



Intégrales généralisées et théorie de la mesure

1 Rappel

Définition. Soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ (on admet les cas où $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$). Supposons que la fonction $F(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ possède une limite I lorsque $\alpha \rightarrow a$ et $\beta \rightarrow b$. On dit alors que l'intégrale généralisée ou impropre $\int_a^b f(x) dx$ est convergente et que I est la valeur de cette intégrale.

Proposition.(Condition de Cauchy) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout segment $[a, x]$, $x > a$. Pour que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente, il faut et il suffit que l'intégrale $\int_x^{x'} f(t) dt$ tende vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$.

Théorème. Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors F est continue sur $[a, b]$. De plus, si f est continue en un point x de $[a, b]$, alors F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$.

Définition. Étant donné une fonction réelle g sur $[a, b]$, on appelle *primitive* de g sur $[a, b]$ une fonction $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que G est dérivable en tout point $x \in [a, b]$ et $G'(x) = g(x)$. Une fonction Riemann-intégrable f sur $[a, b]$ n'admet pas nécessairement de primitive, mais si f est continue sur $[a, b]$, le théorème ci-dessus assure que $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ est une primitive de f .

Théorème.(Théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) Soient Λ un espace métrique, a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors la fonction $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda) dt$ est continue.

Théorème.(Théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) Soient Λ un ouvert de \mathbb{R} , a et b deux nombres réels tels que $a < b$, et $f : [a, b] \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que la fonction f possède une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ par rapport à la deuxième variable qui soit une fonction continue sur $[a, b] \times \Lambda$. Alors la fonction $F : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda) = \int_a^b f(t, \lambda) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée vaut $F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda) dt$.

Théorème. Soit F_n est une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, qui converge uniformément vers F . Supposons que, pour tout $1 \leq j \leq k$, la suite des $j^{\text{ième}}$ dérivées $F_n^{(j)}$ converge uniformément vers une fonction g_j . Alors F est de classe \mathcal{C}^k et la dérivée $j^{\text{ième}}$ de F vaut $F^{(j)} = g_j$.

2 Intégrales généralisées

Exercice 1

1. Le but de cette question est de montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Montrer que pour $n \geq 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe $y \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(a) \int_a^y g(x) dx.$$

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$, on pose :

$$\begin{cases} f(t, \lambda) &= e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} & \text{pour } t > 0 \\ f(0, \lambda) &= 1. \end{cases}$$

- (a) Pour $0 < x \leq y$, démontrer que l'on a :

$$\left| \int_x^y f(t, \lambda) dt \right| \leq \frac{2}{x} e^{-\lambda x}.$$

- (b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geq 0$. On pose, pour $\lambda \geq 0$,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geq 0$.

- (c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente

$$F'(\lambda) = - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t dt.$$

- (d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0, x]$ et en calculant la limite quand $x \rightarrow +\infty$.

- (e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Correction ▼

[005925]

3 Théorie de la mesure

Exercice 2

Montrer que \mathcal{A} est une σ -algèbre si et seulement si \mathcal{A} est une algèbre et une classe monotone.

Correction ▼

[005926]

Exercice 3

Soit (Ω, Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$). Soit μ une mesure finie sur (Ω, Σ) . Montrer les propriétés suivantes : (A, B, A_i sont des éléments de Σ)

1. Si A_1, A_2, \dots, A_k sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^k A_i \right) = \sum_{i=1}^k \mu(A_i).$$

2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

3. *Monotonie* : Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.

4. *Principe inclusion-exclusion* : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

5. $\mu \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$. (Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.)

Correction ▼

[005927]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n \sin t$ sur $[n\pi, (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = (-1)^n [-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décroissante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(y) := \int_a^y g(x) dx$ est la primitive de g s'annulant en a . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer qu'il existe $y \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(a) \int_a^y g(x) dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a) \min_{y \in [a, b]} G(y) \leq \int_a^b F(x)g(x) dx \leq F(a) \max_{y \in [a, b]} G(y).$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x) dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x) dx.$$

avec $F(a)G(a) = 0$. Comme f est négative sur $[a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} \min_{y \in [a, b]} G(y) \int_a^b -f(x) dx &\leq - \int_a^b f(x)G(x) dx \leq \max_{y \in [a, b]} G(y) \int_a^b -f(x) dx, \\ \Leftrightarrow \min_{y \in [a, b]} G(y) (F(a) - F(b)) &\leq - \int_a^b f(x)G(x) dx \leq \max_{y \in [a, b]} G(y) (F(a) - F(b)). \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$\begin{aligned} F(b) \left(G(b) - \min_{y \in [a, b]} G(y) \right) + F(a) \min_{y \in [a, b]} G(y) &\leq \int_a^b F(x)g(x) dx \\ &\leq F(b) \left(G(b) - \max_{y \in [a, b]} G(y) \right) + F(a) \max_{y \in [a, b]} G(y). \end{aligned}$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y \in [a, b]} G(y) \geq 0$ et $G(b) - \max_{y \in [a, b]} G(y) \leq 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

3. D'après le critère de Cauchy (voir la proposition des rappels), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$. D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{1}{x} \int_x^{x'} \sin t dt$$

pour un certain $y \in [x, x']$. On en déduit que

$$\left| \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt \right| = \frac{1}{x} |\cos y - \cos x| \leq \frac{2}{x}.$$

Ainsi $\lim_{x, x' \rightarrow +\infty} \int_x^{x'} \frac{\sin t}{t} dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

4. (a) Posons pour $t > 0$, $U(t) = \frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t) = U'(t) = -\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t + 1) < 0$. Ainsi U est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0 < x \leq y$, il vient :

$$\left| \int_x^y f(t, \lambda) dt \right| = \left| \int_x^y U(t) \sin t dt \right| = \left| \frac{e^{-\lambda x}}{x} \int_x^{y'} \sin t dt \right|,$$

pour un certain $y' \in [x, y]$. On en déduit que

$$\left| \int_x^y f(t, \lambda) dt \right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

- (b) On remarque que, pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(t, \lambda)$ est continue sur $[0, x]$, donc Riemann-intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4.a), les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$ convergent uniformément en $\lambda \geq 0$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x > x_0$ et pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\left| F(\lambda) - \int_0^x f(t, \lambda) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Or, d'après la question 4.a),

$$\left| F(\lambda) - \int_0^x f(t, \lambda) dt \right| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \leq \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \leq \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ . Posons $F_n(\lambda) = \int_0^n f(t, \lambda) dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup_{\lambda \in [0, +\infty[} |F(\lambda) - F_n(\lambda)| \leq \frac{2}{n},$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[0, +\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda \mapsto F(\lambda)$ est continue en un point $\lambda_0 \in [0, +\infty[$, il faut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \varepsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et posons $x_\varepsilon = \frac{6}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned} |F(\lambda) - F(\lambda_0)| &= \left| \int_0^{x_\varepsilon} (f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)) dt + \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t, \lambda) dt - \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t, \lambda_0) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{x_\varepsilon} (f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)) dt \right| + \left| \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t, \lambda) dt \right| + \left| \int_{x_\varepsilon}^{+\infty} f(t, \lambda_0) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^{x_\varepsilon} (f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)) dt \right| + \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $|\int_0^{x_\varepsilon} (f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)) dt| < \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est garantie par la continuité de la fonction $\lambda \mapsto \int_0^{x_\varepsilon} f(t, \lambda) dt$ donnée par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels). On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x_\varepsilon} (f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0)) dt \right| &\leq \int_0^{x_\varepsilon} |(f(t, \lambda) - f(t, \lambda_0))| dt \\ &\leq \sup_{t \in [0, x_\varepsilon]} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}| \int_0^{x_\varepsilon} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt, \\ &\leq x_\varepsilon \sup_{t \in [0, x_\varepsilon]} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a :

$$\begin{aligned} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}| &= \left| e^{-\frac{(\lambda + \lambda_0)t}{2}} \left(e^{-\frac{(\lambda_0 - \lambda)t}{2}} - e^{\frac{(\lambda_0 - \lambda)t}{2}} \right) \right| \\ &\leq 2 \sinh \left(\frac{|\lambda - \lambda_0|t}{2} \right) \leq 2 \sinh \left(\frac{|\lambda - \lambda_0|x_\varepsilon}{2} \right), \end{aligned}$$

car la fonction \sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{3} \operatorname{argsinh} \left(\frac{\varepsilon^2}{36} \right)$ convient.

(c) Pour $x \in [0, +\infty[$ et $\lambda \in]0, +\infty[$, posons

$$\tilde{F}(x, \lambda) = \int_0^x f(t, \lambda) dt.$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels), la fonction \tilde{F} est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda) dt.$$

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $\tilde{F}(x, \lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4.b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geq 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \sin t dt$. On peut montrer comme dans la question 4.b) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(\lambda+h) - F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$ (écrivez l'argument ! On pourra soit utiliser le dernier théorème des rappels, soit le montrer à la main...).

(d) Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} -\int_0^x e^{-\lambda t} \sin t dt &= \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sin t \right]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cos t dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \cos t \right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \sin t dt \\ &= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \sin t dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$-\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) \int_0^x e^{-\lambda t} \sin t dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2}.$$

On en déduit que

$$F'(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\int_0^x e^{-\lambda t} \sin t dt = \frac{-1}{1 + \lambda^2}.$$

(e) De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\varepsilon}$. On a :

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &= \left| \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t} \frac{|\sin t|}{t} dt + \left| \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt \right| \\ &\leq \int_0^x e^{-\lambda t} dt + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $|\sin t| \leq t$ et la question 4.b). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1 - e^{-\lambda x}}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0$, $|F(\lambda)| < \varepsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \arctan \lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

cf Proposition 5.1. du polycopié de Marc Troyanov.

Correction de l'exercice 3 ▲

Découle directement des définitions.
