Calculs sur les matrices

Corrections d'Arnaud Bodin.

1 Opérations sur les matrices

Exercice 1

Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [001040]

Exercice 2

Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A(\theta) \times A(\theta')$ et $\big(A(\theta)\big)^n$ pour $n \geqslant 1$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001061]

Exercice 3

Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$. Montrer que $A = B$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001063]

Exercice 4

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = 0$?

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001064]

2 Inverse

Exercice 5

Calculer (s'il existe) l'inverse des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \bar{\alpha} & \bar{\alpha}^2 \\ \alpha & 1 & \bar{\alpha} \\ \alpha^2 & \alpha & 1 \end{pmatrix} (\alpha \in \mathbb{C}) \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction ▼ Vidéo ■ [006872]

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001052]

Exercice 7 M antisymétrique $\Rightarrow I+M$ est inversible

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1. Montrer que $I+M$ est inversible (si $(I+M)X = 0$, calculer ${}^t(MX)(MX)$).
2. Soit $A = (I-M)(I+M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [003380]

Exercice 8

$A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Indication ▼ Correction ▼ Vidéo ■ [001069]

Indication pour l'exercice 2 ▲

Il faut connaître les formules de $\cos(\theta+\theta')$ et $\sin(\theta+\theta')$.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Essayer avec X la matrice élémentaire E_{ij} (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne).

Indication pour l'exercice 4 ▲

Appliquer la formule du produit pour calculer les coefficients diagonaux de $A\,{}^tA$

Indication pour l'exercice 6 ▲

Une fois que l'on a calculé A^2 et A^3 on peut en déduire A^{-1} sans calculs.

Indication pour l'exercice 7 ▲

M antisymétrique signifie ${}^tM = -M$.

1. Si Y est un vecteur alors ${}^tYY = \|Y\|^2$ est un réel positif ou nul.
2. $I-M$ et $(I+M)^{-1}$ commutent.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Prendre un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $AX=0$, considérer le rang i_0 tel $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i=1,\ldots,n\right\}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Si $C = A \times B$ alors on obtient le coefficient c_{ij} (situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne de C) en effectuant le produit scalaire du i-ème vecteur-ligne de A avec le j-éme vecteur colonne de B.
On trouve

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & 2ac+b^2 \\ a+b+c & 2ac+b^2 & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

$$\begin{aligned} A(\theta) \times A(\theta') &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' & -\cos\theta\sin\theta' - \sin\theta\cos\theta' \\ \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' & -\sin\theta\sin\theta' + \cos\theta\cos\theta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} \\ &= A(\theta+\theta') \end{aligned}$$

Bilan : $A(\theta) \times A(\theta') = A(\theta+\theta')$.

Nous allons montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$.

- C'est bien sûr vrai pour $n = 1$.
- Fixons $n \geqslant 1$ et supposons que $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$ alors

$$\big(A(\theta)\big)^{n+1} = \big(A(\theta)\big)^n \times A(\theta) = A(n\theta) \times A(\theta) = A(n\theta+\theta) = A((n+1)\theta)$$

- C'est donc vrai pour tout $n \geqslant 1$.

Remarques :

- On aurait aussi la formule $A(\theta') \times A(\theta) = A(\theta+\theta') = A(\theta) \times A(\theta')$. Les matrices $A(\theta)$ et $A(\theta')$ commutent.
- En fait il n'est pas plus difficile de montrer que $\big(A(\theta)\big)^{-1} = A(-\theta)$. On sait aussi que par définition $\big(A(\theta)\big)^0 = I$. Et on en déduit que pour $n \in \mathbb{Z}$ on a $\big(A(\theta)\big)^n = A(n\theta)$.
- En terme géométrique $A(\theta)$ est la matrice de la rotation d'angle θ (centrée à l'origine). On vient de montrer que si l'on compose un rotation d'angle θ avec un rotation d'angle θ' alors on obtient une rotation d'angle $\theta+\theta'$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Notons E_{ij} la matrice élémentaire (des zéros partout sauf le coefficient 1 à la i-ème ligne et la j-ème colonne).
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$A \times E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1i} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ji} & 0 & \cdots \\ \vdots & & \cdots & & \vdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

La seule colonne non nulle est la j-ème colonne.
La trace est la somme des éléments sur la diagonale. Ici le seul élément non nul de la diagonale est a_{ji}, on en déduit donc

$$\mathrm{tr}(A \times E_{ij}) = a_{ji}$$

(attention à l'inversion des indices).
Maintenant prenons deux matrices A, B telles que $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(BX)$ pour toute matrice X. Alors pour $X = E_{ij}$ on en déduit $a_{ji} = b_{ji}$. On fait ceci pour toutes les matrices élémentaires E_{ij} avec $1 \leqslant i, j \leqslant n$ ce qui implique $A = B$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Notons $A = (a_{ij})$, notons $B = {}^tA$ si les coefficients sont $B = (b_{ij})$ alors par définition de la transposée on a $b_{ij} = a_{ji}$.
Ensuite notons $C = A \times B$ alors par définition du produit de matrices le coefficients c_{ij} de C s'obtient par la formule :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Appliquons ceci avec $B = {}^tA$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}.$$

Et pour un coefficient de la diagonale on a $i = j$ donc

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2.$$

La trace étant la somme des coefficients sur la diagonale on a :

$$\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = \mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant n} a_{ik}^2.$$

Si on change l'indice k en j on obtient

$$\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2.$$

Donc cette trace vaut la somme des carrés de tous les coefficients.
Conséquence : si $\mathrm{tr}(A\,{}^tA) = 0$ alors la somme des carrés $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2$ est nulle donc chaque carré a_{ij}^2 est nul. Ainsi $a_{ij} = 0$ (pour tout i, j) autrement dit A est la matrice nulle.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. si le déterminant $ad - bc$ est non nul l'inverse est $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
2. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
3. si $|\alpha| \neq 1$ alors l'inverse est $\frac{1}{1-\alpha\bar{\alpha}}\begin{pmatrix} 1 & -\bar{\alpha} & 0 \\ -\alpha & 1+\alpha\bar{\alpha} & -\bar{\alpha} \\ 0 & -\alpha & 1 \end{pmatrix}$
4. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 1 & -2 & 1 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & (0) & & 1 & -2 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

Correction de l'exercice 6 ▲

On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. En factorisant par A on obtient $A \times (A^2 - I) = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Avant de commencer la résolution nous allons faire une remarque importante : pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur (considéré comme une matrice à une seule colonne) alors nous allons calculer ${}^tXX$:

$${}^tXX = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

On note $\|X\|^2 = {}^tXX$: $\|X\|$ est la *norme* ou la *longueur* du vecteur X. De ce calcul on déduit d'une part que ${}^tXX \geqslant 0$. Et aussi que ${}^tXX \geqslant 0$ si et seulement si X est le vecteur nul.

1. Nous allons montrer que $I + M$ est inversible en montrant que si un vecteur X vérifie $(I + M)X = 0$ alors $X = 0$.
   Nous allons estimer ${}^t(MX)(MX)$ de deux façons. D'une part c'est un produit de la forme ${}^tYY = \|Y\|^2$ et donc ${}^t(MX)(MX) \geqslant 0$.

D'autre part :

$$\begin{aligned}
{}^t(MX)(MX) &= {}^t(MX)(-X) \quad \text{car } (I+M)X = 0 \text{ donc } MX = -X \\
&= {}^tX{}^tM(-X) \quad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= {}^tX(-M)(-X) \quad \text{car } {}^tM = -M \\
&= {}^tXMX \\
&= {}^tX(-X) \\
&= -{}^tXX \\
&= -\|X\|^2
\end{aligned}$$

Qui est donc négatif.
Seule possibilité $\|X\|^2 = 0$ donc $X = 0$ (= le vecteur nul) et donc $I+M$ inversible.

2. (a) Calculons A^{-1}.

$$A^{-1} = \left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right)^{-1} = \left((I+M)^{-1}\right)^{-1}\times(I-M)^{-1} = (I+M)\times(I-M)^{-1}$$

(n'oubliez pas que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$).

(b) Calculons ${}^tA$.

$$\begin{aligned}
{}^tA &= {}^t\left((I-M)\times(I+M)^{-1}\right) \\
&= {}^t\left((I+M)^{-1}\right)\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(AB) = {}^tB{}^tA \\
&= \left({}^t(I+M)\right)^{-1}\times{}^t(I-M) \qquad \text{car } {}^t(A^{-1}) = \left({}^tA\right)^{-1} \\
&= \left(I+{}^tM)\right)^{-1}\times(I-{}^tM) \qquad \text{car } {}^t(A+B) = {}^tA+{}^tB \\
&= (I-M)^{-1}\times(I+M) \qquad \text{car ici } {}^tM = -M
\end{aligned}$$

(c) Montrons que $I+M$ et $(I-M)^{-1}$ commutent.
Tout d'abord $I+M$ et $I-M$ commutent car $(I+M)(I-M) = I-M^2 = (I-M)(I+M)$. Maintenant nous avons le petit résultat suivant :
Lemme. Si $AB = BA$ alors $AB^{-1} = B^{-1}A$.
Pour la preuve on écrit :

$$AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1} \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}.$$

En appliquant ceci à $I+M$ et $I-M$ on trouve $(I+M)\times(I-M)^{-1} = (I-M)^{-1}\times(I+M)$ et donc $A^{-1} = {}^tA$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur tel que $AX = 0$. Nous allons montrer qu'alors X est le vecteur nul ce qui entraîne que A est inversible.
Par l'absurde supposons $X \neq 0$. Alors, si i_0 est un indice tel que $|x_{i_0}| = \max\left\{|x_i| \mid i = 1,\dots,n\right\}$, on a $|x_{i_0}| > 0$.
Mais alors comme $AX = 0$ on a pour tout $i = 1,\dots,n$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0$$

donc

$$|a_{i_0,i_0}x_{i_0}| = \left|-\sum_{j\neq i_0} a_{i_0,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|.|x_j| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$$

et, puisque $|x_{i_0}| > 0$, on obtient $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |a_{i_0,j}|$ contredisant les hypothèses de l'énoncé. Ainsi $X = 0$. On a donc prouvé «$AX = 0 \Rightarrow X = 0$» ce qui équivaut à A inversible.