Exercices : Martine Quinio

Probabilité et dénombrement ; indépendance

Exercice 1

Une entreprise décide de classer 20 personnes susceptibles d'être embauchées; leurs CV étant très proches, le patron décide de recourir au hasard : combien y-a-il de classements possibles : sans ex-aequo; avec exactement 2 ex-aequo ?

Correction ▼ [005983]

Exercice 2

Un étudiant s'habille très vite le matin et prend, au hasard dans la pile d'habits, un pantalon, un tee-shirt, une paire de chaussettes; il y a ce jour-là dans l'armoire 5 pantalons dont 2 noirs, 6 tee-shirt dont 4 noirs, 8 paires de chaussettes, dont 5 paires noires. Combien y-a-t-il de façons de s'habiller? Quelles sont les probabilités des événements suivants : il est tout en noir; une seule pièce est noire sur les trois.

Correction ▼ [005984]

Exercice 3

Si 30 personnes sont présentes à un réveillon et si, à minuit, chaque personne fait 2 bises à toutes les autres, combien de bises se sont-elles échangées en tout ? (On appelle bise un contact entre deux joues...)

Correction ▼ [005985]

Exercice 4

Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, une seule est exacte. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles? Quelle est la probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement?

Correction ▼ [005986]

Exercice 5

Amédée, Barnabé, Charles tirent sur un oiseau; si les probabilités de succès sont pour Amédée : 70%, Barnabé : 50%, Charles : 90%, quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché?

Correction ▼ [005987]

Exercice 6

Lors d'une loterie de Noël, 300 billets sont vendus aux enfants de l'école ; 4 billets sont gagnants. J'achète 10 billets, quelle est la probabilité pour que je gagne au moins un lot?

Correction ▼ [005988]

Exercice 7

La probabilité pour une population d'être atteinte d'une maladie A est p donné; dans cette même population, un individu peut être atteint par une maladie B avec une probabilité q donnée aussi; on suppose que les maladies sont indépendantes : quelle est la probabilité d'être atteint par l'une et l'autre de ces maladies? Quelle est la probabilité d'être atteint par l'une ou l'autre de ces maladies?

Correction ▼ [005989]

Exercice 8

Dans un jeu de 52 cartes, on prend une carte au hasard : les événements «tirer un roi» et «tirer un pique» sont-ils indépendants? quelle est la probabilité de «tirer un roi ou un pique» ?

Correction ▼ [005990]

Exercice 9

La famille Potter comporte 2 enfants; les événements A : «il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter» et B : «la famille Potter a au plus une fille» sont-ils indépendants? Même question si la famille Potter comporte 3 enfants. Généraliser.

Correction ▼ [005991]

Correction de l'exercice 1 ▲

Classements possibles : sans ex-aequo, il y en a 20!.
Avec exactement 2 ex-aequo, il y en a :

1. Choix des deux ex-aequo : $\binom{20}{2} = 190$ choix;
2. Place des ex-aequo : il y a 19 possibilités;
3. Classements des 18 autres personnes, une fois les ex-aequo placés : il y a 18! choix.

Il y a au total : $19\binom{20}{2}(18!)$ choix possibles.

Correction de l'exercice 2 ▲

- Une tenue est un triplet (P,T,C) : il y a $5 \times 6 \times 8 = 240$ tenues différentes;
- «Il est tout en noir» : de combien de façons différentes ? Réponse : de $2 \times 4 \times 5 = 40$ façons.
La probabilité de l'événement «Il est tout en noir» est donc : $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$.
- «Une seule pièce est noire sur les trois » : notons les événements : N_1 la première pièce (pantalon) est noire, N_2 la deuxième pièce (tee-shirt) est noire, N_3 la troisième pièce (chaussette) est noire: l'événement est représenté par : $(N_1 \cap \overline{N_2} \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap N_2 \cap \overline{N_3}) \cup (\overline{N_1} \cap \overline{N_2} \cap N_3)$. Ces trois événements sont disjoints, leurs probabilités s'ajoutent. La probabilité de l'événement «une seule pièce est noire sur les trois» est donc : 0.325.

Correction de l'exercice 3 ▲

Il y a $\binom{30}{2}$ façons de choisir 2 personnes parmi 30 et donc $2 \cdot \binom{30}{2} = 870$ bises.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Une grille-réponses est une suite ordonnée de 10 réponses, il y a 4 choix possibles pour chacune. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.
2. L'événement E «répondre au hasard au moins 6 fois correctement» est réalisé si le candidat répond bien à 6 ou 7 ou 8 ou 9 ou 10 questions. Notons A_n l'événement : «répondre au hasard exactement n fois correctement». Alors, A_n est réalisé si n réponses sont correctes et $10-n$ sont incorrectes : 3 choix sont possibles pour chacune de ces dernières. Comme il y a $\binom{10}{n}$ choix de n objets parmi 10, et donc il y a : $\binom{10}{n} \times 3^{10-n}$ façons de réaliser A_n et :
$$P(A_n) = \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}}$$
pour $n = 6,7,8,9,10$. $P(E) = \sum_{n=6}^{10} \frac{\binom{10}{n} \cdot 3^{10-n}}{4^{10}} \simeq 1.9728 \times 10^{-2}$, soit environ 2%.

Correction de l'exercice 5 ▲

Considérons plutôt l'événement complémentaire : l'oiseau n'est pas touché s'il n'est touché ni par Amédée, ni par Barnabé, ni par Charles. Cet événement a pour probabilité : $(1-0.7) \cdot (1-0.5) \cdot (1-0.9) = 0.015$. La probabilité que l'oiseau soit touché est donc : $1-0.015 = 0.985$.

Correction de l'exercice 6 ▲

L'univers des possibles est ici l'ensemble des combinaisons de 10 billets parmi les 300 ; il y en a $\binom{300}{10}$. Je ne gagne rien si les 10 billets achetés se trouvent parmi les 296 billets perdants, ceci avec la probabilité :
$$\frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}}.$$

La probabilité cherchée est celle de l'événement complémentaire :

$$1 - \frac{\binom{296}{10}}{\binom{300}{10}} \simeq 0.127.$$

La probabilité est environ 12.7% de gagner au moins un lot.

Correction de l'exercice 7 ▲

$P(A\cap B) = pq$ car les maladies sont indépendantes. $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = p+q-pq$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit A : l'événement «tirer un roi» et B : «tirer un pique».
$P(A\cap B) = \frac{1}{52}; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}; P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
Donc $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ et donc les événements A et B sont indépendants.
$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{13}+\frac{1}{4}-\frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Notons, pour le cas où la famille Potter comporte 2 enfants, l'univers des possibles pour les enfants : $\Omega = \{(G,G),(G,F),(F,G),(F,F)\}$, représente les cas possibles, équiprobables, d'avoir garçon-garçon, garçon-fille etc... : Alors $P(A) = \frac{2}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}, P(A\cap B) = \frac{2}{4}$. On en conclut que : $P(A\cap B) \neq P(A)P(B)$ et donc que les événements A et B ne sont pas indépendants.
Si maintenant la famille Potter comporte 3 enfants : Alors $\Omega' = \{(a,b,c) \mid a \in \{G,F\}, b \in \{G,F\}, c \in \{G,F\}\}$ représente les $2^3 = 8$ cas possibles, équiprobables. Cette fois, $P(A) = 1-P(\{(G,G,G),(F,F,F)\}) = \frac{6}{8}$; $P(B) = \frac{4}{8}, P(A\cap B) = P\{(F,G,G),(G,F,G),\{(G,G,F)\} = \frac{3}{8}$. On a $P(A)P(B) = \frac{3}{8} = P(A\cap B)$, et les événements A et B sont indépendants
Avec n enfants, on peut généraliser sans difficulté : $P(A) = 1-\frac{2}{2^n}$, $P(B) = \frac{1+n}{2^n}$ $P(A\cap B) = \frac{n}{2^n}$ Un petit calcul montre que $P(A)P(B) = P(A\cap B)$ si et seulement si $n = 3$.
