



## Probabilité et dénombrement ; indépendance

---

### Exercice 1

Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées ; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo ; avec exactement 2 ex-aequo ?

[Correction ▼](#)

[005983]

### Exercice 2

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes ; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller ? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir ; une seule pièce est noire sur les trois.

[Correction ▼](#)

[005984]

### Exercice 3

Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

[Correction ▼](#)

[005985]

### Exercice 4

Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement ?

[Correction ▼](#)

[005986]

### Exercice 5

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau ; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché ?

[Correction ▼](#)

[005987]

### Exercice 6

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot ?

[Correction ▼](#)

[005988]

### Exercice 7

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie  $A$  est  $p$  donné ; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie  $B$  avec une probabilité  $q$  donnée aussi ; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies ? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies ?

[Correction ▼](#)

[005989]

### Exercice 8

---

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants ? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

[Correction ▼](#)

[005990]

---

### Exercice 9

La famille Potter comporte 2 enfants ; les événements  $A$  : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et  $B$  : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants ? Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

[Correction ▼](#)

[005991]

---

### Correction de l'exercice 1 ▲

Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a  $20!$ .

Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo :  $\binom{20}{2} = 190$  choix ;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités ;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a  $18!$  choix.

Il y a au total :  $19 \binom{20}{2} (18!)$  choix possibles.

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

- Une tenue est un triplet  $(P, T, C)$  : il y a  $5 \times 6 \times 8 = 240$  tenues différentes ;

- «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de  $2 \times 4 \times 5 = 40$  façons.

La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc :  $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$ .

- «Une seule pièce est noire sur les trois» : notons les événements :  $N_1$  la première pièce (pantalon) est noire,  $N_2$  la deuxième pièce (tee-shirt) est noire,  $N_3$  la troisième pièce (chaussette) est noire : l'événement est représenté par :  $(N_1 \cap \bar{N}_2 \cap \bar{N}_3) \cup (\bar{N}_1 \cap N_2 \cap \bar{N}_3) \cup (\bar{N}_1 \cap \bar{N}_2 \cap N_3)$ . Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

---

### Correction de l'exercice 3 ▲

Il y a  $\binom{30}{2}$  façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc  $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$  bises.

---

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc  $4^{10}$  grilles-réponses possibles.
2. L'événement  $E$  «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons  $A_n$  l'événement : «répondre au hasard exactement  $n$  fois correctement». Alors,  $A_n$  est réalisé si  $n$  réponses sont correctes et  $10 - n$  sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a  $\binom{10}{n}$  choix de  $n$  objets parmi 10, et donc il y a :  $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$  façons de réaliser  $A_n$  et :

$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$

pour  $n = 6, 7, 8, 9, 10$ .  $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$ , soit environ 2%.

---

### Correction de l'exercice 5 ▲

Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité :  $(1 - 0.7) \cdot (1 - 0.5) \cdot (1 - 0.9) = 0.015$ . La probabilité que l'oiseau soit touché est donc :  $1 - 0.015 = 0.985$ .

---

### Correction de l'exercice 6 ▲

L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a  $\binom{300}{10}$ . Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :

$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

$P(A \cap B) = pq$  car les maladies sont indépendantes.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - pq$

---

### Correction de l'exercice 8 ▲

Soit  $A$  : l'événement «tirer un roi» et  $B$  : «tirer un pique».

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Donc  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$  et donc les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}.$$

---

### Correction de l'exercice 9 ▲

Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants :  $\Omega = \{(G, G), (G, F), (F, G), (F, F)\}$ , représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors  $P(A) = \frac{2}{4}$ ,  $P(B) = \frac{3}{4}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{2}{4}$ . On en conclut que :  $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$  et donc que les événements  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.

Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors  $\Omega' = \{(a, b, c) \mid a \in \{G, F\}, b \in \{G, F\}, c \in \{G, F\}\}$  représente les  $2^3 = 8$  cas possibles, équiprobables. Cette fois,  $P(A) = 1 - P(\{(G, G, G), (F, F, F)\}) = \frac{6}{8}$ ;  $P(B) = \frac{4}{8}$ ,  $P(A \cap B) = P\{(F, G, G), (G, F, G), \{(G, G, F)\}\} = \frac{3}{8}$ . On a  $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A \cap B)$ , et les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants

Avec  $n$  enfants, on peut généraliser sans difficulté :  $P(A) = 1 - \frac{2}{2^n}$ ,  $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ ,  $P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$ . Un petit calcul montre que  $P(A)P(B) = P(A \cap B)$  si et seulement si  $n = 3$ .

---