Exercices : Barbara Tumpach
Relecture : François Lescure

Intégrale de Riemann

1 Rappel

Soient f une fonction bornée et $\sigma = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. On note : $m_k = \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ et $M_k = \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$. On appelle somme de Riemann inférieure relativement à σ la quantité : $\underline{S}_f^\sigma := \sum_{k=1}^n m_k\,(a_k - a_{k-1})$. De même, la somme supérieure de Riemann de f relativement à σ est égale à $\overline{S}_f^\sigma := \sum_{k=1}^n M_k\,(a_k - a_{k-1})$. La somme inférieure de Riemann de f est définie par : $\underline{S}_f = \sup_\sigma \underline{S}_f^\sigma$. La somme supérieure de Riemann de f est définie par : $\overline{S}_f = \inf_\sigma \overline{S}_f^\sigma$.

Définition. Une fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ si $\underline{S}_f = \overline{S}_f$. L'intégrale de f sur $[a,b]$ est alors définie par : $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{S}_f = \overline{S}_f$.

Théorème. Une fonction f bornée est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que

$$\overline{S}_f^\sigma \leqslant \underline{S}_f^\sigma + \varepsilon.$$

2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

Exercice 1

En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.
3. Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.
4. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005917]

3 Quelles sont les fonctions Riemann-intégrables ?

Exercice 2

Montrer qu'une fonction *monotone* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005918]

Exercice 3

Montrer qu'une fonction *continue* sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction ▼ [005919]

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

2. Montrer que la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction ▼ [005920]

Exercice 5

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles $I_n =]a_n, b_n[$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.
2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ si et seulement si l'ensemble des points où f n'est pas continue est *négligeable*.

Correction ▼ [005921]

4 Peut-on intervertir limite et intégrale ?

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement vers une fonction f sur $]0,1]$ mais que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx \quad \neq \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

Vérifier que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas *uniforme* sur $]0,1]$.

Correction ▼ [005922]

5 Applications

Exercice 7

Montrer que, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

En déduire les limites suivantes :

$$a) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} \qquad b) \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad c) \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Correction ▼ [005923]

Exercice 8

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

2. Calculer (en utilisant 1.) les intégrales suivantes :

$$a) \quad \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \qquad\qquad b) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(1+\tan x\right)dx.$$

$$\textit{Rappel :} \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

Correction ▼ [005924]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_1 = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^{\sigma_1} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Puisque g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_2 = \{b_0 = a < b_1 < \cdots < b_p = b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_g^{\sigma_2} + \frac{\varepsilon}{2}$. On note $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{q-1} < c_q = b\}$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n\}$ par ordre croissant, puis en identifiant les points qui apparaissent plusieurs fois (on obtient une subdivision de $[a,b]$ en q intervalles avec $max\{n,p\} \leqslant q \leqslant n+p$). Puisque $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision *plus fine* que σ_1, on a :
$$\overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^{\sigma_1} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{1}$$
De même,
$$\overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_g^{\sigma_2} \quad \text{et} \quad \underline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{2}$$
De plus, sur un intervalle $]c_{k-1}, c_k[$ donné, on a :
$$\begin{aligned}\sup\{f(x)+g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} &\leqslant \sup\{f(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} \\ &\quad + \sup\{g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$
De même :
$$\begin{aligned}\inf\{f(x)+g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} &\geqslant \inf\{f(x), x \in]c_{k-1},c_k[\} \\ &\quad + \inf\{g(x), x \in]c_{k-1},c_k[\}.\end{aligned}$$
On en déduit que :
$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \overline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}, \tag{3}$$
et
$$\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{4}$$
En utilisant les inégalités (1), (2), (3) et (4), il vient alors :
$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} + \varepsilon \leqslant \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \varepsilon.$$
D'après le théorème rappelé en introduction, on en déduit que $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, de l'inégalité
$$\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \leqslant \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2},$$
on déduit que
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}\right) \leqslant \sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.$$
Or
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \left(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}\right) = \sup_{\sigma_1} \underline{S}_f^{\sigma_1} + \sup_{\sigma_2} \underline{S}_g^{\sigma_2} = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
et
$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} = \sup_{\sigma} \underline{S}_{f+g}^{\sigma} = \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$
Ainsi
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b (f(x)+g(x))\,dx.$$
De même, l'inégalité
$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leqslant \overline{S}_f^{\sigma_1} + \overline{S}_g^{\sigma_2}$$
implique $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$. En conclusion, $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

2. · Pour $\lambda = 0$ il n'y a rien a démontrer.
   · Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda > 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} = \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} = \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

   Par conséquent, $\underline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \underline{S}^\sigma_f$ et $\overline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \overline{S}^\sigma_f$. On en déduit que

$$\sup_\sigma \underline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \sup_\sigma \underline{S}^\sigma_f = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda \inf_\sigma \overline{S}^\sigma_f = \inf_\sigma \overline{S}^\sigma_{\lambda f}.$$

   En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
   · Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda < 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} = \lambda \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$$
$$\sup\{\lambda f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} = \lambda \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

   Par conséquent, $\underline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \overline{S}^\sigma_f$ et $\overline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \underline{S}^\sigma_f$. On en déduit que

$$\sup_\sigma \underline{S}^\sigma_{\lambda f} = \lambda \inf_\sigma \overline{S}^\sigma_f = \lambda \int_a^b f(x)\,dx = \lambda \sup_\sigma \underline{S}^\sigma_f = \inf_\sigma \overline{S}^\sigma_{\lambda f}.$$

   En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.
3. Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b]$, $f(t) \leqslant g(t)$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\} \leqslant \inf\{g(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

   Il en découle que

$$\sup_\sigma \underline{S}^\sigma_f \leqslant \sup_\sigma \underline{S}^\sigma_f,$$

   c'est-à-dire $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.
4. Soit $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N > 0$ tel que $\forall i > N$, $\sup_{[a,b]} |f_i(t) - f(t)| < \varepsilon$. En particulier, $f_i(t) - \varepsilon < f(t) < f_i(t) + \varepsilon$. Pour un tel i, on en déduit que pour toute subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$, on a

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i + \varepsilon \quad \text{et} \quad \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \geqslant \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \varepsilon$$

   En particulier :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant \sup_{]a_{k-1},a_k[} f_i - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f_i + 2\varepsilon.$$

   Il en découle que :

$$\overline{S}^\sigma_f - \underline{S}^\sigma_f \leqslant \overline{S}^\sigma_{f_i} - \underline{S}^\sigma_{f_i} + 2\varepsilon(b-a).$$

   Comme f_i est Riemann-intégrable, d'après le théorème de l'introduction, il existe une subdivision σ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}^\sigma_{f_i} - \underline{S}^\sigma_{f_i} \leqslant \varepsilon$. On en déduit que

$$\overline{S}^\sigma_f - \underline{S}^\sigma_f \leqslant \varepsilon\,(1 + 2(b-a)),$$

   ce qui implique que f est Riemann-intégrable.

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit f une fonction croissante $[a,b]$. Pour montrer que f est Riemann-intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, une subdivision de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a

$$\inf_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_{k-1}) \quad \text{et} \quad \sup_{]a_{k-1},a_k[} f = f(a_k).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma &= \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})\left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} \left(f(a_k) - f(a_{k-1})\right) \\
&= \left(\frac{b-a}{n}\right) \left(f(b) - f(a)\right).
\end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a,b]$ satisfait $\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma < \varepsilon$. D'autre part, si g est décroissante, $f = -g$ est croissante, donc g est Riemann-intégrable par l'exercice précédent (question 2.) avec $\lambda = -1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Une fonction f continue sur $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$|x-y| < \left(\frac{b-a}{n}\right) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $\left(\frac{b-a}{n}\right)$. On a :

$$\sup_{]a_{k-1},a_k[} f - \inf_{]a_{k-1},a_k[} f \leqslant 2\varepsilon.$$

Il vient alors :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right) \sum_{k=1}^{n} 2\varepsilon = (b-a)2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure grâce au théorème de l'introduction que f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Considérons la fonction $f\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

   Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :

$$\overline{S}_f^\sigma = 1 \quad \text{et} \quad \underline{S}_f^\sigma = 0.$$

   On en déduit que $1 = \sup_\sigma \overline{S}_f^\sigma \neq \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma = 0$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

2. Considérons la fonction $g\ : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si} \quad x = \frac{p}{q} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ ou } x = 0 \end{cases}.$$

Pour toute subdivision σ de $[a,b]$, on a :
$$\underline{S}_g^\sigma = 0.$$
Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, la fonction g prend des valeurs supérieures à $\frac{\varepsilon}{b-a}$ en un nombre fini de points seulement (les points $\frac{k}{q}$, avec $\frac{1}{q} > \frac{\varepsilon}{b-a}$ ce qui équivaut à $q < \frac{b-a}{\varepsilon}$). Notons x_i, $i = 1,\dots,p$ ces points ordonnés par ordre (strictement) croissant.
Sur $[0,1] \setminus \{x_1,\dots,x_p\}$ la fonction g prend des valeurs $\leqslant \varepsilon$ et $\geqslant 0$. Ainsi avec la subdivision $\sigma = \{x_1,\dots,x_p\}$ nous obtenons :
$$0 \leqslant \overline{S}_g^\sigma \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$
Comme On en conclut que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 5 ▲

cf André Gramain, *Intégration*, p. 7, Hermann (1998).

Correction de l'exercice 6 ▲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$. On en déduit que la suite de fonctions f_n converge ponctuellement (ou *simplement*) vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$. On a $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ mais
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 - e^{-n},$$
et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $]0,1]$, car pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\sup_{]0,-\frac{1}{n}\log\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)[} |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.
Notons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 1,\dots,n$ les points où
Soit $a_0 = a$, $a_{n+1} = b$ et $a_k = a + \frac{2k+1}{2n}$ pour $k = 1,\dots,n$.
Considérons la subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \dots < a_k < \dots < a_n = b\}$ de $[a,b]$. Cette subdivision est presque régulière, seul le premier intervalle et le dernier ont des longueurs différentes. Pour $k = 1,\dots,n-1$, x_k est le milieu de $]a_k, a_{k+1}[$.
Notons $m_k = \inf\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$ et $M_k = \sup\{f(x), x \in]a_{k-1}, a_k[\}$.
Donc pour $k = 1,\dots,n-1$ on a $m_k \leqslant f(x_k) \leqslant M_k$. Mais il faut aussi tenir compte de $f(x_n) = f(b)$ et des premiers et derniers intervalles. D'où pour la minoration :
$$\underline{S}_f^\sigma = (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k).$$
Cela donne
$$\underline{S}_f^\sigma - (m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$
Quand n tend vers $+\infty$ on trouve que $\underline{S}_f^\sigma \to \int_a^b f$ et $(m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \to 0$ cela donne l'inégalité :
$$\int_a^b f \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k).$$
La somme $\overline{S}_f^\sigma$ conduit de manière similaire à l'inégalité inverse, d'où :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{b-a}{n}\right)\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On a :

$$a)\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan\frac{k}{n} = -\log(\cos 1) \qquad b)\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$c)\quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{n}{n+k}\right)^{\frac{1}{n}} = -2\ln 2+1.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. $$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_a^b f(a+b-x)(a+b-x)'dx$$

$$= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

où $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi(x) = a+b-x$ est une fonction de classe C^1.

2. *a*)

$$I := \int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)}\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

où $\varphi : [0,\pi] \to [-1,1]$, $\varphi(x) = \cos x$ est une fonction de classe C^1.

b)

$$J := \int_0^{\pi/4}\log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4}\log\left(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)\right)dx$$

$$= \int_0^{\pi/4}\log\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)dx = \int_0^{\pi/4}\log\left(\frac{2}{1+\tan x}\right)dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - J$$

d'où la valeur de l'intégrale est $J = \frac{\pi}{8}\log 2$.
