



Théorème de Fubini-Tonelli et convolutions

1 Théorème de Fubini-Tonelli

Exercice 1

Soit $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 f(x, y) dy \right) dx.$$

Y a-t-il contradiction avec le théorème de Fubini ? (on pourra calculer l'intégrale de $|f|$ sur l'anneau $S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.)

[Correction ▼](#)

[005957]

Exercice 2

Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1] \times (0, +\infty)$; en déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{y} (\sin y)^2 e^{-y} dy.$$

[Correction ▼](#)

[005958]

2 Produit de convolution

Exercice 3

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où \mathbb{R}^n est muni de la mesure de Lebesgue. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n et que le *produit de convolution* de f et g défini par

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

vérifie $f * g(x) = g * f(x)$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

[Correction ▼](#)

[005959]

Exercice 4

Soient $a, b > 0$, et f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}^n par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. Calculer $f * g(x)$.

[Correction ▼](#)

[005960]

Exercice 5

1. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx = 1$.

(b) Montrer que, pour tout $\delta > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\{|x| > \delta\}} f_t(x) dx = 0$.

(On dit que f_t est une *approximation de la distribution de Dirac*.)

2. Soit g une fonction continue bornée. Montrer que $f_t * g$ est bien définie et que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t * g(x) = g(x).$$

[Correction ▼](#)

[005961]

Exercice 6

Soient $f, g \in L^1(\mu)$ où μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n . On note \hat{f} la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y,x)} dx,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n . Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(x) dx$.

2. $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$.

[Correction ▼](#)

[005962]

Exercice 7

Calculer la transformée de Fourier de la gaussienne définie, pour $x \in \mathbb{R}^n$, par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$, où $a > 0$.

[Correction ▼](#)

[005963]

Correction de l'exercice 1 ▲

On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \right) dy &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2)} \Big|_{-1}^1 \right) dy \\ &= - \int_{-1}^1 \frac{2}{(1 + y^2)} dy = -2 \arctan y \Big|_{-1}^1 = -\pi.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \right) dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{y}{(x^2 + y^2)} \Big|_{-1}^1 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{2}{(x^2 + 1)} dx = 2 \arctan x \Big|_{-1}^1 = \pi.\end{aligned}$$

Il n'y a pas de contradiction avec le théorème de Fubini car la fonction f n'appartient pas à $\mathcal{L}^1([-1, 1] \times [-1, 1])$. En effet, soit $S_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. On a

$$\int_{[-1, 1] \times [-1, 1]} |f| d\mu \geq \int_{S_\varepsilon} |f| d\mu = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=\varepsilon}^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r} dr d\theta = 4 \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=\varepsilon}^1 \frac{|\cos 2\theta|}{r} dr d\theta = -4 \log \varepsilon \rightarrow \infty$$

lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et donc $f \notin \mathcal{L}^1([-1, 1] \times [-1, 1])$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Le théorème de Tonelli donne :

$$\int_{[0, 1] \times (0, +\infty)} |e^{-y} \sin 2xy| dx dy \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1 < +\infty,$$

ce qui prouve que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin 2xy$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue sur $[0, 1] \times (0, +\infty)$. Le théorème de Fubini donne alors la valeur I de l'intégrale de cette fonction :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} e^{-y} \sin 2xy dy \stackrel{\text{(IPP)}}{=} \int_0^1 (2x)(1 + 4x^2)^{-1} dx = \frac{\log 5}{4} \\ I &= \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^1 \sin 2xy dx = \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{\sin^2 y}{y} dy.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, où \mathbb{R}^n est muni de la mesure de Lebesgue. L'identité $f * g(x) = g * f(x)$ s'obtient par changement de variable. En ce qui concerne l'inégalité $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$, on distingue les cas en fonction de la valeur de p .

1. Pour $p = +\infty$, c'est clair.
2. Supposons que $p = 1$ et posons $F(x, y) = f(x - y)g(y)$. Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| dx = |g(y)| \cdot \|f\|_1,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

D'après le théorème de Tonelli, $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dy < +\infty \quad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^n,$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)| dy \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Ainsi,

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} dx |f * g(x)| = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left| \int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dy \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

3. Supposons que $1 < p < +\infty$. Utilisons le cas précédent, en faisant jouer ici à g^p le rôle alors joué par g . Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, la fonction $y \mapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ est intégrable sur \mathbb{R}^n , i.e. la fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$. Soit p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. La fonction $y \mapsto |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}}$ appartient à $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ car $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et la mesure de Lebesgue est invariante par translation. D'après l'inégalité de Hölder,

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \cdot |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \|f\|_1^{\frac{1}{p'}},$$

ainsi

$$|(f * g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}}.$$

D'après le cas précédent, on voit que

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_p^p \leq \|f\|_1 \|g\|_p^p \cdot \|f\|_1^{\frac{p}{p'}},$$

c'est-à-dire

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $a, b > 0$, et f et g les fonctions définies sur \mathbb{R}^n par $f(x) = e^{-\frac{a|x|^2}{2}}$ et $g(x) = e^{-\frac{b|x|^2}{2}}$. On a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\left(\frac{a|x-y|^2 + b|y|^2}{2}\right)} dy$$

Or

$$\begin{aligned} a|x-y|^2 + b|y|^2 &= \sum_{i=1}^n ax_i^2 + (a+b)y_i^2 - 2ax_iy_i \\ &= \sum_{i=1}^n ax_i^2 + (a+b) \left(y_i - \frac{a}{a+b}x_i \right)^2 - (a+b) \left(\frac{ax_i}{a+b} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a - \frac{a^2}{a+b} \right) x_i^2 + (a+b) \left(y_i - \frac{a}{a+b}x_i \right)^2 \\ &= \frac{ab}{a+b} |x|^2 + (a+b) \left| y - \frac{a}{a+b}x \right|^2. \end{aligned}$$

Ainsi

$$f * g(x) = e^{-\frac{ab}{a+b} \frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2} \left| y - \frac{a}{a+b}x \right|^2} dy = e^{-\frac{ab}{a+b} \frac{|x|^2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{(a+b)}{2} |z|^2} dz$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par translation. En utilisant $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, on obtient alors :

$$f * g(x) = \left(\frac{2\pi}{a+b} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{ab}{a+b} \frac{|x|^2}{2}}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Pour tout $t > 0$, on pose :

$$f_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

(a) On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \\ &= (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_i^2}{4t}} dx_i. \end{aligned}$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, on en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx = 1.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f_1 est intégrable sur \mathbb{R}^n , il existe un $R > 0$ tel que

$$\int_{\mathcal{B}(0,R)^c} f_1(x) dx < \varepsilon.$$

On remarque que $f_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$. On a alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(x) dx &= \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} t^{-\frac{n}{2}} f_1\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) dx = t^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathcal{B}(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}})^c} f_1(z) t^{\frac{n}{2}} dz \\ &= \int_{\mathcal{B}(0,\frac{\delta}{\sqrt{t}})^c} f_1(z) dz \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

dès que $t < \frac{\delta^2}{R^2}$.

2. Soit g une fonction continue bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|g| < M$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_t(x-y)g(y)| dy \leq M \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y) dy = M < +\infty,$$

ainsi $y \mapsto f_t(x-y)g(y)$ est intégrable et $f_t * g$ est bien définie. Puisque $\int_{\mathbb{R}^n} f_t(x) dx = 1$, on a

$$\begin{aligned} |f_t * g(x) - g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y)g(x) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque g est continue en $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $\delta > 0$ tel que $|y| < \delta \Rightarrow |g(x-y) - g(x)| < \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned} |f_t * g(x) - g(x)| &\leq \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} f_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y) |g(x-y) - g(x)| dy \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathcal{B}(0,\delta)} f_t(y) dy + 2M \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y) dy \\ &\leq \varepsilon + 2M \int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y) dy. \end{aligned}$$

D'après la question 1.(b), il existe $t_0 > 0$ tel que pour $t < t_0$, $\int_{\mathcal{B}(0,\delta)^c} f_t(y) dy \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Ainsi pour $t < t_0$,

$$|f_t * g(x) - g(x)| < 2\varepsilon,$$

i.e.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f_t * g(x) = g(x).$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. On note \hat{f} la transformée de Fourier définie par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(y,x)} dx,$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de \mathbb{R}^n .

1. On a $\|\hat{g}\|_\infty \leq \|g\|_1$, ce qui implique que $f \hat{g}$ est intégrable. De même $\hat{f} g$ est intégrable. De plus $F(x, y) = f(x)g(y)e^{-2\pi i(x,y)}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i(x,y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x,y)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)g(y) dx. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(y) e^{-2\pi i(x,y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy e^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)} e^{-2\pi i(x,z)} f(y-z)g(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)} f(u) du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)} g(z) dz \\ &= \hat{f}(x)\hat{g}(x). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Supposons tout d'abord $n = 1$. Soit la gaussienne définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{ax^2}{2}}$, où $a > 0$. Posons

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi itx} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi itx} dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, h est dérivable et

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi itx} dx = \left[2\pi i \frac{1}{a} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi itx} \right]_{-\infty}^{+\infty} + (2\pi i)^2 t \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} e^{-2\pi itx} dx \\ &= -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t). \end{aligned}$$

De plus,

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}.$$

La solution de l'équation différentielle $h'(t) = -(2\pi)^2 \frac{1}{a} t \cdot h(t)$ avec condition initiale $h(0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}$ est

$$h(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\frac{(2\pi)^2}{a} \frac{t^2}{2}}.$$

Pour $n > 1$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(t,x)} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a|x|^2}{2}} e^{-2\pi i(t,x)} dx \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{ax_i^2}{2}} e^{-2\pi it_i x_i} dx_i = \prod_{i=1}^n h(t_i) = \left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}} \right)^n e^{-\frac{(2\pi)^2}{a} \frac{|t|^2}{2}} \end{aligned}$$