme des carrés de tous les coefficients.

Conséquence : si  $\text{tr}(A {}^tA) = 0$  alors la somme des carrés  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2$  est nulle donc chaque carré  $a_{ij}^2$  est nul. Ainsi  $a_{ij} = 0$  (pour tout  $i, j$ ) autrement dit  $A$  est la matrice nulle.

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. si le déterminant  $ad - bc$  est non nul l'inverse est  $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2.  $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. si  $|\alpha| \neq 1$  alors l'inverse est  $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$

4.  $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5.  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6.  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (0) & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

### Correction de l'exercice 6 ▲

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne  $A^3 - A = 4I$ . En factorisant par  $A$  on obtient  $A \times (A^2 - I) = 4I$ . Donc  $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$ , ainsi  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

### Correction de l'exercice 7 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur

(considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer  ${}^tXX$  :

$${}^tXX = (x_1, x_2, \dots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

On note  $\|X\|^2 = {}^tXX$  :  $\|X\|$  est la *norme* ou la *longueur* du vecteur  $X$ . De ce calcul on déduit d'une part que  ${}^tXX \geq 0$ . Et aussi que  ${}^tXX \geq 0$  si et seulement si  $X$  est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que  $I + M$  est inversible en montrant que si un vecteur  $X$  vérifie  $(I + M)X = 0$  alors  $X = 0$ .

Nous allons estimer  ${}^t(MX)(MX)$  de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme  ${}^tYY = \|Y\|^2$  et donc  ${}^t(MX)(MX) \geq 0$ .

D'autre part :

$$\begin{aligned} {}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\ &= {}^tX^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB^tA \\ &= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\ &= {}^tXMX \\ &= {}^tX(-X) \\ &= -{}^tXX \\ &= -\|X\|^2 \end{aligned}$$

Qui est donc négatif.

Seule possibilité  $\|X\|^2 = 0$  donc  $X = 0$  (= le vecteur nul) et donc  $I+M$  inversible.

2. (a) Calculons  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} = ((I-M) \times (I+M)^{-1})^{-1} = ((I+M)^{-1})^{-1} \times (I-M)^{-1} = (I+M) \times (I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ).

(b) Calculons  ${}^tA$ .

$$\begin{aligned} {}^tA &= {}^t((I-M) \times (I+M)^{-1}) \\ &= {}^t((I+M)^{-1}) \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB^tA \\ &= ({}^t(I+M))^{-1} \times {}^t(I-M) \quad \text{car } {}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} \\ &= (I+{}^tM)^{-1} \times (I-{}^tM) \quad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB \\ &= (I-M)^{-1} \times (I+M) \quad \text{car ici } {}^tM = -M \end{aligned}$$

(c) Montrons que  $I+M$  et  $(I-M)^{-1}$  commutent.

Tout d'abord  $I+M$  et  $I-M$  commutent car  $(I+M)(I-M) = I-M^2 = (I-M)(I+M)$ . Maintenant nous avons le petit résultat suivant :

**Lemme.** Si  $AB = BA$  alors  $AB^{-1} = B^{-1}A$ .

Pour la preuve on écrit :

$$AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à  $I+M$  et  $I-M$  on trouve  $(I+M) \times (I-M)^{-1} = (I-M)^{-1} \times (I+M)$  et donc  $A^{-1} = {}^tA$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  un vecteur tel que  $AX = 0$ . Nous allons montrer qu'alors  $X$  est le vecteur nul ce qui entraîne que  $A$  est inversible.

Par l'absurde supposons  $X \neq 0$ . Alors, si  $i_0$  est un indice tel que  $|x_{i_0}| = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ , on a  $|x_{i_0}| > 0$ . Mais alors comme  $AX = 0$  on a pour tout  $i = 1, \dots, n$  :

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j = 0$$

donc

$$|a_{i_0, i_0} x_{i_0}| = \left| - \sum_{j \neq i_0} a_{i_0, j} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}| \cdot |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$$

et, puisque  $|x_{i_0}| > 0$ , on obtient  $|a_{i_0, i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0, j}|$  contredisant les hypothèses de l'énoncé. Ainsi  $X = 0$ . On a donc prouvé « $AX = 0 \Rightarrow X = 0$ » ce qui équivaut à  $A$  inversible.

---