



Surfaces

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1

Soit \mathcal{S} la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface \mathcal{S} parallèle au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .
2. Etudier localement la position relative de la surface \mathcal{S} et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface \mathcal{S} et du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

[Correction ▼](#)

[005915]

Exercice 2

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ puis vérifier que ces droites sont coplanaires.

[005916]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$ puis pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, posons $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. \mathcal{S} est la surface d'équation $z = f(x, y)$ ou encore $g(x, y, z) = 0$.

La fonction g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} g\right)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3 + 3x^2 - y \\ -x + 2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Donc, la surface \mathcal{S} est régulière et en tout point (x_0, y_0, z_0) de la surface \mathcal{S} , le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent \mathcal{P}_0 à la surface \mathcal{S} en (x_0, y_0, z_0) . Le plan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_0^3 + 3x_0^2 - y_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y_0 = 0 = x_0 \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{4} \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{8} \text{ et } x_0 = \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

On obtient ainsi les trois points $O(0, 0, 0)$, $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$ et $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{256})$.

2. La fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = (12x^2 - 6x)(-2) - 1^2 = -24x^2 + 12x - 1$$

- En O , le plan tangent est le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . De plus, $(rt - s^2)(0, 0) = -1 < 0$. Donc le point O est un point selle.
- En A , le plan tangent est aussi le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . De plus, $(rt - s^2)(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -1 < 0$. Donc le point A est un point selle.
- En B , le plan tangent est le plan d'équation $z = \frac{1}{256}$. De plus, $(rt - s^2)(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) = \frac{1}{2} > 0$. Donc la surface \mathcal{S} a une disposition en ballon au point B .

3. Il s'agit maintenant d'étudier le signe de $z = f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$ sur \mathbb{R}^2 .

$$f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2 = (x^4 - y^2) - x(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + y - x).$$

L'intersection de la surface \mathcal{S} avec le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -x^2 + x$ dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . Représentons cette intersection ainsi que le signe de $f(x, y) \oplus \ominus$.

