



Compléments d'intégration

1 Séparabilité des $L^p(\mathbb{R}^n)$

Exercice 1

Définition.

On dit qu'un espace métrique E est *séparable* s'il existe un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset E$ dénombrable et dense.

Théorème L'espace $L^p(\mathbb{R}^n)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Pour $j = 1, 2, 3, \dots$ et $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$, on considère les cubes

$$\Gamma_{j,m} := \{x \in \mathbb{R}^n, 2^{-j}m_i < x_i \leq 2^{-j}(m_i + 1), i = 1, \dots, n\}.$$

Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{m \in \mathbb{Z}^n} \Gamma_{j,m} = \mathbb{R}^n$.

2. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble \mathcal{F}_j de fonctions φ de la forme :

$$\varphi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_{j,m} \mathbf{1}_{\Gamma_{j,m}},$$

où les constantes $c_{j,m} \in \mathbb{Q}$ et sont nulles sauf un nombre fini. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{F}_j$$

est dénombrable.

3. Le but de cette question est de montrer que toute fonction continue à support compact peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille \mathcal{F} . Soit \tilde{f} une fonction continue à support compact et soit $\varepsilon > 0$ fixé.

- Montrer que pour tout $\varepsilon' > 0$, il existe $j \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,

$$x, y \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| < \varepsilon'.$$

- Soit $\varepsilon' > 0$ fixé et j comme dans la question précédente. On considère la fonction \tilde{f}_j définie par :

$$\tilde{f}_j(x) = 2^{nj} \int_{\Gamma_{j,m}} \tilde{f}(y) dy \quad \text{lorsque } x \in \Gamma_{j,m},$$

i.e. la valeur de \tilde{f}_j en un point $x \in \mathbb{R}^n$ est la valeur moyenne de la fonction \tilde{f} sur le cube $\Gamma_{j,m}$ de côté 2^{-j} qui contient x . Montrer que $\forall m \in \mathbb{Z}^n$,

$$x \in \Gamma_{j,m} \Rightarrow |\tilde{f}(x) - \tilde{f}_j(x)| < \varepsilon',$$

et en déduire que

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_j\|_p < \text{Volume}(\gamma)^{\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'$$

où γ est un cube de la forme $\{x \in \mathbb{R}^n, -2^j \leq x_i \leq 2^j\}$ en dehors duquel \tilde{f} est nulle.

- En déduire qu'il existe $f_j \in \mathcal{F}_j$ telle que $\|\tilde{f} - f_j\|_p < \varepsilon$. (On rappelle que les éléments de \mathcal{F}_j ne prennent que des valeurs rationnelles.)

4. Montrer que toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, peut être approchée à ε près en norme L^p par un élément de la famille \mathcal{F} . Conclure.

Correction ▼

[005969]

Exercice 2

Théorème. L'espace $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que

- Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E .
- $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- I n'est pas dénombrable.

Montrer que E n'est pas séparable. (On pourra raisonner par l'absurde).

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(a,1)}$ où $\mathcal{B}(a,1)$ est la boule de \mathbb{R}^n de rayon 1 centrée en a . Montrer que la famille

$$O_a = \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2} \right\},$$

où a parcourt les points de \mathbb{R}^n , satisfait (a), (b) et (c). Conclure.

Correction ▼

[005970]

2 Théorème de Radon-Nikodym, fonction Bêta

Exercice 3

Définition. Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesuré (Ω, Σ) . On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on écrit $\nu \ll \mu$ si

$$\mu(S) = 0 \Rightarrow \nu(S) = 0$$

pour tout $S \in \Sigma$.

Théorème de Radon-Nikodym. Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesuré (Ω, Σ) . Si ν est absolument continue par rapport à μ , alors il existe une fonction positive $h \in L^1(\Omega, \mu)$ telle que pour toute fonction positive mesurable F on a :

$$\int_{\Omega} F(x) d\nu(x) = \int_{\Omega} F(x)h(x) d\mu(x). \quad (1)$$

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème de Radon-Nikodym.

1. Posons

$$\alpha = \mu + 2\nu, \quad \omega = 2\mu + \nu.$$

On considère l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \alpha)$ des fonctions de carré intégrable par rapport à la mesure α et l'application linéaire $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par :

$$\varphi(f) = \int_{\Omega} f(x) d\omega(x).$$

Montrer que $\varphi : L^2(\Omega, \alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ est une application linéaire continue.

2. En déduire qu'il existe $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ tel que pour tout $f \in L^2(\Omega, \alpha)$:

$$\int_{\Omega} f(2g - 1) d\nu = \int_{\Omega} f(2 - g) d\mu.$$

3. Montrer que les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ où $l \in \mathbb{N}^*$ vérifient $\mu(S_{jl}) = \nu(S_{jl}) = 0$. En déduire que l'on peut choisir la fonction g de telle manière que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. Montrer que l'ensemble $Z = \{x \in \Omega : g(x) = \frac{1}{2}\}$ est de μ -mesure 0.

4. Montrer que la fonction

$$h(x) = \frac{2 - g(x)}{2g(x) - 1}$$

est bien définie, positive, appartient à $L^1(\Omega, \mu)$ et satisfait (1).

Correction ▼

[005971]

Exercice 4

1. On définit la fonction Bêta par $B(a, b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrer que

$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2 \int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr$$

2. Démontrer que $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

3. Calculer $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} dx$ en fonction de la fonction Bêta.

Correction ▼

[005972]

3 Théorème de Newton, réarrangement à symétrie sphérique

Exercice 5 Coordonnées sphériques dans \mathbb{R}^n

Soit Ω' l'ouvert de \mathbb{R}^n défini par

$$\Omega' = \{(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < r, 0 < \theta_1, \dots, \theta_{n-2} < \pi, 0 < \theta_{n-1} < 2\pi\}.$$

Soit l'application S de Ω' dans \mathbb{R}^n définie par

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \cos \theta_{n-2} \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}, \end{aligned}$$

où (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées cartésiennes de $x \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geq 0\}$. Montrer que Ω est une partie ouverte de \mathbb{R}^n dont le complémentaire est de mesure nulle, et que S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω .

2. Soit f une fonction borélienne positive sur \mathbb{R}^n . Montrer que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\Omega'} (f \circ S)(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \\ &= \int_{\Omega'} (f \circ S)(r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}) r^{n-1} dr d\sigma, \end{aligned}$$

où $d\sigma$ est la mesure uniforme sur la sphère unité de \mathbb{R}^n .

3. En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume \mathcal{V}_4 de la boule unité de \mathbb{R}^4 et l'aire \mathcal{A}_3 de la sphère unité \mathcal{S}^3 de \mathbb{R}^4 .

Correction ▼

[005973]

Exercice 6 Théorème de Newton

Soit g une fonction sur \mathbb{R}^+ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$, où $|x|$ désigne la norme de x dans \mathbb{R}^3 .

1. Montrer que pour $r = |x|$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|} dy = 4\pi \frac{1}{r} \int_0^r g(s)s^2 ds + 4\pi \int_r^{+\infty} g(s)s ds.$$

2. Que peut-on en déduire pour une distribution de masse $f(x) = g(|x|)$ lorsque g est à support dans $[0, R]$?

Correction ▼

[005974]

Exercice 7

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

- Calculer pour $d = 1$ le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f .
- Même question pour $d = 2$.
- Calculer $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$ puis $d = 2$.

Correction ▼

[005975]

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Calculer le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f .

Correction ▼

[005976]

4 Théorème de Plancherel et transformée de Fourier d'une fonction radiale

Exercice 9

Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Plancherel.

Définition. Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note \hat{f} la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y,x)} dx,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n .

Théorème de Plancherel. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

- Montrer que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.
- Montrer que la fonction $g_\varepsilon(k) = |\hat{f}(k)|^2 e^{-\varepsilon\pi|k|^2}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$.
- Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x)f(y)e^{2\pi i(k,x-y)} e^{-\varepsilon\pi|k|^2} dx dy dk.$$

4. Sachant que la transformée de Fourier de la gaussienne $h_\varepsilon(x) = e^{-\pi\varepsilon|x|^2}$ ($\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$) est donnée par $\hat{h}_\varepsilon(k) = \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|k|^2}{\varepsilon}}$, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) f(y) dx dy.$$

5. Soit $\{s_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ la famille de fonctions définies par :

$$s_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\pi|x-y|^2}{\varepsilon}} \bar{f}(x) dx.$$

Quelle est la limite dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ de s_ε lorsque ε tend vers 0?

6. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \int_{\mathbb{R}^n} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s_\varepsilon) f(y) dy.$$

7. Montrer que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon(k) dk = \|\hat{f}\|_2^2$.

8. En déduire que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Correction ▼

[005977]

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction radiale, i.e. telle que $f(x) = h(r)$ où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $r = |x|$ et $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que la transformée de Fourier \hat{f} de f s'écrit :

$$\hat{f}(k) = \frac{2}{|k|} \int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi|k|r) dr.$$

Correction ▼

[005978]

5 Continuité des translations, convolution, transformée de Fourier de $|x|^{\alpha-n}$

Exercice 11

Définition. Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h , noté τ_h , agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) := f(x-h)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$, i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème. Soit $1 \leq p < +\infty$.

1. Montrer que si f est continue à support compact dans la boule $\mathcal{B}(0, M)$ centrée en 0 et de rayon M , et si $|h| \leq 1$, alors

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leq \mathbf{1}_{\mathcal{B}(0, M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p.$$

où $\mathcal{B}(0, M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. En déduire que pour f continue à support compact, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

3. Démontrer le théorème pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.

4. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 12

Théorème Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} telles que :

- (i) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n = 1$
- (ii) il existe une constante $K > 0$ telle que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x) dx \leq K$
- (iii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\|x\| > \varepsilon} |\varphi_n(x)| dx = 0$.

Alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Le but de cet exercice est de démontrer ce théorème.

Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1 \leq p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), et en utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x) dx$, montrer que

$$|\varphi_n * f - f|^p(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y) dy \right).$$

2. En déduire que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n|(y) dy.$$

3. Soit $\delta > 0$, montrer que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \delta} |\varphi_n|(y) dy \right).$$

4. En déduire le théorème cherché.

Exercice 13

Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $0 < \alpha < n$. Posons $c_\alpha := \pi^{-\alpha/2} \Gamma(\alpha/2)$. En utilisant l'identité

$$c_\alpha |k|^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\pi|k|^2 \lambda} \lambda^{\frac{\alpha}{2}-1} d\lambda,$$

montrer que

$$c_\alpha (|k|^{-\alpha} \hat{f}(k))^\vee(x) = c_{n-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{\alpha-n} f(y) dy,$$

où la notation h^\vee désigne la transformée de Fourier inverse d'une fonction h donnée par $h^\vee(x) := \hat{h}(-x)$.

Correction de l'exercice 1 ▲

Voir le lemme 2.17 p.61 dans *Analysis* de E. Lieb et M. Loss, American Mathematical Society (2001).

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(O_i)_{i \in I}$ telle que

- Pour tout $i \in I$, O_i est un ouvert non vide de E .
- $O_i \cap O_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- I n'est pas dénombrable.

Supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans E . Grâce à (a), pour chaque $i \in I$, $O_i \cap \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$. On choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in O_i$. On a $n(i) = n(j) \Rightarrow u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \cap O_j$ donc $i = j$ par (b). Ainsi l'application $i \mapsto n(i)$ est injective. Par suite I est dénombrable ce qui contredit (c).

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, on pose $f_a = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(a,1)}$ où $\mathcal{B}(a,1)$ est la boule de \mathbb{R}^n de rayon 1 centrée en a . Soit la famille

$$O_a = \{f \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \|f - f_a\|_\infty < \frac{1}{2}\},$$

où a parcourt les points de \mathbb{R}^n . L'ensemble des points de \mathbb{R}^n n'est pas dénombrable, donc (c) est vérifié. L'ensemble O_a est la boule ouverte de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ de rayon $\frac{1}{2}$ centrée en f_a . En particulier (a) est vérifié. Remarquons que lorsque $a \neq b$, on a $\|f_a - f_b\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe $f \in O_a \cap O_b$ avec $a \neq b$. Alors

$$\|f_a - f_b\|_\infty \leq \|f_a - f\|_\infty + \|f - f_b\|_\infty < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ce qui n'est pas possible. Donc (b) est vérifié. On en conclut que $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas séparable.

Correction de l'exercice 3 ▲

cf M.E. Taylor, *Measure Theory and Integration*, graduate studies in mathematics, vol. 76, AMS, 2001, pages 50–51.

- Les ensembles $S_{1l} := \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2} - \frac{1}{l}\}$ et $S_{2l} := \{x \in \Omega, g(x) > 2 + \frac{1}{l}\}$ sont introduits pour montrer que les ensembles $\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$ et $\{x \in \Omega, g(x) > 2\}$ sont de μ -mesure nulle (voir plus bas). En conséquence, la fonction $g \in L^2(\Omega, \alpha)$ peut être choisie telle que $\frac{1}{2} \leq g \leq 2$. (On rappelle que $L^2(\Omega, \alpha)$ désigne l'ensemble des fonctions de carré-intégrables définies modulo les ensembles de mesure nulle.) Cela implique que la fonction h définie dans la question 3 est positive comme quotient de deux fonctions positives.
- Pour montrer que $\mu(\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}) = 0$, on peut utiliser par exemple la continuité de la mesure : on a $S_{11} \subset S_{12} \subset S_{13} \subset \dots$ et $\cup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{1l} = \{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\}$, ainsi

$$\mu\left(\left\{x \in \Omega, g(x) < \frac{1}{2}\right\}\right) = \mu(\cup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{1l}) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \mu(S_{1l}) = 0.$$

De même, $S_{21} \subset S_{22} \subset S_{23} \subset \dots$ et $\cup_{l \in \mathbb{N}^*} S_{2l} = \{x \in \Omega, g > 2\}$, d'où $\mu(\{x \in \Omega, g > 2\}) = 0$.

- Pour montrer que l'on a l'égalité (1) du théorème pour toute fonction positive mesurable, on utilise le fait que les fonctions essentiellement bornées appartiennent à $L^2(\Omega, \alpha)$ (pour une mesure finie on a en effet $L^\infty(\Omega, \alpha) \subset L^2(\Omega, \alpha)$), donc l'égalité

$$\int_{\Omega} f(2g - 1) d\nu = \int_{\Omega} f(2 - g) d\mu.$$

de la question 2 est en particulier vérifiée pour toute fonction mesurable positive bornée. Soit maintenant une fonction f mesurable positive (non nécessairement bornée). Le théorème de convergence monotone appliqué à la suite de fonctions $f_n = f \mathbf{1}_{\{f \leq n\}}$ donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(2g-1) d\nu &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(2g-1) d\nu \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(2g-1) d\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(2-g) d\mu \\ &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(2-g) d\mu \\ &= \int_{\Omega} f(2-g) d\mu. \end{aligned}$$

On en déduit que l'égalité (1) du théorème est vérifiée pour toute fonction F de la forme $F = f(2g-1)$, où $f \in \mathcal{M}^+$. Puisque $(2g-1) > 0$, l'ensemble des fonctions F de cette forme est également \mathcal{M}^+ .

Correction de l'exercice 4 ▲

1. On définit la fonction Bêta par $B(a, b) := \int_0^1 s^{a-1}(1-s)^{b-1} ds$, montrons que

$$B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right) = 2 \int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr$$

En utilisant le changement de variable $1-r^2 \rightarrow s$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-r^2)^{d/2} r^{m-1} dr &= -\frac{1}{2} \int_1^0 s^{d/2} (1-s)^{\frac{m-2}{2}} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 s^{d/2} (1-s)^{\frac{m}{2}-1} ds = \frac{1}{2} B\left(1 + \frac{d}{2}, \frac{m}{2}\right). \end{aligned}$$

2. Par le changement de variables $t \rightarrow t^2$ et $u \rightarrow u^2$ on a

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= \left(\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} dt\right) \left(\int_0^\infty e^{-u} u^{b-1} du\right) \\ &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2a-1} dt\right) \left(\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2b-1} du\right) \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'intégration en polaires on a

$$\begin{aligned} \Gamma(a)\Gamma(b) &= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t^2+u^2)} t^{2a-1} u^{2b-1} dt du \\ &= 4 \left(\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2a-1} r^{2b-1} r dr\right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2a-1} (\sin \varphi)^{2b-1} d\varphi\right). \end{aligned}$$

Or, par le changement de variable $r^2 \rightarrow r$,

$$2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(a+b)-1} dr = \int_0^\infty e^{-r} r^{a+b-1} dr = \Gamma(a+b);$$

et par le changement de variable $u = \cos^2 \varphi$,

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{2a-1} (\sin \varphi)^{2b-1} d\varphi = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = B(a, b).$$

Les trois dernières identités entraînent

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b) \cdot B(a, b).$$

3. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha} dx &= \int_0^{+\infty} \mu\left(\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha} > t\right) dt = \int_0^1 \text{Vol}\left(\mathcal{B}\left(0, \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) dt \\ &= \mathcal{V}_n \int_0^1 \left(t^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right)^{\frac{n}{2}} dt = \mathcal{V}_n \int_0^1 \left(1 - t^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{n}{2}} t^{-\frac{n}{2\alpha}} dt \\ &= \alpha \mathcal{V}_n \int_0^1 (1-s)^{\frac{n}{2}} s^{\alpha - \frac{n}{2} - 1} ds = \alpha \mathcal{V}_n B\left(\alpha - \frac{n}{2}, \frac{n}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Posons $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \text{ et } x_{n-1} \geq 0\}$. Comme $0 < \theta_{n-1} < 2\pi$, l'image de Ω' par S est incluse dans Ω . Réciproquement, soit x un élément de Ω . Posons $r = |x|$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on peut définir par récurrence $\theta_i \in (0, \pi)$ grâce à son cosinus :

$$\cos \theta_i = \frac{x_i}{r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{i-1}}.$$

Quant à θ_{n-1} , il est déterminé par son sinus et son cosinus. Comme $x_n \neq 0$ ou $x_{n-1} < 0$, nécessairement $\theta_{n-1} \neq 0 \pmod{2\pi}$.

L'application S est continûment différentiable, car chacune de ses composantes l'est. La matrice jacobienne a ses vecteurs colonnes orthogonaux, et de norme respectivement 1, r , $r \sin \theta_1$, \dots , $r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2}$. Son déterminant vaut alors $r^{n-1} (\sin \theta_1)^{n-2} \dots \sin \theta_{n-2}$. Comme ce déterminant ne s'annule jamais, S est un difféomorphisme de Ω' sur Ω .

2. C'est la formule du changement de variable.

3. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_4 &= \int_{r=0}^1 \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 \left(\int_0^{\pi} \sin^2 \theta_1 d\theta_1 \right) \left(\int_0^{\pi} \sin \theta_2 d\theta_2 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\theta_1}{2} d\theta_1 \right) [-\cos \theta_2]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{2}. \\ \mathcal{A}_3 &= \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\theta_3=0}^{2\pi} \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= 2\pi^2. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit g une fonction sur \mathbb{R}^+ et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(|x|)$.

1. Posons

$$I = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(|y|)}{|x-y|} dy,$$

et $r = |x|$, $s = |y|$. Alors $|x-y| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}$ où θ est l'angle entre l'axe (Ox) et l'axe (Oy) . On considère les coordonnées sphériques de centre O et d'axe (Ox) suivantes :

$$\begin{aligned} y_1 &= s \cos \theta \\ y_2 &= s \sin \theta \cos \varphi \\ y_3 &= s \sin \theta \sin \varphi \end{aligned}$$

On a

$$I = \int_{s=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{g(s)}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} s^2 \sin \theta ds d\theta d\varphi.$$

On note que

$$\frac{\sin \theta}{\sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}} = \frac{d}{d\theta} \frac{1}{rs} \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{rs} \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta} \right]_{\theta=0}^{\pi} g(s) s^2 ds \\ &= 2\pi \int_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{rs} \left(\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} \right) g(s) s^2 ds. \end{aligned}$$

Lorsque $s \leq r$, on a

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (r-s) = 2s,$$

et lorsque $s > r$, il vient

$$\sqrt{(r+s)^2} - \sqrt{(r-s)^2} = (r+s) - (s-r) = 2r.$$

On en déduit alors :

$$I = \frac{4\pi}{r} \int_0^r g(s)s^2 ds + 4\pi \int_r^{+\infty} g(s)s ds.$$

2. Lorsque g est à support dans $[0, R]$, le potentiel newtonien créé par la distribution de masse $f(y) = g(|y|)$ en un point $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $|x| > R$, est identique au potentiel créé par une masse totale égale concentrée à l'origine.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$ et $r = |x|$. On considère $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}.$$

1. La fonction h atteint son maximum en $r = 1$ et $h(1) = \frac{1}{4}$. Pour un réel positif $t \leq \frac{1}{4}$ donné, on cherche à résoudre $t = h(r) = r^2(1+r^2)^{-2}$. On obtient deux solutions

$$\begin{aligned} r_+ &= \left(\frac{1-2t}{2t} + \frac{\sqrt{1-4t}}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} \\ r_- &= \left(\frac{1-2t}{2t} - \frac{\sqrt{1-4t}}{2t} \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ainsi $\mu(f > t) = \mathcal{V}_d(r_+^d - r_-^d)$. De plus, par définition, f^* vérifie $\mu(f^* > t) = \mu(f > t)$ et $\mu(f^* > t) = \mathcal{V}_d r^d$ où r et t sont liés par $t = f^*(r)$. Pour $d = 1$, on a donc $r = r_+ - r_-$ et t est donné par :

$$\begin{aligned} r^2 &= r_+^2 + r_-^2 - 2r_+r_- = \frac{1-2t}{t} - 2\sqrt{\frac{(1-2t)^2}{4t^2} - \frac{1-4t}{4t^2}} \\ &= \frac{1-4t}{t}. \end{aligned}$$

Il en découle que $t = f^*(r) = (4+r^2)^{-1}$.

2. Pour $d = 2$, on a

$$r^2 = r_+^2 - r_-^2 = \frac{\sqrt{1-4t}}{t},$$

ce qui implique que

$$t = f^*(r) = r^{-4} \left(\sqrt{4+r^4} - 2 \right).$$

3. Calculons $\|f\|_2^2$ pour $d = 1$. On a

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|f^*\|_2^2 \\ &= 2 \int_0^{+\infty} (4+r^2)^{-2} dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} (1+s^2)^{-2} ds \\ &= \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{-2} dx = \frac{\pi}{16}, \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 4 (question 3.) sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{-2} dx = 2\mathcal{V}_1 B\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = 4 \frac{\Gamma(3/2)^2}{\Gamma(3)} = 4 \frac{(1/2\Gamma(1/2))^2}{2!} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $d = 2$, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x)^2 dx = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} h(r)^2 r dr d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r^5 (1+r^2)^{-4} dr = \frac{\pi}{3},$$

où la dernière égalité découle de l'exercice 4 sur la fonction Bêta, car :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^{-4} dx = 4 \mathcal{V}_6 B\left(4 - \frac{6}{2}, \frac{6}{2} + 1\right) = 4 \mathcal{V}_6 B(1, 4),$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^{-4} dx = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{S}^5} (1 + r^2)^{-4} r^5 dr d\sigma = \mathcal{A}_5 \int_0^{+\infty} (1 + r^2)^{-4} r^5 dr$$

d'où :

$$\int_0^{+\infty} (1 + r^2)^{-4} r^5 dr = 4 \frac{\mathcal{V}_6}{\mathcal{A}_5} B(1, 4) = \frac{4}{6} \frac{\Gamma(1)\Gamma(4)}{\Gamma(5)} = \frac{2}{3} \frac{3!}{4!} = \frac{1}{6}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x) = e^{-x^2+ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Par translation, le réarrangement à symétrie sphérique décroissant f^* de f est donné par

$$f^*(x) = e^{\frac{a^2}{4}} e^{-x^2}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

cf E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.118, American Mathematical Society (2001). (Pour la question 6, on peut utiliser la continuité du produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.)

Correction de l'exercice 10 ▲

A l'aide des coordonnées sphériques, on a

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-2\pi i(x,k)} dx \\ &= \\ &= \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} h(r) e^{-2\pi i r |k| \cos \theta} r^2 \sin \theta d\theta dr d\varphi \\ &= \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} \int_0^{\pi} h(r) \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2\pi i r |k|} e^{-2\pi i r |k| \cos \theta} \right) r^2 d\theta dr \\ &= \\ &= \frac{1}{|k|} \int_0^{+\infty} h(r) r \frac{1}{i} [e^{+2\pi i r |k|} - e^{-2\pi i r |k|}] dr \\ &= \\ &= \frac{2}{|k|} \int_0^{+\infty} h(r) r \sin(2\pi |k| r) dr. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $1 \leq p < +\infty$.

1. Si f est continue à support compact dans la boule $\mathcal{B}(0, M)$ centrée en 0 et de rayon M , et si $|h| \leq 1$, alors

$$|f(x-h) - f(x)|^p \leq (|f(x-h)| + |f(x)|)^p \leq (2\|f\|_{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{B}(0, M+1)})^p = \mathbf{1}_{\mathcal{B}(0, M+1)} 2^p \|f\|_{\infty}^p.$$

où $\mathcal{B}(0, M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. Pour f continue, on a $\lim_{h \rightarrow 0} |f(x-h) - f(x)| = 0$. Puisque la fonction $g(x) = 2^p \|f\|_{\infty}^p \mathbf{1}_{\mathcal{B}(0, M+1)}(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n)$, le théorème de convergence dominée permet d'invertir limite et intégrale, et il vient :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p^p = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-h) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x-h) - f(x)|^p dx = 0.$$

3. Soit f une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_p &= \|\tau_h(f - f_\varepsilon) - (f - f_\varepsilon) + \tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq \|\tau_h(f - f_\varepsilon)\|_p + \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &= 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon + \|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Puisque f_ε est continue à support compact, d'après la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $\|\tau_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi, pour $|h| < \delta$, on a $\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon$. En d'autres termes $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0$.

4. Pour $p = \infty$, les fonctions continues à support compact ne sont pas denses dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ce qui fait que la démonstration précédente ne peut pas s'appliquer dans ce cas. De plus, on vérifie que, pour $f = \mathbf{1}_{B(0,1)}$ et $h \neq 0$, on a

$$\|\tau_h f - f\|_\infty = 1.$$

Alors que pour $h = 0$, on a $\|\tau_h f - f\|_\infty = 0$. On peut également vérifier que $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$ si et seulement si la fonction f possède un représentant uniformément continu.

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions vérifiant les hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème, et soit $1 \leq p < +\infty$.

1. En notant q l'exposant conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n * f - f|^p(x) &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \varphi_n(y) dy - f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_n(y) dy \right|^p \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| |\varphi_n(y)| dy \right)^p. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour la mesure $d\nu(x) = |\varphi_n|(x) dx$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_n * f - f|^p(x) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}^q d\nu(y) \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p d\nu(y) \right)^{\frac{p}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_n|(y) dy \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y) dy \right) \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y) dy \right). \end{aligned}$$

2. On en déduit que

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p \leq K^{\frac{p}{q}} \int_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{y \in \mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |\varphi_n|(y) dy \right) dx$$

D'après le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned} \|\varphi_n * f - f\|_p^p &\leq K^{\frac{p}{q}} \int_{y \in \mathbb{R}^n} \left(\int_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right) |\varphi_n|(y) dy \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n|(y) dy. \end{aligned}$$

3. Soit $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\|\varphi_n * f - f\|_p^p \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \left(\int_{|y| \leq \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n|(y) dy + \int_{|y| > \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p |\varphi_n|(y) dy \right) \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \left(\sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p \int_{|y| \leq \delta} |\varphi_n|(y) dy + \int_{|y| > \delta} (\|\tau_y f\|_p + \|f\|_p)^p |\varphi_n|(y) dy \right) \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \left(K \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + (2\|f\|_p)^p \int_{|y| > \delta} |\varphi_n|(y) dy \right) \\ &\leq K^{\frac{p}{q}} \left(K \sup_{|y| \leq \delta} \|\tau_y f - f\|_p^p + 2^p \|f\|_p^p \int_{|y| > \delta} |\varphi_n|(y) dy \right). \end{aligned}$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité des translations dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ (cf l'exercice précédent), il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \|\tau_y f - f\|_p^p < \frac{K^{-(\frac{p}{q}+1)}}{2} \varepsilon.$$

D'après l'hypothèse (iii), il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$, on a

$$\int_{|y|>\delta} |\varphi_n(y)| dy < \frac{K^{-\frac{p}{q}}}{2^{p+1} \|f\|_p^p} \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $n > N$,

$$\|\varphi_n * f - f\|_p^p < \varepsilon,$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\varphi_n * f - f\|_p = 0$.

Correction de l'exercice 13 ▲

Voir E. Lieb et M. Loss, *Analysis*, p.123, American Mathematical Society (2001).
