Exercices : Martine Quinio

Tendance de la loi binomiale vers la loi normale

Exercice 1

On effectue un contrôle de fabrication sur des pièces dont une proportion $p = 0.02$ est défectueuse.

1. On contrôle un lot de 1000 pièces :

   Soit X la variable aléatoire: «nombre de pièces défectueuses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quel est son espérance, son écart-type ?

2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 18 et 22 ($P[18 \leqslant X \leqslant 22]$) ; on fera les calculs avec et sans correction de continuité. On fera également les calculs avec la vraie loi pour comparer.

Correction ▼ [006020]

Exercice 2

On effectue un contrôle sur des pièces de un euro dont une proportion $p = 0,05$ est fausse et sur des pièces de 2 euros dont une proportion $p' = 0,02$ est fausse. Il y a dans un lot 500 pièces dont 150 pièces de un euro et 350 pièces de 2 euros.

1. On prend une pièce au hasard dans ce lot: quelle est la probabilité qu'elle soit fausse?

2. Sachant que cette pièce est fausse, quelle est la probabilité qu'elle soit de un euro?

3. On contrôle à présent un lot de 1000 pièces de un euro. Soit X la variable aléatoire: «nombre de pièces fausses parmi 1000». Quelle est la vraie loi de X ? (on ne donnera que la forme générale); quelle est son espérance, son écart-type?

4. En approchant cette loi par celle d'une loi normale adaptée, calculez la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52.

Correction ▼ [006021]

Exercice 3

On jette un dé 180 fois. On note X la variable aléatoire : «nombre de sorties du 4».

1. Quelle est la loi de X ?

2. Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32.

Correction ▼ [006022]

Exercice 4

Aux dernières élections présidentielles en France, le candidat A a obtenu 20% des voix. On prend au hasard dans des bureaux de vote de grandes villes des lots de 200 bulletins: on note X la variable aléatoire «nombre de voix pour A dans les différents bureaux».

1. Quelle est la loi de probabilité de X?

2. Comment peut-on l'approcher?

3. Quelle est alors la probabilité pour que : X soit supérieur à 45? X compris entre 30 et 50?

4. Pour un autre candidat B moins heureux le pourcentage des voix est de 2%. En notant Y le nombre de voix pour B dans les différents bureaux, sur 100 bulletins, reprendre les questions 1 et 2. Quelle est alors la probabilité pour que : Y soit supérieur à 5? Y compris entre 1 et 4 ?

Correction ▼ [006023]

Exercice 5

On suppose qu'il y a une probabilité égale à p d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait n voyages par an sur cette ligne.

1. On suppose que $p = 0.10$, $n = 700$.
   (a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
   (b) Monsieur A voyage en fait toujours sans ticket. Afin de prendre en compte la possibilité de faire plusieurs passages avec le même ticket, on suppose que le prix d'un ticket est de 1,12 euros. Quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?
2. On suppose que $p = 0.50$, $n = 300$. Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que le fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ?

Correction ▼ [006024]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. La loi de X est la loi binomiale $B(1000;0.02)$, d'espérance 20, d'écart-type $\sqrt{19.6}$.
2. En approchant cette loi par celle d'une loi normale de paramètre $m=20$, écart-type $\sqrt{19.6}$. $P[18 \leqslant X \leqslant 22] = P[(17.5-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22.5-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.428$.

   Sans correction de continuité on trouve $P[(17-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (X-20)/\sqrt{19.6} \leqslant (22-20)/\sqrt{19.6}] \simeq 0.348$.

   Approchée par la loi de Poisson de paramètres : espérance 20 et variance 20, on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.423$.

   Enfin par la vraie loi binomiale: on trouve $P[18 \leqslant X \leqslant 22] \simeq 0.427$.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit F l'événement «la pièce est fausse»; soit U l'événement «la pièce est un euro»; soit D l'événement «la pièce est deux euros». Alors $P(F) = P(F/U)P(U) + P(F/D)P(D) = 2.9\%$.
2. On cherche $P(U/F) = (P(F/U)P(U))/P(F) = 51.7\%$.
3. X la variable aléatoire «nombre de pièces fausses parmi 1000» obéit à une loi binomiale$B(1000;5\%)$. Espérance: 50; écart-type: $\sigma = \sqrt{47.5}$. En approchant cette loi par une loi normale $N(50;\sigma)$, la probabilité pour que X soit compris entre 48 et 52 est : $P[(47.5-50)/\sigma \leqslant (X-50)/\sigma \leqslant (52.5-50)/\sigma] \simeq 28.3\%$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. La loi de X est une loi binomiale $B(180;\frac{1}{6})$ Espérance: 30; écart-type: $\sigma = \sqrt{25} = 5$.
2. En approchant cette loi par une loi normale $N(30;\,\sigma)$ la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 : $P[(28.5-30)/\sigma \leqslant (X-30)/\sigma \leqslant (32.5-30)/\sigma] \simeq 30.94\%$. Avec la vraie loi, on trouve la probabilité pour que X soit compris entre 29 et 32 est 30.86%.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Lorsque l'on tire un bulletin au hasard, la probabilité que ce soit un bulletin pour A est de 0.2.
2. Il y a suffisamment de bulletins de vote en tout pour que l'on puisse assimiler ces tirages à des tirages avec remise; alors la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n=200$ et $p=0.2$; or $np=40$; on peut faire l'approximation normale. L'espérance de X est donc $m=40$ et l'écart-type: $\sqrt{40\times 0.8} = 4\sqrt{2}$.
3. $P[X \geqslant 45] = 1 - P[X \leqslant 44] \simeq 1 - F(\frac{44.5-40}{4\sqrt{2}}) \simeq 21\%$, c'est la probabilité pour que le nombre de voix pour A soit supérieur à 45 dans un lot de 200 bulletins. De même, $P[30 \leqslant X \leqslant 50] \simeq F(\frac{50.5-m}{\sigma}) - F(\frac{29.5-m}{\sigma}) \simeq 93.6\%$.
4. Reprenons le calcul pour le candidat B qui n'a obtenu que 2% des voix. Alors pour $n=100$ et $p=0.02$ l'approximation par une loi de Poisson d'espérance $\lambda = 2$ est légitime. On peut dire que $P[Y \geqslant 5] = 1 - P[Y \leqslant 4] = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!}$, de l'ordre de 5%.

   Enfin $P[1 \leqslant Y \leqslant 4] = \sum_{k=1}^{4} \frac{e^{-2}2^k}{k!} \simeq 0.812$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. (a) Pour calculer la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année, posons le nombre de contrôles comme une variable aléatoire. Elle obéit à une loi binomiale $B(700;0.1)$. On peut l'approcher par la loi normale $N(70;\sqrt{63})$.
   $P[60 \leqslant X \leqslant 80] = P[-10/\sqrt{63} \leqslant X \leqslant 10/\sqrt{63}] \simeq 2F(10.5/\sqrt{63}) - 1 = 0.814$. La probabilité d'être contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année est 81.4.

   (b) Calculons le prix que devrait payer le voyageur: $1,12 \times 700 = 784$ euros. Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est aX, si a est l'amende fixée par la compagnie.

   On cherche donc a pour que : $P[aX \geqslant 784] \geqslant 0.75$: Soit $P[aX \leqslant 784] \leqslant 0.25$: Par lecture de table: $a = 784/64.642 = 12.128$ Il faut que l'amende dépasse 13 euros.

2. Calculons le prix que devrait payer le voyageur: $1,12 \times 300 = 336$ euros Il est perdant si l'amende dépasse ce prix. Or l'amende est bX, si b est l'amende fixée par la compagnie. X obéit à une loi binomiale $B(300;0.5)$. On cherche donc b pour que : $P[bX \geqslant 336] \geqslant 0.75$. Par un raisonnement analogue, on obtient cette fois le résultat: il suffit que l'amende dépasse 2 euros 30 !