



## Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

---

### Exercice 1

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left] a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n} \right[ \quad \text{et} \quad ]a, b[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[ a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n} \right]$$

Correction ▼

[005933]

### Exercice 2

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Montrer que la troncature  $f_A$  de  $f$  définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$

est  $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable.

Correction ▼

[005934]

### Exercice 3

Soit  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mu$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$  définie par :

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1,$$

où  $E \in \Sigma$ . Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive ou nulle. Montrer que  $f$  est  $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable et que :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Correction ▼

[005935]

### Exercice 4

Soit  $(\Omega, \Sigma)$  un espace mesurable. On dit que  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est une *fonction simple* ou *étagée* si  $\varphi$  est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si  $\varphi$  s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où  $J$  est un ensemble fini, les ensembles  $E_j$  sont mesurables et où, pour  $i \neq j$ ,  $c_i \neq c_j$  et  $E_i \cap E_j = \emptyset$ . Soit  $\varphi$  une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de  $\varphi$  par rapport à une mesure  $\mu$  est définie par :

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_{\varphi}(t)) dt,$$

où  $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\}$ .

1. Montrer que

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive,  $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ , il existe une suite  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions simples positives telle que :

(a)  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  ;

(b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ .

[Correction ▼](#)

[005936]

### Exercice 5

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré et  $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$  (i.e  $f$  est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout  $E \in \Sigma$ , on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_E \cdot f d\mu.$$

Montrer que  $\lambda$  définit une mesure sur  $(\Omega, \Sigma)$ .

[Correction ▼](#)

[005937]

### Exercice 6

Soit  $p > 0$ . Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x).$$

Calculer l'intégrale de  $f$  par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$  de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles  $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$  et la définition de l'intégrale de Lebesgue.

[Correction ▼](#)

[005938]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Montrons que  $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $[a, b] \subset ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$ . Donc  $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$ .
- Soit  $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a - \frac{1}{n}) \leq x \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (b + \frac{1}{n}),$$

c'est-à-dire  $x \in [a, b]$ . Donc  $\bigcap_{n=1}^{\infty} ]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[ \subset [a, b]$  et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

2. Montrons que  $]a, b[ = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$ .

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[ \subset ]a, b[$ , donc  $\bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[ \subset ]a, b[$ .
- Soit  $x \in ]a, b[$ . Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$ . Ainsi  $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[ \subset ]a, b[$ , d'où l'égalité de ces deux ensembles.

## Correction de l'exercice 2 ▲

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $(\Sigma - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Montrons que la troncature  $f_A$  de  $f$  définie par :

$$f_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) < -A\} = f^{-1}(]-\infty, -A]), \\ E_2 &:= \{x \in \Omega \mid |f(x)| \leq A\} = f^{-1}([-A, A]), \\ E_3 &:= \{x \in \Omega \mid f(x) > A\} = f^{-1}(]A, +\infty[). \end{aligned}$$

Comme  $]-\infty, -A[$ ,  $[-A, A]$ ,  $]A, +\infty[$  appartiennent à la tribu borélienne et  $f$  est  $(\Sigma - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable, les ensembles  $E_1$ ,  $E_2$ , et  $E_3$  appartiennent à  $\Sigma$ . Alors  $f_A = f \cdot \mathbf{1}_{E_2} - A \cdot \mathbf{1}_{E_1} + A \cdot \mathbf{1}_{E_3}$  est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

## Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$  et  $\mu$  la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$  définie par :

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1,$$

où  $E \in \Sigma$ . Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien  $E$ ,  $f^{-1}(E)$  appartient à  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ , donc  $f$  est  $(\Sigma - \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_f(t)) dt,$$

où  $S_f(t) = \{n \in \mathbb{N}, f(n) > t\}$ . Pour tout  $y \in [0, +\infty[$ , posons  $A_y := \{n \in \mathbb{N}, f(n) = y\}$ . Alors

$$S_f(t) = \bigcup_{y > t} A_y$$

où l'union est disjointe et où  $A_y$  est vide sauf pour un ensemble dénombrable  $\{y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  de valeurs de  $y$ . Par  $\sigma$ -additivité de la mesure  $\mu$ ,

$$\mu(S_f(t)) = \mu(\bigcup_{y_i > t} A_{y_i}) = \sum_{y_i > t} \mu(A_{y_i}) = \sum_{y_i > t} \mu(\{f = y_i\}).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\mu &= \int_0^{\infty} \sum_{y_i > t} \mu(\{f = y_i\}) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0 \leq t < y_i} \mu(\{f = y_i\}) dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot \mu(\{f = y_i\}) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \cdot \#\{n \in \mathbb{N}, f(n) = y_i\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n). \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $\varphi$  une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j \mathbf{1}_{E_j},$$

où  $J$  est un ensemble fini, les ensembles  $E_j$  sont mesurables et où, pour  $i \neq j$ ,  $c_i \neq c_j$  et  $E_i \cap E_j = \emptyset$ .

1. On a

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \mu(S_{\varphi}(t)) dt,$$

où  $S_{\varphi}(t) = \{x \in \Omega, \varphi(x) > t\} = \cup_{c_j > t} E_j$  et où  $\mu(S_{\varphi}(t)) = \sum_{c_j > t} \mu(E_j)$ . Ainsi

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu = \int_0^{\infty} \sum_{c_j > t} \mu(E_j) dt = \sum_{j \in J} \int_0^{c_j} \mu(E_j) dt = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j).$$

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$\begin{aligned} E_{k,n} &:= \{x \in \Omega, k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\} \quad \text{pour } k = 0, \dots, n2^n - 1, \\ E_{n,n} &:= \{x \in \Omega, f(x) \geq n\} \quad \text{pour } k = n2^n. \end{aligned}$$

Puisque  $f$  est mesurable, les ensembles  $E_{k,n}$  appartiennent à  $\Sigma$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé, les ensembles  $E_{k,n}$ ,  $0 \leq k \leq n2^n - 1$  sont deux à deux disjoints et  $\cup_k E_{k,n} = \Omega$ . Posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^n - 1} k2^{-n} \mathbf{1}_{E_{k,n}}.$$

Alors  $\varphi_n$  est une fonction simple positive vérifiant  $\varphi_n \leq f$ . En outre  $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$  pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \Omega$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  un espace mesuré et  $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ . Pour tout  $E \in \Sigma$ , on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_E \cdot f d\mu.$$

Montrons que  $\lambda$  définit une mesure sur  $(\Omega, \Sigma)$ .

*1<sup>ère</sup> méthode* : On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 4, toute fonction  $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$  s'écrit  $f = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n$ , où les  $\varphi_n$  sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que  $\lambda$  est une mesure.

2<sup>de</sup> méthode : On a clairement  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Il suffit donc de vérifier la  $\sigma$ -additivité de  $\lambda$ . Soit  $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu = \int_{\Omega} \mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_i}\right) f d\mu = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{1}_{E_i} f) d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} (\mathbf{1}_{E_i} f) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i). \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x).$$

(i) On a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x) dx = \int_{|x| < 1} |x|^{-p} dx = \int_{r=0}^1 \int_{\sigma \in \mathcal{S}_{n-1}} r^{n-p-1} dr d\sigma \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-p-1} dr. \end{aligned}$$

Pour  $n \leq p$ , il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = +\infty.$$

Pour  $p < n$ , il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left[ \frac{r^{n-p}}{(n-p)} \right]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

(ii) Pour  $a \in [0, +\infty[$ ,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, |x|^{-p} > a\} \cap \mathcal{B}(0, 1),$$

où  $\mathcal{B}(0, 1)$  est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathcal{B}(0, 1).$$

On en déduit que  $S_f(a) = \mathcal{B}(0, 1)$  si  $a^{-\frac{1}{p}} > 1$ , i.e. si  $a < 1$  et que  $S_f(a)$  est égale à la boule  $\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})$  de centre 0 et de rayon  $a^{-\frac{1}{p}}$  lorsque  $a \geq 1$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_0^{+\infty} \mu(S_f(a)) da = \int_0^1 \mu(\mathcal{B}(0, 1)) da + \int_1^{+\infty} \mu\left(\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})\right) da \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}} da. \end{aligned}$$

Si  $p \geq n$ , on obtient  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = +\infty$  et pour  $p < n$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left[ \frac{a^{-\frac{n}{p} + 1}}{-\frac{n}{p} + 1} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \left( 1 + \frac{p}{n-p} \right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$