



## Surfaces

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

### Exercice 1

---

Soit  $\mathcal{S}$  la surface d'équation  $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$ .

1. Déterminer les plans tangents à la surface  $\mathcal{S}$  parallèle au plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
2. Etudier localement la position relative de la surface  $\mathcal{S}$  et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface  $\mathcal{S}$  et du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

[Correction ▼](#)

[005915]

### Exercice 2

---

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équation  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$  puis vérifier que ces droites sont coplanaires.

[005916]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , posons  $f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$  puis pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ .  $\mathcal{S}$  est la surface d'équation  $z = f(x, y)$  ou encore  $g(x, y, z) = 0$ .

La fonction  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}} g\right)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3 + 3x^2 - y \\ -x + 2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Donc, la surface  $\mathcal{S}$  est régulière et en tout point  $(x_0, y_0, z_0)$  de la surface  $\mathcal{S}$ , le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent  $\mathcal{P}_0$  à la surface  $\mathcal{S}$  en  $(x_0, y_0, z_0)$ . Le plan

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right) &\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_0^3 + 3x_0^2 - y_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + 1) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y_0 = 0 = x_0 \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{4} \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{8} \text{ et } x_0 = \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

On obtient ainsi les trois points  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$  et  $B(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{256})$ .

2. La fonction  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et

$$rt - s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = (12x^2 - 6x)(-2) - 1^2 = -24x^2 + 12x - 1$$

- En  $O$ , le plan tangent est le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . De plus,  $(rt - s^2)(0, 0) = -1 < 0$ . Donc le point  $O$  est un point selle.
- En  $A$ , le plan tangent est aussi le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . De plus,  $(rt - s^2)(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) = -1 < 0$ . Donc le point  $A$  est un point selle.
- En  $B$ , le plan tangent est le plan d'équation  $z = \frac{1}{256}$ . De plus,  $(rt - s^2)(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}) = \frac{1}{2} > 0$ . Donc la surface  $\mathcal{S}$  a une disposition en ballon au point  $B$ .

3. Il s'agit maintenant d'étudier le signe de  $z = f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$f(x, y) = x^4 - x^3 + xy - y^2 = (x^4 - y^2) - x(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + y - x).$$

L'intersection de la surface  $\mathcal{S}$  avec le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives  $y = x^2$  et  $y = -x^2 + x$  dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Représentons cette intersection ainsi que le signe de  $f(x, y) \oplus \ominus$ .

