Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Compléments d'intégration

1 Séparabilité des $L^p(\mathbb{R}^n)$

Exercice 1

Définition.
On dit qu'un espace métrique E est *séparable* s'il existe un sous-ensemble $\mathscr{F} \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Pour $j = 1, 2, 3, \dots$ et $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes
$$\Gamma_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^n,\ 2^{-j} m_i < x_i \leqslant 2^{-j}(m_i + 1),\ i = 1, \dots, n\}.$$
Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.
2. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathscr{F}_j$ de fonctions φ de la forme :
$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbf{1}_{\Gamma_{j,m}},$$
où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ et sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble
$$\mathscr{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{F}_j$$
est dénombrable.
3. Le but de cette question est de montrer que toute fonction continue à support compact peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Soit $\tilde{f}$ une fonction continue à support compact et soit $\varepsilon > 0$ fixé.
   — Montrer que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x, y \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon'.$$
   — Soit $\varepsilon' > 0$ fixé et j comme dans la question précédente. On considère la fonction $\tilde{f}_j$ définie par :
   $$\tilde{f}_j(x) = 2^{nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \tilde{f}(y)\, dy \quad \text{lorsque} \quad x \in \Gamma_{j,m},$$
   i.e. la valeur de $\tilde{f}_j$ en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est la valeur moyenne de la fonction $\tilde{f}$ sur le cube $\Gamma_{j,m}$ de coté 2^{-j} qui contient x. Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,
   $$x \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)| < \varepsilon',$$
   et en déduire que
   $$\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\|_p < \text{Volume}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'$$
   où γ est un cube de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, -2^J \leqslant x_i \leqslant 2^J\}$ en dehors duquel $\tilde{f}$ est nulle.

— En déduire qu'il existe $f_j \in \mathscr{F}_j$ telle que $\|\tilde{f} - f_j\|_p < \varepsilon$. (On rappelle que les éléments de $\mathscr{F}_j$ ne prennent que des valeurs rationnelles.)

4. Montrer que toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille $\mathscr{F}$. Conclure.

Correction ▼ [005969]

Exercice 2

Théorème. L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
   — Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
   — $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   — I n'est pas dénombrable.
   Montrer que E n'est pas séparable. (On pourra raisonner par l'absurde).
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Montrer que la famille
$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$
   où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$, satisfait (a), (b) et (c). Conclure.

Correction ▼ [005970]

2 Théorème de Radon-Nikodym, fonction Bêta

Exercice 3

Définition. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ). On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu << \mu$ si
$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$
pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème de Radon-Nikodym. Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ). Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :
$$\int_\Omega F(x)\,d\nu(x) = \int_\Omega F(x)h(x)\,d\mu(x). \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème de Radon-Nikodym.

1. Posons
$$\alpha = \mu + 2\nu, \qquad \omega = 2\mu + \nu.$$
   On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ donnée par :
$$\varphi(f) = \int_\Omega f(x)\,d\omega(x).$$
   Montrer que $\varphi\ : L^2(\Omega, \alpha) \to \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.
2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:
$$\int_\Omega f(2g-1)\,d\nu = \int_\Omega f(2-g)\,d\mu.$$

3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ où $l \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'on peut choisir la fonction g de telle manière que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in \Omega\ : g(x) = \frac{1}{2}\}$ est de μ-mesure 0.
4. Montrer que la fonction
$$h(x) = \frac{2 - g(x)}{2g(x) - 1}$$
est bien définie, positive, appartient à $L^1(\Omega, \mu)$ et satisfait (1).

Correction ▼ [005971]

Exercice 4

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrer que
$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1 - r^2\right)^{d/2} r^{m-1} dr$$
2. Démontrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.
3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} dx$ en fonction de la fonction Bêta.

Correction ▼ [005972]

3 Théorème de Newton, réarrangement à symétrie sphérique

Exercice 5 Coordonnées sphériques dans $\mathbb{R}^n$

Soit Ω' l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ défini par
$$\Omega' = \{(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r, 0 < \theta_1, \dots, \theta_{n-2} < \pi, 0 < \theta_{n-1} < 2\pi\}.$$
Soit l'application S de Ω' dans $\mathbb{R}^n$ définie par
$$\begin{aligned}
x_1 &= r\cos\theta_1, \\
x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2, \\
&\vdots \\
x_{n-2} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\cos\theta_{n-2} \\
x_{n-1} &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \\
x_n &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1},
\end{aligned}$$
où $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées cartésiennes de $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geqslant 0\ \}$. Montrer que Ω est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$ dont le complémentaire est de mesure nulle, et que S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.
2. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})\, r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\,\sin^{n-3}\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\,dr\,d\theta_1\dots d\theta_{n-1} \\
&= \int_{\Omega'} (f\circ S)(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})\, r^{n-1}\,dr\,d\sigma,
\end{aligned}$$
où $d\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
3. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume $\mathscr{V}_4$ de la boule unité de $\mathbb{R}^4$ et l'aire $\mathscr{A}_3$ de la sphère unité $\mathscr{S}^3$ de $\mathbb{R}^4$.

Correction ▼ [005973]

Exercice 6 Théorème de Newton

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$, où $|x|$ désigne la norme de x dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que pour $r = |x|$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\,dy = 4\pi\frac{1}{r}\int_0^r g(s)s^2\,ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s\,ds.$$

2. Que peut-on en déduire pour une distribution de masse $f(x) = g(|x|)$ lorsque g est à support dans $[0,R]$?

Correction ▼ [005974]

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1,2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. Calculer pour $d = 1$ le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.
2. Même question pour $d = 2$.
3. Calculer $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$ puis $d = 2$.

Correction ▼ [005975]

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Calculer le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f.

Correction ▼ [005976]

4 Théorème de Plancherel et transformée de Fourier d'une fonction radiale

Exercice 9

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Plancherel.

Définition. Soient $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note $\hat{f}$ la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e^{-2\pi i(y,x)}\,dx,$$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Plancherel. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

1. Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.
2. Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2\,e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x)f(y)e^{2\pi i(k,x-y)}e^{-\varepsilon\pi|k|^2}\,dxdydk.$$

4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}}\,\bar{f}(x)f(y)\,dxdy.$$

5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :

$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x)\,dx.$$

Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0 ?

6. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{\varepsilon\to 0} s_\varepsilon) f(y)\,dy.$$

7. Montrer que $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k)\,dk = \|\hat{f}\|_2^2$.
8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Correction ▼ [005977]

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $r = |x|$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f s'écrit :

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|} \int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r)\,dr.$$

Correction ▼ [005978]

5 Continuité des translations, convolution, transformée de Fourier de $|x|^{\alpha-n}$

Exercice 11

Définition. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leqslant p < +\infty$, alors $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème. Soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Montrer que si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \leqslant 1$, alors

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leqslant \mathbf{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$

où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. En déduire que pour f continue à support compact, on a

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

3. Démontrer le théorème pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$.
4. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Correction ▼ [005979]

Exercice 12

Théorème Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
(i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$
(ii) il existe une constante $K > 0$ telle que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx \leqslant K$
(iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_{\|x\|>\varepsilon} |\varphi_n(x)|\,dx = 0$.

Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.
Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), et en utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x)\,dx$, montrer que
$$|\varphi_n * f - f|^p(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x)\,dx\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y)\,dy\right).$$
2. En déduire que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n(y)|\,dy.$$
3. Soit $\delta > 0$, montrer que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y|\leqslant\delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)|\,dy\right).$$
4. En déduire le théorème cherché.

Correction ▼ [005980]

Exercice 13

Soit f une fonction dans $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \alpha < n$. Posons $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)$. En utilisant l'identité
$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\pi|k|^2\lambda} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\lambda,$$
montrer que
$$c_\alpha \left(|k|^{-\alpha} \hat{f}(k)\right)^\vee(x) = c_{n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y)dy,$$
où la notation $h^\vee$ désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction h donnée par $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.

Correction ▼ [005981]

Correction de l'exercice 1 ▲

Voir le lemme 2.17 p.61 dans *Analysis* de E. Lieb et M. Loss, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i\in I}$ telle que
   — Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E.
   — $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
   — I n'est pas dénombrable.
   Supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans E. Grâce à (a), pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. On a $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$ par (b). Ainsi l'application $i \mapsto n(i)$ est injective. Par suite I est dénombrable ce qui contredit (c).
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathscr{B}(a,1)}$ où $\mathscr{B}(a,1)$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de rayon 1 centrée en a. Soit la famille
$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$
   où a parcourt les points de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ n'est pas dénombrable, donc (c) est vérifié. L'ensemble O_a est la boule ouverte de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en f_a. En particulier (a) est vérifié. Remarquons que lorsque $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $f \in O_a \cap O_b$ avec $a \neq b$. Alors
$$\|f_a - f_b\|_\infty \leqslant \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$
   ce qui n'est pas possible. Donc (b) est vérifié. On en conclut que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Correction de l'exercice 3 ▲

cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies in mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ sont introduits pour montrer que les ensembles $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ et $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ sont de μ-mesure nulle (voir plus bas). En conséquence, la fonction $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ peut être choisie telle que $\frac{1}{2} \leqslant g \leqslant 2$. (On rappelle que $L^2(\Omega, \alpha)$ désigne l'ensemble des fonctions de carré-intégrables définies modulo les ensembles de mesure nulle.) Cela implique que la fonction h définie dans la question 3 est positive comme quotient de deux fonctions positives.
- Pour montrer que $\mu\left(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}\right) = 0$, on peut utiliser par exemple la continuité de la mesure : on a $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, ainsi
$$\mu\left(\left\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu\left(\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{1l}\right) = \lim_{l\to+\infty} \mu\left(S_{1l}\right) = 0.$$
  De même, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \cdots$ et $\cup_{l\in\mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, d'où $\mu\left(\{x \in \Omega, g > 2\}\right) = 0$.
- Pour montrer que l'on a l'égalité (1) du théorème pour toute fonction positive mesurable, on utilise le fait que les fonctions essentiellement bornées appartiennent à $L^2(\Omega, \alpha)$ (pour une mesure finie on a en effet $L^\infty(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, \alpha)$), donc l'égalité
$$\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu = \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.$$
  de la question 2 est en particulier vérifiée pour toute fonction mesurable positive bornée. Soit maintenant une fonction f mesurable positive (non nécessairement bornée). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_n = f\mathbf{1}_{\{f\leqslant n\}}$ donne :
$$\begin{aligned}
\int_\Omega f(2g-1)\, d\nu &= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2g-1)\, d\nu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2g-1)\, d\nu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(2-g)\, d\mu \\
&= \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n(2-g)\, d\mu \\
&= \int_\Omega f(2-g)\, d\mu.
\end{aligned}$$

On en déduit que l'égalité (1) du théorème est vérifiée pour toute fonction F de la forme $F = f(2g-1)$, où $f \in \mathscr{M}^+$. Puisque $(2g-1) > 0$, l'ensemble des fonctions F de cette forme est également $\mathscr{M}^+$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On définit la fonction Bêta par $B(a,b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1}ds$, montrons que

$$B\left(1+\frac{d}{2},\frac{m}{2}\right) = 2\int_0^1 \left(1-r^2\right)^{d/2} r^{m-1}dr$$

En utilisant le changement de variable $1-r^2 \to s$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1}dr &= -\tfrac{1}{2}\int_1^0 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m-2}{2}}ds \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 s^{d/2}(1-s)^{\frac{m}{2}-1}ds = \tfrac{1}{2}B\left(1+\tfrac{d}{2},\tfrac{m}{2}\right).\end{aligned}$$

2. Par le changement de variables $t \to t^2$ et $u \to u^2$ on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-t}t^{a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u}u^{b-1}\,du\right) \\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-t^2}t^{2a-1}\,dt\right)\left(\int_0^\infty e^{-u^2}u^{2b-1}\,du\right)\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'intégration en polaires on a

$$\begin{aligned}\Gamma(a)\Gamma(b) &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)}t^{2a-1}u^{2b-1}\,dt\,du \\ &= 4\left(\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2a-1}r^{2b-1}r\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi\right).\end{aligned}$$

Or, par le changement de variable $r^2 \to r$,

$$2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(a+b)-1}\,dr = \int_0^\infty e^{-r}r^{a+b-1}\,dr = \Gamma(a+b);$$

et par le changement de variable $u = \cos^2\varphi$,

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^{2a-1}(\sin\varphi)^{2b-1}\,d\varphi = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du = B(a,b).$$

Les trois dernières identités entraînent

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)\cdot B(a,b).$$

3. On a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}\,dx &= \int_0^{+\infty}\mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha} > t\right)\,dt = \int_0^1 \mathrm{Vol}\left(\mathscr{B}\left(0,\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)\,dt \\ &= \mathscr{V}_n\int_0^1\left(t^{-\frac{1}{\alpha}}-1\right)^{\frac{n}{2}}\,dt = \mathscr{V}_n\int_0^1\left(1-t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}}t^{-\frac{n}{2\alpha}}\,dt \\ &= \alpha\mathscr{V}_n\int_0^1(1-s)^{\frac{n}{2}}s^{\alpha-\frac{n}{2}-1}\,ds = \alpha\mathscr{V}_nB\left(\alpha-\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geqslant 0\}$. Comme $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$, l'image de Ω' par S est incluse dans Ω. Réciproquement, soit x un élément de Ω. Posons $r = |x|$, alors pour tout $i \in \{1,\dots,n-2\}$, on peut définir par récurrence $\theta_i \in (0,\pi)$ grâce à son cosinus :

$$\cos\theta_i = \frac{x_i}{r\sin\theta_1\dots\sin\theta_{i-1}}.$$

Quant à θ_{n-1}, il est déterminé par son sinus et son cosinus. Comme $x_n \neq 0$ ou $x_{n-1} < 0$, nécessairement $\theta_{n-1} \neq 0 (\text{modulo } 2\pi)$.

L'application S est continûment différentiable, car chacune de ses composantes l'est. La matrice jacobienne a ses vecteurs colonnes orthogonaux, et de norme respectivement $1, r, r\sin\theta_1, \ldots, r\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{n-2}$. Son déterminant vaut alors $r^{n-1}(\sin\theta_1)^{n-2} \ldots \sin\theta_{n-2}$. Comme ce déterminant ne s'annule jamais, S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω.

2. C'est la formule du changement de variable.
3. On a :

$$
\begin{aligned}
\mathscr{V}_4 &= \int_{r=0}^{1}\int_{\theta_1=0}^{\pi}\int_{\theta_2=0}^{\pi}\int_{\theta_3=0}^{2\pi} r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 \left(\int_0^{\pi} \sin^2\theta_1 d\theta_1\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\theta_2 d\theta_2\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\theta_1}{2} d\theta_1\right)\left[-\cos\theta_2\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi^2}{2}. \\
\mathscr{A}_3 &= \int_{\theta_1=0}^{\pi}\int_{\theta_2=0}^{\pi}\int_{\theta_3=0}^{2\pi} \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\
&= 2\pi^2.
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit g une fonction sur $\mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$.

1. Posons
$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(|y|)}{|x-y|} dy,$$
et $r = |x|$, $s = |y|$. Alors $|x-y| = \sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}$ où θ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'axe (Oy). On considére les coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Ox) suivantes :
$$
\begin{aligned}
y_1 &= s\cos\theta \\
y_2 &= s\sin\theta\cos\varphi \\
y_3 &= s\sin\theta\sin\varphi
\end{aligned}
$$
On a
$$I = \int_{s=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(s)}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}} s^2 \sin\theta \, ds d\theta d\varphi.$$
On note que
$$\frac{\sin\theta}{\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{rs}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}.$$
Ainsi :
$$
\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{rs}\sqrt{r^2+s^2-2rs\cos\theta}\right]_{\theta=0}^{\pi} g(s)s^2 ds \\
&= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{rs}\left(\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2}\right) g(s)s^2 ds.
\end{aligned}
$$
Lorsque $s \leqslant r$, on a
$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s)-(r-s) = 2s,$$
et lorsque $s > r$, il vient
$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s)-(s-r) = 2r.$$
On en déduit alors :
$$I = \frac{4\pi}{r}\int_0^r g(s)s^2 ds + 4\pi\int_r^{+\infty} g(s)s ds.$$
2. Lorsque g est à support dans $[0,R]$, le potentiel newtonien créé par la distribution de masse $f(y) = g(|y|)$ en un point $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $|x| > R$, est identique au potentiel créé par une masse totale égale concentrée à l'origine.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1,2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. La fonction h atteint son maximum en $r = 1$ et $h(1) = \frac{1}{4}$. Pour un réel positif $t \leqslant \frac{1}{4}$ donné, on cherche à résoudre $t = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}$. On obtient deux solutions

$$\begin{array}{rcl} r_+ & = & \left(\frac{1-2t}{2t} + \frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \\ r_- & = & \left(\frac{1-2t}{2t} - \frac{\sqrt{1-4t}}{2t}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Ainsi $\mu(f > t) = \mathscr{V}_d\left(r_+^d - r_-^d\right)$. De plus, par définition, f^* vérifie $\mu(f^* > t) = \mu(f > t)$ et $\mu(f^* > t) = \mathscr{V}_d r^d$ où r et t sont liés par $t = f^*(r)$. Pour $d = 1$, on a donc $r = r_+ - r_-$ et t est donné par :

$$\begin{array}{rcl} r^2 & = & r_+^2 + r_-^2 - 2r_+r_- = \frac{1-2t}{t} - 2\sqrt{\frac{(1-2t)^2}{4t^2} - \frac{1-4t}{4t^2}} \\ & = & \frac{1-4t}{t}. \end{array}$$

Il en découle que $t = f^*(r) = (4+r^2)^{-1}$.

2. Pour $d = 2$, on a

$$r^2 = r_+^2 - r_-^2 = \frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

ce qui implique que

$$t = f^*(r) = r^{-4}\left(\sqrt{4+r^4} - 2\right).$$

3. Calculons $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$. On a

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_2^2 & = & \|f^*\|_2^2 \\ & = & 2\int_0^{+\infty}(4+r^2)^{-2}\,dr \\ & = & \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(1+s^2)^{-2}\,ds \\ & = & \frac{1}{8}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = \frac{\pi}{16}, \end{array}$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 4 (question 3.) sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{-2}\,dx = 2\mathscr{V}_1 B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = 4\frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3)} = 4\frac{(1/2\Gamma(1/2))^2}{2!} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $d = 2$, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)^2\,dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi} h(r)^2\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{+\infty} r^5(1+r^2)^{-4}\,dr = \frac{\pi}{3},$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 4 sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx = 4\mathscr{V}_6 B\left(4-\frac{6}{2},\frac{6}{2}+1\right) = 4\mathscr{V}_6 B(1,4),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)^{-4}\,dx = \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\mathscr{S}^5}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr\,d\sigma = \mathscr{A}_5\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty}(1+r^2)^{-4}r^5\,dr \quad = \quad 4\frac{\mathscr{V}_6}{\mathscr{A}_5}B(1,4) = \frac{4}{6}\frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)}, = \frac{2}{3}\frac{3!}{4!} = \frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Par translation, le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f est donné par

$$f^*(x) = e^{\frac{a^2}{4}} e^{-x^2}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

cf E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.118, American Mathematical Society (2001). (Pour la question 6, on peut utiliser la continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Correction de l'exercice 10 ▲

A l'aide des coordonnées sphériques, on a

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i(x,k)}\,dx \\
&= \\
&= \int_{r=0}^{+\infty}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} h(r) e^{-2\pi i r|k|\cos\theta} r^2 \sin\theta\, d\theta dr d\varphi \\
&= \\
&= 2\pi \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} h(r) \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2\pi i r|k|} e^{-2\pi i r|k|\cos\theta}\right) r^2\, d\theta dr \\
&= \\
&= \frac{1}{|k|}\int_0^{\infty} h(r) r \frac{1}{i}\left[e^{+2\pi i r|k|} - e^{-2\pi i r|k|}\right] dr \\
&= \\
&= \frac{2}{|k|}\int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r)\, dr.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $1 \leqslant p < +\infty$.

1. Si f est continue à support compact dans la boule $\mathscr{B}(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \leqslant 1$, alors

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leqslant (|f(x-h)| + |f(x)|)^p \leqslant \left(2\|f\|_\infty \mathbf{1}_{\mathscr{B}(0,M+1)}\right)^p = \mathbf{1}_{B(0,M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$

   où $\mathscr{B}(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. Pour f continue, on a $\lim_{h\to 0} |f(x-h) - f(x)| = 0$. Puisque la fonction $g(x) = 2^p \|f\|_\infty^p \mathbf{1}_{B(0,M+1)}(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée permet d'intervertir limite et intégrale, et il vient :

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p^p = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h\to 0} |f(x-h) - f(x)|^p\, dx = 0.$$

3. Soit f une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\|\tau_h f - f\|_p &= \|\tau_h(f - f_\varepsilon) - (f - f_\varepsilon) + \tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\
&\leqslant \|\tau_h(f - f_\varepsilon)\|_p + \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\
&= 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\
&= \frac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p.
\end{aligned}$$

   Puisque f_ε est continue à support compact, d'après la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour $|h| < \delta$, on a $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$. En d'autre termes $\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

4. Pour $p=\infty$, les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui fait que la démonstration précédente ne peut pas s'appliquer dans ce cas. De plus, on vérifie que, pour $f=\mathbf{1}_{B(0,1)}$ et $h\neq 0$, on a
$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1.$$
Alors que pour $h=0$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 0$. On peut également vérifier que $\lim_{h\to 0}\|\tau_h f - f\|_\infty = 0$ si et seulement si la fonction f possède un représentant uniformément continu.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1\leqslant p<+\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), on a
$$\begin{aligned}|\varphi_n * f - f|^p(x) &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\varphi_n(y)\,dy - f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_n(y)\,dy\right|^p\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)||\varphi_n(y)|\,dy\right)^p.\end{aligned}$$
En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x)=|\varphi_n|(x)\,dx$, on a
$$\begin{aligned}|\varphi_n * f - f|^p(x) &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}1^q\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,d\nu(y)\right)^{\frac{p}{p}}\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi_n|(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right).\end{aligned}$$

2. On en déduit que
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{x\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{y\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p|\varphi_n|(y)\,dy\right)dx$$
D'après le théorème de Tonelli :
$$\begin{aligned}\|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{y\in\mathbb{R}^n}\left(\int_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x-y)-f(x)|^p\,dx\right)|\varphi_n|(y)\,dy\\ &\leqslant K^{\frac{p}{q}}\int_{\mathbb{R}^n}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy.\end{aligned}$$

3. Soit $\delta>0$, on a
$$\begin{aligned}&\|\varphi_n * f - f\|_p^p\\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\int_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p\int_{|y|\leqslant\delta}|\varphi_n(y)|\,dy + \int_{|y|>\delta}(\|\tau_y f\|_p+\|f\|_p)^p\,|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + (2\|f\|_p)^p\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right)\\ \leqslant\ & K^{\frac{p}{q}}\left(K\sup_{|y|\leqslant\delta}\|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p\|f\|_p^p\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy\right).\end{aligned}$$

4. Soit $\varepsilon>0$. Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf l'exercice précédent), il existe un $\delta>0$ tel que
$$|y|\leqslant\delta \quad\Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \frac{K^{-\left(\frac{p}{q}+1\right)}}{2}\,\varepsilon.$$
D'après l'hypothèse (iii), il existe un $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n>N$, on a
$$\int_{|y|>\delta}|\varphi_n(y)|\,dy < \frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1}\|f\|_p^p}\,\varepsilon.$$
Ainsi pour tout $n>N$,
$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p < \varepsilon,$$
i.e. $\lim_{n\to+\infty}\|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Voir E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.123, American Mathematical Society (2001).
