Exercices : Martine Quinio

# Variables aléatoires discrètes

## Exercice 1

Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :

   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».

   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».

2. Soit $X$ la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres» : Quelle est la loi de probabilité de $X$, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Correction ▼ [006005]

## Exercice 2

On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
$A$ : au moins une ampoule est défectueuse ;
$B$ : les 3 ampoules sont défectueuses ;
$C$ : exactement une ampoule est défectueuse.

Correction ▼ [006006]

## Exercice 3

Un avion peut accueillir 20 personnes ; des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit $X$ la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de $X$ ? (on ne donnera que la forme générale) quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que $X$ soit égal à 15 ?

Correction ▼ [006007]

## Exercice 4

L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets ; les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100.

1. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :
   (a) les trois sujets tirés ;
   (b) exactement deux sujets sur les trois sujets ;
   (c) aucun des trois sujets.
2. Définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006008]

## Exercice 5

Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Correction ▼ [006009]

### Exercice 6

Dans une poste d'un petit village, on remarque qu'entre 10 heures et 11 heures, la probabilité pour que deux personnes entrent durant la même minute est considérée comme nulle et que l'arrivée des personnes est indépendante de la minute considérée. On a observé que la probabilité pour qu'une personne se présente entre la minute $n$ et la minute $n+1$ est : $p = 0.1$. On veut calculer la probabilité pour que : 3,4,5,6,7,8... personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h.

1. Définir une variable aléatoire adaptée, puis répondre au problème considéré.
2. Quelle est la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h ?

Correction ▼ [006010]

### Exercice 7

Si dans une population une personne sur cent est un centenaire, quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Correction ▼ [006011]

### Exercice 8

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans ; parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75% ; cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit $X$ la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard». Quelle est la loi de probabilité de $X$, (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P[X = 5]$.

Correction ▼ [006012]

### Exercice 9

Une population comporte en moyenne une personne mesurant plus de 1m90 sur 80 personnes. Sur 100 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m (utiliser une loi de Poisson). Sur 300 personnes, calculer la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m.

Correction ▼ [006013]

**Correction de l'exercice 1 ▲**

1. On utilise une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 4 lettres» $n = 5$, $p = \frac{3}{5}$. On obtient $P(A) = 1-(\frac{2}{5})^4 = 0.9744$, $P(B) = \binom{4}{2}(\frac{2}{5})^2(\frac{3}{5})^2 = 0.3456$.
2. La loi de probabilité de $X$ est une loi binomiale, loi de la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». $n = 10$, $p = \frac{3}{5}$, son espérance est $np = 6$, sa variance est $np(1-p) = \frac{12}{5}$.

---

**Correction de l'exercice 2 ▲**

On utilise une loi hypergéométrique

$P(A) = 1 - \frac{\binom{10}{3}}{\binom{15}{3}} = 0.73626$

$P(B) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = 2.1978\times 10^{-2}$

$P(C) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = 0.49451$

---

**Correction de l'exercice 3 ▲**

Soit $X$ la variable aléatoire nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20. La loi de $X$ est une loi binomiale de paramètres $n = 20$, $p = 0.75$. Son espérance est $np = 15$, son écart-type est $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{15\cdot 0.25}$. La probabilité pour que $X$ soit égal à 15 est $\binom{20}{15}0.75^{15}0.25^5 = 0.20233$.

---

**Correction de l'exercice 4 ▲**

La variable aléatoire associée à ce problème est $X$ «nombre de sujets révisés parmi les 3» ; son support est l'ensemble $\{0,1,2,3\}$. La loi de $X$ est une loi hypergéométrique puisque l'événement $[X = k]$, pour $k$ compris entre 0 et 3, se produit si le candidat tire $k$ sujet(s) parmi les 60 révisés, et $3-k$ sujets parmi les 40 non révisés. Alors :

1. Les trois sujets tirés ont été révisés : $P[X=3] = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}}$.
2. Deux des trois sujets tirés ont été révisés : $P[X=2] = \frac{\binom{60}{2}\cdot\binom{40}{1}}{\binom{100}{3}}$.
3. Aucun des trois sujets : $P[X=0] = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}}$.

La loi de probabilité de $X$ est donnée sur le support $\{0,1,2,3\}$ par :

$$P[X=k] = \frac{\binom{60}{k}\cdot\binom{40}{3-k}}{\binom{100}{3}}$$

Résultats numériques :

$k = 0 : P[X=0] \simeq 6.110\times 10^{-2}$

$k = 1 : P[X=1] \simeq 0.289$

$k = 2 : P[X=2] \simeq 0.438$

$k = 3 : P[X=3] \simeq 0.212$

L'espérance est $E(X) = 1.8$ (selon la formule $E(X) = np$).

---

**Correction de l'exercice 5 ▲**

Puisque les réponses sont données au hasard, chaque grille-réponses est en fait la répétition indépendante de 20 épreuves aléatoires (il y a $4^{20}$ grilles-réponses). Pour chaque question la probabilité de succès est de $\frac{1}{4}$ et l'examinateur fait le compte des succès : la variable aléatoire $X$, nombre de bonnes réponses, obéit à une loi binomiale donc on a directement les résultats. Pour toute valeur de $k$ comprise entre 0 et 20 : $P[X=k] = C_{20}^k(\frac{1}{4})^k(1-\frac{1}{4})^{20-k}$, ce qui donne la loi de cette variable aléatoire.

Quelle est l'espérance d'un candidat fumiste ? C'est $E(X) = np = 5$

## Correction de l'exercice 6 ▲

Une variable aléatoire adaptée à ce problème est le nombre $X$ de personnes se présentant au guichet entre 10h et 11h. Compte tenu des hypothèses, on partage l'heure en 60 minutes. Alors $X$ suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0.1$. On est dans le cas de processus poissonnien : on peut approcher la loi de $X$ par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 60 \times 0.1 = 6$. L'espérance de $X$ est donc $E(X) = 6$ ;

On peut alors calculer les probabilités demandées : $P[X = k] = \frac{6^k e^{-6}}{k!}$. Valeurs lues dans une table ou calculées : $P[X = 3] \simeq 0.9\%$; $P[X = 4] \simeq 13.4\%$; $P[X = 5] = P[X = 6] \simeq 16.1\%$; $P[X = 7] \simeq 13.8\%$; $P[X = 8] \simeq 10.3\%$.

Remarque : de façon générale si le paramètre $\lambda$ d'une loi de Poisson est un entier $K$, on a : $P[X = K-1] = \frac{K^{K-1}e^{-K}}{(K-1)!} = \frac{K^K e^{-K}}{K!} = P[X = K]$.

Calculons maintenant la probabilité pour que au moins 10 personnes se présentent au guichet entre 10h et 11h : C'est $P[X \geqslant 10] = 1 - \sum_{k=0}^{9} \frac{6^k e^{-6}}{k!} \simeq 8.392 \times 10^{-2}$.

## Correction de l'exercice 7 ▲

La probabilité $p = \frac{1}{100}$ étant faible, on peut appliquer la loi de Poisson d'espérance $100p = 1$ au nombre $X$ de centenaires pris parmi cent personnes. On cherche donc : $P[X \geqslant 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - e^{-1} \simeq 63\%$.

Sur un groupe de 200 personnes : l'espérance est 2 donc : $P[X' \geqslant 1] = 1 - e^{-2} \simeq 86\%$. La probabilité des événements : $[X' = 1]$ et $[X' = 2]$ sont les mêmes et valent : 0.14. Ainsi, sur 200 personnes, la probabilité de trouver exactement un centenaire vaut 0.14, égale à la probabilité de trouver exactement deux centenaires. Cette valeur correspond au maximum de probabilité pour une loi de Poisson d'espérance 2 et se généralise. Si $X$ obeit à une loi de Poisson d'espérance $K$, alors le maximum de probabilité est obtenu pour les événements $[X = K-1]$ et $[X = K]$.

## Correction de l'exercice 8 ▲

1. 30% est la probabilité de l'événement Panne, noté $Pa$ ; la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans, d'être hors d'usage est $P(HU) = P(HU/Pa)P(Pa) + P(HU/nonPa)P(nonPa) = 0.3 \cdot 0.75 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.505$.
2. La probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant est $P(\text{non}\,Pa/HU) = P(HU/\text{non}\,Pa)P(\text{non}\,Pa)/P(HU) = 0.4 \cdot 0.7/0.505 = 0.55446$.
3. La loi de probabilité de $X$ est une loi binomiale, $n = 10$, $p = 0.4$, espérance 4.
4. $P[X = 5] = \binom{10}{5}(0.3)^5(0.7)^5 = 0.10292$

## Correction de l'exercice 9 ▲

Le nombre $X$ de personnes mesurant plus de 1.90m parmi 100 obéit à une loi de Poisson de paramètre $\frac{100}{80}$.

La probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[X = 0] = 1 - e^{-\frac{100}{80}} = 1 - e^{-\frac{5}{4}} = 0.71350$.

Sur 300 personnes : la probabilité qu'il y ait au moins une personne mesurant plus de 1.90m est donc $1 - P[Y = 0] = 1 - e^{-\frac{300}{80}} = 0.97648$.