Surfaces

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1

Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Déterminer les plans tangents à la surface $\mathscr{S}$ parallèle au plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
2. Etudier localement la position relative de la surface $\mathscr{S}$ et de son plan tangent en chacun des points ainsi obtenu.
3. Etudier la position relative globale de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Correction ▼ [005915]

Exercice 2

Trouver toutes les droites tracées sur la surface d'équations $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ puis vérifier que ces droites sont coplanaires. [005916]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$ puis pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, posons $g(x,y,z) = z - f(x,y)$. $\mathscr{S}$ est la surface d'équation $z = f(x,y)$ ou encore $g(x,y,z) = 0$.
La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, g\right)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x^3 + 3x^2 - y \\ -x + 2y \\ 1 \end{pmatrix} \neq \overrightarrow{0}.$$

Donc, la surface $\mathscr{S}$ est régulière et en tout point (x_0, y_0, z_0) de la surface $\mathscr{S}$, le vecteur gradient est un vecteur normal au plan tangent $\mathscr{P}_0$ à la surface $\mathscr{S}$ en (x_0, y_0, z_0). Le plan

$$\mathscr{P}_0 \text{ parallèle à } \left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4x_0^3 + 3x_0^2 - y_0 = 0 \\ -x_0 + 2y_0 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + 1) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 2y_0 \\ -y_0(32y_0^2 - 12y_0 + \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow y_0 = 0 = x_0 \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{4} \text{ et } x_0 = \frac{1}{2}) \text{ ou } (y_0 = \frac{1}{8} \text{ et } x_0 = \frac{1}{4})$$

On obtient ainsi les trois points $O(0,0,0)$, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0\right)$ et $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{256}\right)$.

2. La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

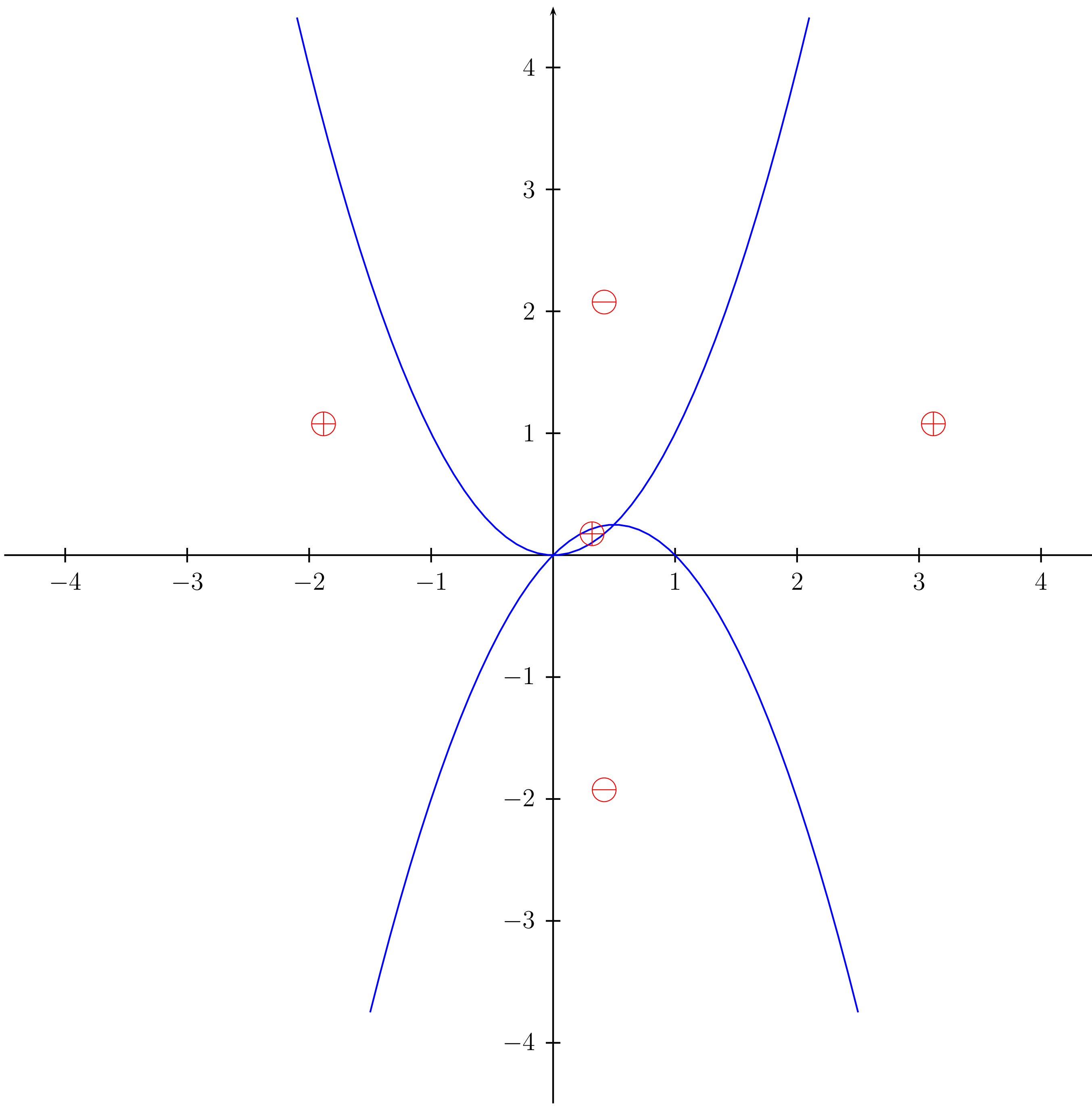
$$rt - s^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\right)^2 = (12x^2 - 6x)(-2) - 1^2 = -24x^2 + 12x - 1$$

• En O, le plan tangent est le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. De plus, $(rt - s^2)(0,0) = -1 < 0$. Donc le point O est un point selle.
• En A, le plan tangent est aussi le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. De plus, $(rt - s^2)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -1 < 0$. Donc le point A est un point selle.
• En B, le plan tangent est le plan d'équation $z = \frac{1}{256}$. De plus, $(rt - s^2)\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} > 0$. Donc la surface $\mathscr{S}$ a une disposition en ballon au point B.

3. Il s'agit maintenant d'étudier le signe de $z = f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = x^4 - x^3 + xy - y^2 = (x^4 - y^2) - x(x^2 - y) = (x^2 - y)(x^2 + y - x).$$

L'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est donc la réunion des deux paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -x^2 + x$ dans le plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. Représentons cette intersection ainsi que le signe de $f(x,y)$ $\oplus\ominus$.


−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4