



## Théorème de Carathéodory, calcul d'aire et de volume

### 1 Théorème de Carathéodory

#### Exercice 1

Le but de cet exercice est de prouver le Théorème de Carathéodory.

**Définition.** Une mesure extérieure sur un ensemble  $\Omega$  est une application  $m_* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

- (i)  $m_*(\emptyset) = 0$  ;
- (ii) (monotonie)  $A \subset B \Rightarrow m_*(A) \leq m_*(B)$  ;
- (iii) ( $\sigma$ -sous-additivité) Pour toute suite d'ensembles  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  on a

$$m_* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_*(A_i).$$

**Théorème de Carathéodory** Soit  $m_*$  une mesure extérieure sur  $\Omega$ . Un ensemble  $A \subset \Omega$  est dit  $m_*$ -mesurable si pour tout  $Q \subset \Omega$  on a

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A) + m_*(Q \cap A^c).$$

Notons  $\mathcal{M}_{m_*} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties  $m_*$ -mesurables. Alors

1.  $\mathcal{M}_{m_*}$  est une  $\sigma$ -algèbre.
2.  $m = m_*|_{\mathcal{M}_{m_*}}$  est une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*})$ .
3. L'espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*}, m)$  est complet, i.e. si  $E \in \mathcal{M}_{m_*}$  et  $m(E) = 0$ , alors tout sous-ensemble  $A \subset E$  appartient à  $\mathcal{M}_{m_*}$ .

Début de l'exercice :

1. (a) Rappeler la définition d'une  $\sigma$ -algèbre.
- (b) Vérifier que  $\emptyset$  et  $\Omega \in \mathcal{M}_{m_*}$ , et  $A \in \mathcal{M}_{m_*} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}_{m_*}$ .
- (c) Soit  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite quelconque d'ensembles  $m_*$ -mesurables. On pose  $B_1 = \emptyset$ ,  $B_2 = A_1$  et  $B_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ , pour  $j \geq 2$ . Soit  $Q$  un sous-ensemble de  $\Omega$ . Montrer par récurrence que l'assertion  $(P_k)$  suivante est vérifiée pour tout  $k \geq 1$  :

$$(P_k) \quad m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^k m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

- (d) Soit  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ . Dédurre de la question précédente que

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

- e) En remarquant que  $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)$ , montrer :

$$m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) \leq m_*(Q),$$

et conclure.

2. (a) Rappeler la définition d'une mesure.  
(b) En utilisant la question 1.d), montrer la  $\sigma$ -additivité de  $m$ .
3. Montrer que  $m$  est complète.

Correction ▼

[005928]

### Exercice 2

On définit la mesure extérieure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ ,  $m_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , par la formule

$$m_*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} ]a_i, b_i[ \right\}.$$

Montrer qu'il s'agit bien d'une mesure extérieure.

Correction ▼

[005929]

### Exercice 3

On définit  $m_* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$m_*(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que  $m_*$  est une mesure extérieure.
2. Quels sont les ensembles  $m_*$ -mesurables ?
3. Vérifier le théorème de Carathéodory sur cet exemple.

Correction ▼

[005930]

## 2 Aire de $\mathcal{S}_{n-1}$ et volume de $\mathcal{B}_n$

### Exercice 4

1. Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .  
*Indication* : On pourra d'abord calculer  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$  en passant en coordonnées polaires.
2. Calcul de l'aire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{S}_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{A}_{n-1}$  son aire. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n$$

en fonction de  $\mathcal{A}_{n-1}$ . En déduire l'expression de  $\mathcal{A}_{n-1}$  en fonction de la fonction  $\Gamma$  :

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

3. Calcul du volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$  la boule fermée de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{V}_n$  son volume. Montrer que  $\mathcal{V}_n = \frac{\mathcal{A}_{n-1}}{n}$ . En déduire que :

$$\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

4. Application : Que vaut l'aire de la sphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^2$  ?  $\mathbb{R}^3$  ? Que vaut le volume de la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}$  ?  $\mathbb{R}^2$  ?  $\mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 5**

Cet exercice fournit une autre méthode de calcul du volume de la boule unité  $\mathcal{B}_n$  de  $\mathbb{R}^n$  et de l'aire de la sphère  $\mathcal{S}_{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ . On conserve les notations de l'exercice précédent.

1. Montrer que  $\mathcal{V}_n = I_n \cdot \mathcal{V}_{n-1}$ , où  $I_n = \int_0^\pi (\sin \theta)^n d\theta$ .
2. Vérifier que  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ .
3. Calculer  $\mathcal{V}_n$  pour  $n = 1, 2, \dots, 7$ .
4. Calculer  $\mathcal{A}_{n-1}$  pour  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. (a) cf cours.

(b) clair.

(c) Soit  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite quelconque d'ensembles  $m_*$ -mesurables. On pose  $B_1 = \emptyset$ ,  $B_2 = A_1$  et  $B_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} A_i$ , pour  $j \geq 2$ . Soit  $Q$  un sous-ensemble de  $\Omega$ . Montrons par récurrence que l'assertion  $(P_k)$  suivante est vérifiée pour tout  $k \geq 1$  :

$$(P_k) \quad m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^k m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

— Pour  $k = 1$ ,  $(P_1)$  dit simplement que  $m_*(Q) = m_*(Q \cap A_1^c) + m_*(Q \cap A_1)$ . Ceci est une conséquence de la  $m_*$ -mesurabilité de  $A_1$  et de fait que

$$m_*(Q) \leq m_*(Q \cap A_1^c) + m_*(Q \cap A_1)$$

(on applique la  $\sigma$ -sous-additivité de  $m_*$  à  $C_1 = Q \cap A_1^c$ ,  $C_2 = Q \cap A_1$  et  $C_i = \emptyset$  pour  $i \geq 3$ .)

— Montrons que  $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$  :

Puisque  $A_{k+1}$  est  $m_*$ -mesurable, on a :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}).$$

Or  $B_{k+1}^c \cap A_{k+1}^c = (B_{k+1} \cup A_{k+1})^c = B_{k+2}^c$ . Ainsi :

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) = m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}). \quad (1)$$

Supposons que l'assertion  $(P_k)$  soit vérifiée, alors

$$m_*(Q) = m_*(Q \cap B_{k+1}^c) + \sum_{j=1}^k m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j),$$

et d'après (1)

$$\begin{aligned} m_*(Q) &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + m_*(Q \cap B_{k+1}^c \cap A_{k+1}) + \sum_{j=1}^k m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &= m_*(Q \cap B_{k+2}^c) + \sum_{j=1}^{k+1} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j), \end{aligned}$$

qui n'est autre que  $(P_{k+1})$ .

— En conclusion, comme  $(P_1)$  est vrai et  $(P_k) \Rightarrow (P_{k+1})$ , il en découle que l'assertion  $(P_k)$  est vraie pour tout  $k \geq 1$ .

(d) Comme  $B_{k+1} \subset A$ , on a  $Q \cap B_{k+1}^c \supset Q \cap A^c$  et, par monotonie de  $m_*$ ,

$$m_*(Q \cap B_{k+1}^c) \geq m_*(Q \cap A^c).$$

La condition  $(P_k)$  entraîne alors que pour tout  $k$  :

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^k m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

Donc, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  :

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j).$$

(e) On a :  $Q \cap A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j)$  et par  $\sigma$ -sous-additivité de  $m_*$  :

$$\begin{aligned} m_*(Q \cap A^c) + m_*(Q \cap A) &= m_*(Q \cap A^c) + m_* \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} (Q \cap B_j^c \cap A_j) \right) \\ &\leq m_*(Q \cap A^c) + \sum_{j=1}^{\infty} m_*(Q \cap B_j^c \cap A_j) \\ &\leq m_*(Q). \end{aligned}$$

On en conclut que  $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  est  $m_*$ -mesurable.

2. (a) cf cours.

(b) Soit  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite d'éléments  $m_*$ -mesurables, deux à deux disjoints. Choisissons  $Q = A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ , alors  $Q \cap A^c = \emptyset$  et  $Q \cap B_j^c \cap A_j = A_j$  pour tout  $j$ . D'après la question 1.d),

$$m_*(Q) \geq \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

D'après la  $\sigma$ -sous-additivité de  $m_*$ , il vient :

$$m_*(Q) = \sum_{j=1}^{\infty} m_*(A_j).$$

3. Soit  $E$  un ensemble  $m_*$ -mesurable tel que  $m_*(E) = 0$  et  $B$  un sous-ensemble de  $E$ . Comme  $Q \cap B^c \subset Q$ , on a par monotonie de  $m_*$  l'inégalité  $m_*(Q \cap B^c) \leq m_*(Q)$ . Comme  $Q \cap B \subset E$ , on a aussi  $m_*(Q \cap B) = 0$ . On en déduit que

$$m_*(Q) \geq m_*(Q \cap B^c) + m_*(Q \cap B).$$

Ainsi  $B$  est  $m_*$ -mesurable et  $m$  est complète.

### Correction de l'exercice 2 ▲

Il est clair que  $m_*(\emptyset) = 0$  et que si  $A \subset B \subset \mathbb{R}$ , alors  $m_*(A) \leq m_*(B)$ , il faut donc uniquement démontrer que  $m_*$  est  $\sigma$ -sous-additive.

Soit  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , fixons  $\varepsilon > 0$  et notons  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Par définition de l'infimum, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on peut trouver une suite  $\{(a_i^n, b_i^n)\}$  telle que  $A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} ]a_i^n, b_i^n[$  et

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leq m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Comme  $A \subset \bigcup_{i,n} ]a_i^n, b_i^n[$ , on a

$$m_*(A) \leq \sum_{n,i} (b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^n - a_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (m_*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n).$$

On a donc la  $\sigma$ -sous-additivité  $m_*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_*(A_n)$  puisque  $\varepsilon$  est arbitraire.

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Il est clair que  $m_*(\emptyset) = 0$  et que  $m_*$  est monotone.

Soit maintenant  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ . Si parmi les  $A_i$  il existe au moins un ensemble  $A_j$  non vide, on a

$$m_*(\bigcup_i A_i) = 1 = m_*(A_j) \leq \sum_i m_*(A_i).$$

Si tous les  $A_i$  sont vides, alors  $\bigcup_i A_i = \emptyset$ , et donc

$$m_*\left(\bigcup_i A_i\right) = 0 = \sum_i m_*(A_i).$$

Ainsi  $m_*$  est  $\sigma$ -sous-additive et par conséquent  $m_*$  est une mesure extérieure.

2. Les seuls ensembles mesurables sont  $\emptyset$  et  $\Omega$ , puisque si  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  est tel que  $A \neq \emptyset$  et  $A \neq \Omega$ , alors, pour tout  $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$  non vide et non inclus dans  $A$ , on a  $A \cap Q \neq \emptyset$  et  $A^c \cap Q \neq \emptyset$ , et donc

$$m_*(A \cap Q) + m_*(A^c \cap Q) = 1 + 1 = 2 \neq m_*(Q) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}.$$

3. Il est clair que l'ensemble des parties  $m_*$ -mesurables de  $\Omega$ ,  $\mathcal{M}_{m_*} = \{\emptyset, \Omega\}$ , est une  $\sigma$ -algèbre.

Il est facile de voir aussi que

$$\mu = m_*|_{\mathcal{M}_{m_*}}, \mu(\emptyset) = 0, \mu(\Omega) = 1,$$

est une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{M}_{m_*})$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ . On a :

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

L'application  $\Phi : \mathbb{R}_+^* \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}$  définie par :

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme. De plus

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \geq 0\}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

car l'ensemble  $\{(x, 0), x \geq 0\}$  est négligeable. On en déduit que :

$$I^2 = \int_{r=0}^{+\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[ \frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Ainsi  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

2. Calcul de l'aire de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{S}_{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{A}_{n-1}$  son aire. D'après la question précédente, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

D'autre part, puisque l'aire de la sphère de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$  vaut  $r^{n-1} \mathcal{A}_{n-1}$ , il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \mathcal{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr.$$

En posant le changement de variable  $x = r^2$ , on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2} dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{n-1} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{n}{2}-1} dx,$$

d'où :

$$\mathcal{A}_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

3. Calcul du volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mathcal{B}_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$  la boule fermée de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$ . On note  $\mathcal{V}_n$  son volume. On a :

$$\mathcal{V}_n = \int_0^1 r^{n-1} \mathcal{A}_{n-1} dr = \mathcal{A}_{n-1} \left[ \frac{r^n}{n} \right]_0^1 = \frac{\mathcal{A}_{n-1}}{n}.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{V}_n = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Ce qui se réduit à :

$$\mathcal{V}_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

en utilisant l'identité :  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ .

4. Application : L'aire de la sphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^2$  vaut

$$\mathcal{A}_1 R = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R,$$

qui est bien le périmètre du cercle de rayon  $R$  dans le plan.

Sachant  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ , l'aire de la sphère de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^3$  vaut

$$\mathcal{A}_2 R^2 = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} R^2 = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})} R^2 = 4\pi R^2$$

qui est bien l'aire de la sphère  $S^2$ .

Le volume de la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}$  vaut

$$\mathcal{V}_1 R = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} R = 2R,$$

qui est bien la longueur du segment  $[-R, R]$ .

Le volume de la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^2$  vaut

$$\mathcal{V}_2 R^2 = \frac{2\pi}{2\Gamma(1)} R^2 = \pi R^2,$$

qui est bien l'aire du disque de rayon  $R$ .

Le volume de la boule de rayon  $R$  dans  $\mathbb{R}^3$  vaut

$$\mathcal{V}_3 R^3 = \frac{\mathcal{A}_2}{3} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## Correction de l'exercice 5 ▲

1. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_n &= \int_{\mathcal{B}_n} dx_1 \dots dx_n = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{\sum_{i=2}^n x_i^2 \leq 1-x_1^2} dx_2 \dots dx_n \\ &= \mathcal{V}_{n-1} \int_{-1}^1 \left( \sqrt{1-x_1^2} \right)^{n-1} dx_1 \end{aligned}$$

Posons  $x_1 = \cos \theta$ , pour  $\theta \in [0, \pi]$ . Alors  $\sqrt{1-x_1^2} = |\sin \theta| = \sin \theta$  et  $dx_1 = -\sin \theta d\theta$ . On a donc

$$\mathcal{V}_n = -\mathcal{V}_{n-1} \int_{\pi}^0 (\sin \theta)^n d\theta = \mathcal{V}_{n-1} \int_0^{\pi} (\sin \theta)^n d\theta = I_n \cdot \mathcal{V}_{n-1}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi (\sin \theta)^n d\theta = \int_0^\pi (\sin \theta)^{n-1} \sin \theta d\theta = \\ &= [-\cos \theta (\sin \theta)^{n-1}]_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{n-2} (\cos \theta)^2 d\theta = \\ &= (n-1) \int_0^\pi (\sin \theta)^{n-2} (1 - (\sin \theta)^2) d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n). \end{aligned}$$

Donc  $I_n = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$ .

3. On a  $I_0 = \pi$ ,  $I_1 = 2$ . Donc  $I_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_3 = \frac{4}{3}$ ,  $I_4 = \frac{3\pi}{8}$ ,  $I_5 = \frac{16}{15}$ ,  $I_6 = \frac{15\pi}{48}$ ,  $I_7 = \frac{32}{35}$ .  
Comme  $\mathcal{V}_1 = 2$  on trouve :

$$\mathcal{V}_2 = \pi, \mathcal{V}_3 = \frac{4\pi}{3}, \mathcal{V}_4 = \frac{\pi^2}{2}, \mathcal{V}_5 = \frac{8\pi^2}{15}, \mathcal{V}_6 = \frac{\pi^3}{6}, \mathcal{V}_7 = \frac{16}{105}\pi^3.$$

4. On a  $\mathcal{V}_n = \int_0^1 \int_{\mathcal{S}_{n-1}} r^{n-1} dr d\sigma = \frac{1}{n} \mathcal{A}_{n-1}$ , d'où  $\mathcal{A}_{n-1} = n \mathcal{V}_n$ . Donc on a

$$\mathcal{A}_1 = 2\pi, \mathcal{A}_2 = 4\pi, \mathcal{A}_3 = 2\pi^2, \mathcal{A}_4 = \frac{8}{3}\pi^2, \mathcal{A}_5 = \pi^3, \mathcal{A}_6 = \frac{16}{15}\pi^3.$$

---