



## Intersections des $L^p$ et convergences

---

### 1 Cas d'une mesure finie

#### Exercice 1

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  dont la mesure de Lebesgue est finie :  $\mu(\Omega) < +\infty$ . Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\|f\|_p := (\int_{\Omega} |f|^p(x) dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$  modulo l'équivalence  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \mu - p.p.$  L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté  $L^\infty(\Omega)$ .

1. Montrer que si  $q \leq p$ , alors  $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ . En particulier, pour  $1 < q < 2 < p$ , on a :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Soit  $\mathcal{B}^n(0, 1)$  la boule unité centrée en 0 de  $\mathbb{R}^n$ . En considérant les fonctions

$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$

montrer que pour  $q < p$ , l'inclusion  $L^p(\mathcal{B}^n(0, 1)) \subset L^q(\mathcal{B}^n(0, 1))$  est stricte.

[Correction ▼](#)

[005964]

### 2 Cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$

#### Exercice 2

Soit  $\Omega = \mathbb{N}$  muni de la mesure de comptage. Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $\ell^p$  l'espace des suites complexes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\|u\|_p := (\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ . L'espace des suites bornées sera noté  $\ell^\infty$ .

1. Montrer que si  $q \leq p$ , alors  $\ell^q \subset \ell^p$ . En particulier, pour  $1 < q < 2 < p$ , on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. En considérant les suites  $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$ , montrer que pour  $q < p$ , l'inclusion  $\ell^q \subset \ell^p$  est stricte.

[Correction ▼](#)

[005965]

### 3 Cas de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

#### Exercice 3

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $L^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$  modulo l'équivalence  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \mu - p.p.$  L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

1. — Pour quelle valeur de  $\alpha$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$  appartient-elle à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ?  
— Pour quelle valeur de  $\beta$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$  appartient-elle à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  ?

- Soit  $1 \leq q < p \leq +\infty$ . En utilisant (a) et (b), trouver une fonction  $f$  qui appartienne à  $L^q(\mathbb{R}^n)$  mais pas à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  et une fonction  $g$  qui appartienne à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  mais pas à  $L^q(\mathbb{R}^n)$ .
- 2. — Soit  $1 \leq q < p < +\infty$ . Montrer que l'espace  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$  est un espace de Banach pour la norme  $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$ .
- Soit  $r$  tel que  $q < r < p$ . Montrer que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . On pourra écrire  $r = r\alpha + r(1-\alpha)$  et utiliser l'inégalité de Hölder pour un couple de réels conjugués bien choisi.

- En déduire que si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$  alors  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^r(\mathbb{R}^n)$ , i.e  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace de Banach de  $L^r(\mathbb{R}^n)$ .
- 3. Soit  $f \in L^p([0, +\infty[) \cap L^q([0, +\infty[)$  avec  $1 \leq q < 2 < p$ . Montrer que la fonction  $h$  définie par  $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$  appartient à  $L^1([0, +\infty[)$  et trouver des constantes  $C_{p,q}$  et  $\gamma$  telles que  $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^\gamma \|f\|_p^{(1-\gamma)}$ .

[Correction ▼](#)

[005966]

## 4 Convergences

### Exercice 4

Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[n, 2n]}(x).$$

1. Montrer que  $f_n$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2([0, +\infty[)$  mais ne converge pas fortement dans  $L^2([0, +\infty[)$ .
2. Montrer que  $f_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^p([0, +\infty[)$  pour  $p > 2$ .

[Correction ▼](#)

[005967]

### Exercice 5

Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Montrer que  $f_n$  converge faiblement vers 0 dans  $L^2([0, +\infty[)$  mais ne converge pas fortement dans  $L^2([0, +\infty[)$ .
2. Montrer que  $f_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^p([0, +\infty[)$  pour  $p < 2$ .

[Correction ▼](#)

[005968]

### Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  dont la mesure de Lebesgue est finie :  $\mu(\Omega) < +\infty$ . Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , notons  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\|f\|_p := (\int_{\Omega} |f|^p(x) dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$  modulo l'équivalence  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \mu - p.p.$  L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté  $L^\infty(\Omega)$ .

1. Si  $f \in L^\infty(\Omega)$ , alors

$$\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p(x) dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ainsi  $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  pour tout  $p$  et  $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$ . Montrons que si  $q \leq p$ , alors  $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ . Soit  $f \in L^p(\Omega)$ , on a par exemple :

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q &= \int_{\Omega} |f|^q(x) dx = \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^q(x) dx + \int_{\{|f| < 1\}} |f|^q(x) dx \\ &\leq \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^p(x) dx + \int_{\{|f| < 1\}} 1 dx \\ &\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty. \end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués  $r = \frac{p}{q} > 1$  et  $r' = \frac{p}{p-q}$  :

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q &= \int_{\Omega} |f|^q(x) dx = \left( \int_{\Omega} |f|^{q \cdot \frac{p}{q}}(x) dx \right)^{\frac{q}{p}} \left( \int_{\Omega} 1^{\frac{p}{p-q}}(x) dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \|f\|_p^q \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}}, \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}.$$

En conclusion, pour  $1 < q < 2 < p$  :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

2. Montrons que pour  $q < p$ , l'inclusion  $L^p(\mathcal{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathcal{B}^n(0,1))$  est stricte. La fonction  $f_\alpha$  appartient à  $L^\infty(\mathcal{B}^n(0,1))$  si et seulement si  $\alpha \leq 0$ , et à  $L^p(\mathcal{B}^n(0,1))$  avec  $p < +\infty$  si et seulement si

$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$

Soit  $1 \leq q < p$ , alors  $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p} + \frac{n}{q})}$  appartient à  $L^q(\mathcal{B}^n(0,1)) \setminus L^p(\mathcal{B}^n(0,1))$ . En particulier,  $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p} + \frac{n}{q})}$  appartient à  $L^q(\mathcal{B}^n(0,1)) \setminus L^\infty(\mathcal{B}^n(0,1))$ .

### Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $\Omega = \mathbb{N}$  muni de la mesure de comptage. Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $\ell^p$  l'espace des suites complexes  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que  $\|u\|_p := (\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ . L'espace des suites bornées sera noté  $\ell^\infty$ .

1. Montrons que si  $q \leq p$ , alors  $\ell^q \subset \ell^p$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^q$ . Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

il existe un rang  $N$  tel que pour  $n > N$ ,  $|u_n|^q < 1$ . En particulier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $\ell^\infty$  et

$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0, \dots, u_N, 1\}.$$

De plus, pour  $n > N$ , on a  $|u_n|^p \leq |u_n|^q$  et

$$\sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{i=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$

ce qui implique que  $\|u\|_p < +\infty$ . En conclusion, pour  $1 < q < 2 < p$ , on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty.$$

2. La suite  $u_n^{(\alpha)} = n^{-\alpha}$  appartient à  $\ell^\infty$  pour tout  $\alpha \geq 0$  et à  $\ell^p$  avec  $1 \leq p < +\infty$  si et seulement si  $\alpha p > 1$ , i.e  $\alpha > \frac{1}{p}$ . En particulier la suite constante égale à 1 appartient à  $\ell^\infty$  mais n'appartient à aucun  $\ell^p$  pour  $p < +\infty$ . Soit  $1 < q < p < +\infty$ . Pour tout  $\alpha$  tel que  $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$ , la suite  $u^{(\alpha)}$  appartient à  $\ell^p \setminus \ell^q$ . C'est le cas en particulier pour  $\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)$ . Ainsi l'inclusion  $\ell^q \subset \ell^p$  est stricte lorsque  $q < p$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $\Omega = \mathbb{R}^n$  muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ , on note  $L^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\|f\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$  modulo l'équivalence  $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0 \mu - p.p.$  L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

1. — La fonction  $x \mapsto \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour  $2\alpha p > n$ .  
 — La fonction  $x \mapsto \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$  appartient à  $L^p(\mathbb{R}^n)$  pour  $p\beta < n$ .  
 — Soit  $1 \leq q < p \leq +\infty$ . La fonction

$$f(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

vérifient  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$ . La fonction

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifient  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et  $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$ .

2. — Soit  $1 \leq q < p < +\infty$  et  $f_n$  une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$ . Comme  $\|\cdot\|_p \leq \|\cdot\|_{p,q}$ ,  $f_n$  est une suite de Cauchy dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , donc elle converge vers une fonction  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_p$ . De même,  $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_{p,q}$ , donc  $f_n$  converge vers une fonction  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  pour la norme  $\|\cdot\|_q$ . De plus, il existe une sous-suite de  $f_{n_k}$  qui converge vers  $f$  presque-partout et il existe une sous-suite de  $f_{n_k}$  qui converge vers  $g$  presque-partout. Ainsi  $f = g \mu$ -p.p. et  $f_n$  converge vers  $f = g$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ .  
 — Soit  $r$  tel que  $q < r < p$ . Montrons que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Puisque  $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$ , les réels  $p' = \frac{p}{\alpha r}$  et  $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$  sont conjugués. D'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x) \cdot |f|^{(1-\alpha)r}(x) dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x) dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)r q'}(x) dx \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx \right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x) dx \right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\ &\leq \|f\|_p^{\alpha r} \|f\|_q^{(1-\alpha)r}, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à  $\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$ . On peut également écrire  $r = \beta q + (1-\beta)p$  avec  $\beta \in ]0, 1[$  et appliquer Hölder avec les réels conjugués  $\frac{1}{\beta}$  et  $\frac{1}{1-\beta}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x) \cdot |f|^{(1-\beta)p}(x) dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x) dx \right)^\beta \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) dx \right)^{(1-\beta)}, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^{\frac{q\beta}{r}} \|f\|_p^{\frac{p(1-\beta)}{r}}$$

qui est l'inégalité cherchée car  $\alpha = \frac{p\beta}{r}$  vérifie bien  $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ .

— Si  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$  alors  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  et dans  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , donc dans  $L^r(\mathbb{R}^n)$  d'après l'inégalité précédente. En conclusion,  $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$  est fermé dans  $L^r(\mathbb{R}^n)$  donc un sous-espace de Banach de  $L^r(\mathbb{R}^n)$ .

3. Soit  $f \in L^p([0, +\infty[) \cap L^q([0, +\infty[)$  et  $h$  la fonction définie par  $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ . On notera  $p'$  le conjugué de  $p$  et  $q'$  le conjugué de  $q$ . Montrons que  $h$  appartient à  $L^1([0, +\infty[)$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} |f(r)| dr &= \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r}} |f(r)| dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} |f(r)| dr \\ &\leq \left( \int_0^R r^{-\frac{p'}{2}} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_0^R |f(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_R^{+\infty} r^{-\frac{q'}{2}} dr \right)^{\frac{1}{q'}} \left( \int_R^{+\infty} |f(r)|^q dr \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left( \frac{1}{1 - \frac{p'}{2}} \right)^{\frac{1}{p'}} R^{\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{2}\right)} \|f\|_p + \left( \frac{1}{\frac{q'}{2} - 1} \right)^{\frac{1}{q'}} R^{\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{2}\right)} \|f\|_q. \end{aligned}$$

En optimisant par rapport à  $R$ , on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} |f(r)| dr \leq C_{p,q} \|f\|_p^{1-\gamma} \|f\|_q^\gamma,$$

où, en posant  $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$  et  $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$ , on a  $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ , et  $C_{p,q} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha^\gamma \beta^{1-\gamma}} \left(1 - \frac{p'}{2}\right)^{-\frac{1-\gamma}{p'}} \left(\frac{q'}{2} - 1\right)^{-\frac{\gamma}{q'}}$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_{[n, 2n]}(x).$$

1. Quelque soit  $g$  continue à support compact,

$$\int_{[0, +\infty[} f_n(x) g(x) dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{2n} g(x) dx \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par densité des fonctions continues à support compact,  $f_n$  converge faiblement vers 0. D'autre part,  $f_n$  converge presque partout vers 0. Supposons que  $f_n$  converge fortement vers une fonction  $f$  dans  $L^2([0, +\infty[)$ . Alors il existe une sous-suite de  $f_n$  qui converge presque-partout vers  $f$ , ce qui implique que  $f = 0$  est la seule limite possible. Or :

$$\|f_n\|_2 = 1$$

pour tout  $n$ , donc  $\|f_n\|_2$  ne tend pas vers  $\|f\|_2 = 0$  ce qui contredit le fait que  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^2([0, +\infty[)$ .

2. Pour  $p > 2$ , on a :

$$\int_{[0, +\infty[} |f_n(x)|^p dx = \int_n^{2n} n^{-\frac{p}{2}} dx = n^{1-\frac{p}{2}} \rightarrow 0,$$

quand  $n \rightarrow +\infty$  donc  $f_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^p([0, +\infty[)$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \mathbf{1}_{[n, n+\frac{1}{n}]}(x).$$

1. Quelque soit  $g$  continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x) dx = \sqrt{n} \int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x) dx \rightarrow 0$$

quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par densité des fonctions continues à support compact,  $f_n$  converge faiblement vers 0. Comme  $f_n$  converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que  $f_n$  ne converge pas fortement vers 0 dans  $L^2([0, +\infty[)$  car

$$\|f_n\|_2 = 1.$$

2. Pour  $p < 2$ , on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)| dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}} dx = n^{\frac{p}{2}-1} \rightarrow 0,$$

donc  $f_n$  converge fortement vers 0 dans  $L^p([0, +\infty[)$ .

---