

## Intégrales curvilignes, intégrales multiples

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*\*

Calculer l'intégrale de la forme différentielle  $\omega$  le long du contour orienté  $C$  dans les cas suivants :

1.  $\omega = \frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$  et  $C$  est l'arc de la parabole d'équation  $y^2 = 2x + 1$  joignant les points  $(0, -1)$  et  $(0, 1)$  parcouru une fois dans le sens des  $y$  croissants.
2.  $\omega = (x - y^3)dx + x^3dy$  et  $C$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.
3.  $\omega = xyzdx$  et  $C$  est l'arc  $x = \cos t, y = \sin t, z = \cos t \sin t, t$  variant en croissant de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

[Correction ▼](#)

[005906]

### Exercice 2 \*\*

Soit  $\omega = x^2dx + y^2dy$ . Calculer l'intégrale de  $\omega$  le long de tout cercle du plan parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Même question avec  $\omega = y^2dx + x^2dy$ .

[Correction ▼](#)

[005907]

### Exercice 3 \*\*

Calculer les intégrales multiples suivantes

1.  $I = \iint_D (x+y) dx dy$  où  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x+y \geq 1\}$ .
2.  $I = \iint_{[-1,1]^2} |x+y| dx dy$ .
3.  $I = \iint_D xy dx dy$  où  $D$  est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives  $y = x^2$  et  $x = y^2$ .
4.  $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$ .
5.  $I = \iint_{x \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^2}$ .
6.  $I = \iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz$ .
7.  $I = \iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz$ .

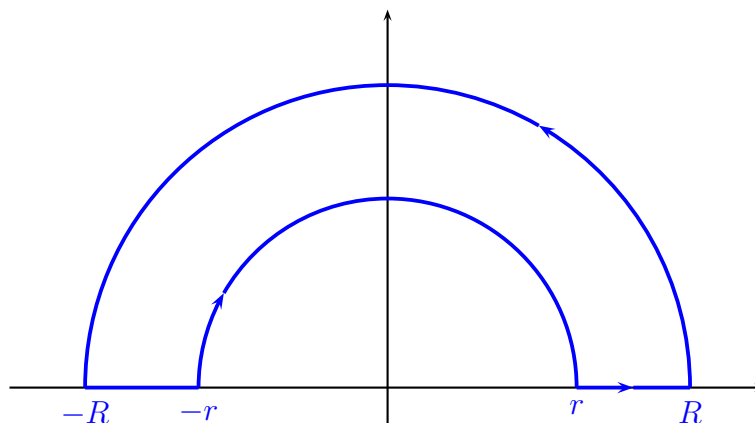
[Correction ▼](#)

[005908]

### Exercice 4 \*\*\* I

(Un calcul de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ ).

1.  $r$  et  $R$  sont deux réels strictement positifs tels que  $r < R$ . On considère le contour  $\Gamma$  orienté suivant



Calculer l'intégrale de la forme différentielle

$$\omega = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2} ((x \sin x - y \cos x)dx + (x \cos x + y \sin x)dy)$$

le long de ce contour orienté.

2. En déduire  $\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$  en fonction d'une autre intégrale.

3. En faisant tendre  $r$  vers 0 et  $R$  vers  $+\infty$ , déterminer la valeur de  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

[Correction ▼](#)

[005909]

### Exercice 5 \*\*\*

Soient  $(p_1, p_2, q_1, q_2) \in ]0, +\infty[^4$  tel que  $p_1 < p_2$  et  $q_1 < q_2$ .

Calculer l'aire du domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leq x^2 \leq 2q_1y\}$ .

[Correction ▼](#)

[005910]

### Exercice 6 \*\*\* I

Calculer le volume de  $B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$  (boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  pour  $\|\cdot\|_2$ ).

[Correction ▼](#)

[005911]

### Exercice 7 \*\*

Calculer le volume de l'intérieur de l'ellipsoïde d'équation  $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = 1$ .

[Correction ▼](#)

[005912]

### Exercice 8 \*\*\*\* Inégalité isopérimétrique

Une courbe fermée  $(C)$  est le support d'un arc paramétré  $\gamma$  de classe  $C^1$  régulier et simple. On note  $\mathcal{L}$  sa longueur et  $\mathcal{A}$  l'aire délimitée par la courbe fermée  $(C)$ . Montrer que

$$\mathcal{A} \leq \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}.$$

Pour cela, on supposera tout d'abord  $\mathcal{L} = 2\pi$  et on choisira une paramétrisation normale de l'arc. On appliquera ensuite la formule de PARSEVAL aux intégrales permettant de calculer  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{A}$  et on comparera les sommes des séries obtenues.

[Correction ▼](#)

[005913]

### Exercice 9 \*\*\*

Calculer  $I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (x^2 - y^2) dx dy$ .

[Correction ▼](#)

[005914]

## Correction de l'exercice 1 ▲

---

1.  $C$  est l'arc paramétré  $t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{2}, t\right)$ ,  $t$  variant en croissant de  $-1$  à  $1$ .

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_{-1}^1 \left( \frac{(t^2-1)/2}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} t + \frac{t}{\left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 + t^2} \right) dt \\ &= 0 \text{ (fonction impaire).}\end{aligned}$$

$$\int_C \omega = 2 \ln 2.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t)) dt = \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2 \cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t) dt = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{\sin^2(2t)}{2}\right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{4}(1 - \cos(4t))\right) dt = 2\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

$$\int_C \omega = \frac{3\pi}{2}.$$

3.

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t \cos t \sin t)(-\sin t) dt = - \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^3 t dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \cos^4 t \sin t) dt = \left[ \frac{\cos^3 t}{3} - \frac{\cos^5 t}{5} \right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \\ &= -\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

$$\int_C \omega = -\frac{2}{15}.$$

---

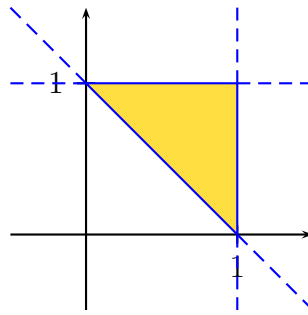
## Correction de l'exercice 2 ▲

1.  $\omega = x^2 dx + y^2 dy$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$  et est fermée car  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . On en déduit que  $\omega$  est exacte sur  $\mathbb{R}^2$  d'après le théorème de SCHWARZ. Par suite, l'intégrale de  $\omega$  le long de tout cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique est nulle.
2.  $\omega = y^2 dx + x^2 dy$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et n'est pas fermée car  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . On en déduit que  $\omega$  n'est pas exacte sur  $\mathbb{R}^2$ . L'intégrale de  $\omega$  le long d'un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique n'est plus nécessairement nulle.
- On parcourt le cercle  $C$  le cercle de centre  $(a, b)$  et de rayon  $R > 0$  une fois dans le sens trigonométrique ou encore on considère l'arc paramétré  $\gamma : t \mapsto (a + R \cos t, b + R \sin t)$ ,  $t$  variant en croissant de  $0$  à  $2\pi$ .

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} ((b + R \sin t)^2 (-R \sin t) + (a + R \cos t)^2 (R \cos t)) dt \\
&= R \int_0^{2\pi} (a \cos t - b \sin t + 2aR \cos^2 t - 2bR \sin^2 t + R^2(\cos^3 t - \sin^3 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (2a \cos^2 t - 2b \sin^2 t + R(\cos^3 t - \sin^3 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (a(1 + \cos t) - b(1 - \cos t) + R(\cos t - \sin t)(\cos^2 t + \cos t \sin t + \sin^2 t)) dt \\
&= R^2 \int_0^{2\pi} (a - b + R(\cos t - \sin t)(1 + \cos t \sin t)) dt \\
&= R^2 \left( 2\pi(b - a) + \int_0^{2\pi} R(\cos t - \sin t + \cos^2 t \sin t - \cos t \sin^2 t) dt \right) \\
&= 2\pi R^2(b - a).
\end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. Représentons le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq 1, y \leq 1, x + y \geq 1\}$ .



$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (x+y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{1-x}^1 (x+y) dy \right) dx \text{ (ou aussi } \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} (x+y) dx \right) dy) \\
&= \int_0^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \left( x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + x \right) dx = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

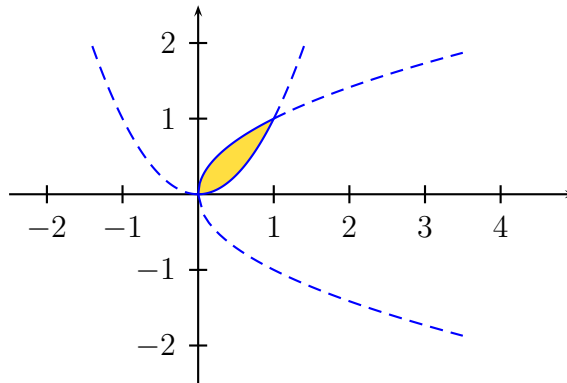
$$\boxed{\iint_D (x+y) dx dy = \frac{2}{3}.}$$

2. Si on pose pour  $(x, y) \in ]-1, 1]^2$ ,  $f(x, y) = |x+y|$  alors pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(-x, -y) = f(x, y)$  ou encore  $f$  prend les mêmes valeurs en deux points symétriques par rapport à  $O$ . Puisque le point  $O$  est centre de symétrie de  $[-1, 1]^2$ , on en déduit que

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \geq 0} f(x, y) \, dx dy + \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \leq 0} f(x, y) \, dx dy \\
&= 2 \iint_{-1 \leq x, y \leq 1, x+y \geq 0} (x+y) \, dx dy = 2 \int_{-1}^1 \left( \int_{-x}^1 (x+y) \, dy \right) dx \\
&= 2 \int_{-1}^1 \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=-x}^{y=1} dx = 2 \int_{-1}^1 \left( x + \frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= 2 \left( \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 2 \right) = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{[-1,1]^2} |x+y| \, dx dy = \frac{8}{3}.}$$

3. Représentons le domaine  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ .



$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left( \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \right) x \, dx = \int_0^1 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x(x-x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \\
&= \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

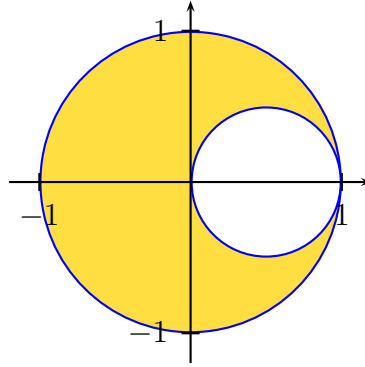
4. En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx dy = \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \frac{1}{1+r^2} r dr d\theta \\
&= \left( \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} \, dr \right) \times \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \text{ (intégrales indépendantes)} \\
&= 2\pi \times \left[ \frac{1}{2} \ln(1+r^2) \right]_0^1 = \pi \ln 2.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx dy = \pi \ln 2.}$$

5. Posons  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Puisque  $x \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}$ ,  $D$  est l'intersection de l'intérieur du disque de centre  $O$  et de rayon 1, bord compris, et de l'extérieur du disque de centre  $(\frac{1}{2}, 0)$  et de rayon  $\frac{1}{2}$ , bord compris. Soit  $M$  un point du plan. On note  $(r, \theta)$  un couple de coordonnées polaires de  $M$  tel que  $r \geq 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

$$M \in D \Leftrightarrow r \cos \theta \leq r^2 \leq 1 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } (0 < r \leq 1 \text{ et } r \geq \cos \theta).$$



En passant en polaires, on obtient

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \iint_{x \leq x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left( \int_{\cos \theta}^1 \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left( \int_0^1 \frac{r}{(1+r^2)^2} dr \right) d\theta \right) \\
 &= 2 \left( \int_0^{\pi/2} \left[ -\frac{1}{2(1+r^2)} dr \right]_{\cos \theta}^1 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[ -\frac{1}{2(1+r^2)} dr \right]_0^1 d\theta \right) \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{1+\cos^2 \theta} - \frac{1}{2} \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta} + 1} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \tan^2 \theta} d(\tan \theta) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 2} dt = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_{x \leq x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.}$$

6.

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz = \int_0^1 \left( \int_x^1 \left( \int_y^1 z dz \right) y dy \right) x dx = \int_0^1 \left( \int_x^1 \frac{1}{2} (1-y^2) y dy \right) x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \int_x^1 (y - y^3) dy \right) x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_x^1 x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right) x dx \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^1 (x^5 - 2x^3 + x) dx = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_{0 \leq x \leq y \leq z \leq 1} xyz dx dy dz = \frac{1}{48}.}$$

7. En sommant par tranches, on obtient

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz = \int_0^1 \left( \iint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1 - \sqrt{z}} dx dy \right) z dz \\
 &= \int_0^1 \left( \iint_{\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq 1} (1 - \sqrt{z})^4 du dv \right) z dz \text{ (en posant } x = (1 - \sqrt{z})^2 u \text{ et } y = (1 - \sqrt{z})^2 v) \\
 &= \mathcal{A}(D) \times \int_0^1 z (1 - \sqrt{z})^4 dz \text{ où } D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{u} + \sqrt{v} \leq 1\}.
 \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\mathcal{A}(D) = \int_0^1 \left( \int_0^{1-\sqrt{u}} dv \right) du = \int_0^1 (1 - 2\sqrt{u} + u) du = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

et

$$\int_0^1 z(1 - \sqrt{z})^4 dz = \int_0^1 (z - 4z^{3/2} + 6z^2 - 4z^{5/2} + z^3) dz = \frac{1}{2} - \frac{8}{5} + 2 - \frac{8}{7} + \frac{1}{4} = \frac{1}{140}.$$

Finalement

$$\iiint_{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq 1} z dx dy dz = \frac{1}{840}.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. La forme différentielle  $\omega$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ . D'après le théorème de SCHWARZ, sur tout ouvert étoilé  $\Omega$  contenu dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , la forme différentielle  $\omega$  est exacte si et seulement si la forme différentielle  $\omega$  est fermée.

Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , posons  $P(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \sin x - y \cos x)$  et  $Q(x,y) = \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(x \cos x + y \sin x)$ .

Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \frac{-2xe^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x \cos x + y \sin x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-x \sin x + \cos x + y \cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-2x(x \cos x + y \sin x) + (x^2+y^2)(-x \sin x + \cos x + y \cos x)) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3) \cos x + (-2xy-x^3-xy^2) \sin x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \frac{-e^{-y}}{x^2+y^2}(x \sin x - y \cos x) + \frac{-2ye^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(x \sin x - y \cos x) + \frac{e^{-y}}{x^2+y^2}(-\cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}(-(x^2+y^2)(x \sin x - y \cos x) - 2y(x \sin x - y \cos x) - (x^2+y^2) \cos x) \\ &= \frac{e^{-y}}{(x^2+y^2)^2}((-x^2+y^2+x^2y+y^3) \cos x + (-2xy-x^3-xy^2) \sin x) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y). \end{aligned}$$

Finalement, la forme différentielle  $\omega$  est exacte sur tout ouvert étoilé  $\Omega$  contenu dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

On choisit  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y), y \leq 0\}$ .  $\Omega$  est un ouvert étoilé (en tout point de la forme  $(0,y)$ ,  $y > 0$ ) de  $\mathbb{R}^2$  contenant le contour fermé  $\Gamma$ . Puisque  $\omega$  est exacte sur  $\Omega$ , on sait alors que  $\int_{\Gamma} \omega = 0$ .

2. Le contour  $\Gamma$  est constitué de 4 arcs :

- $\Gamma_1$  est l'arc  $t \mapsto (t,0)$ ,  $t$  variant en croissant de  $r$  à  $R$ ,
- $\Gamma_2$  est l'arc  $t \mapsto (R \cos t, R \sin t)$ ,  $t$  variant en croissant de  $0$  à  $\pi$ .
- $\Gamma_3$  est l'arc  $t \mapsto (t,0)$ ,  $t$  variant en croissant de  $-R$  à  $-r$ ,
- $\Gamma_4$  est l'arc  $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ ,  $t$  variant en décroissant de  $\pi$  à  $0$ .

D'après la question 1),  $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega = 0$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \omega &= \int_r^R (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)) dt = \int_r^R P(t,0) dt \\ &= \int_r^R \frac{1}{t^2} \times t \sin t dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

De même,  $\int_{\Gamma_3} \omega = \int_{-R}^{-r} \frac{\sin t}{t} dt = \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt$  (puisque la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  est paire) et donc  $\int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_3} \omega = 2 \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$  puis pour tout  $(r,R) \in ]0, +\infty[^2$  tel que  $r < R$ ,

$$\int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{1}{2} (\int_{\Gamma_2} \omega + \int_{\Gamma_4} \omega).$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \omega &= \int_0^\pi (P(R \cos t, R \sin t)(-\sin t) + Q(R \cos t, R \sin t)(\cos t)) dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t} ((\cos t \sin(R \cos t) - \sin t \cos(R \cos t))(-\sin t) + (\cos t \cos(R \cos t) + \sin t \sin(R \cos t))(\cos t)) dt \\ &= \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt. \end{aligned}$$

De même,  $\int_{\Gamma_4} \omega = \int_\pi^0 e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt = -\int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$  et on a montré que

$$\forall (r, R) \in ]0, +\infty[^2, r < R \Rightarrow \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} (\int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt - \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt).$$

3. • Etudions  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt$ . Pour  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt \right| &\leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} |\cos(R \cos t)| dt \leq \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin t} dt \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R(2t/\pi)} dt \text{ (la fonction sinus étant concave sur } [0, \frac{\pi}{2}]) \\ &= \frac{\pi}{R} [-e^{-2Rt/\pi}]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-2R}) \\ &\leq \frac{\pi}{R}. \end{aligned}$$

Comme  $\frac{\pi}{R}$  tend vers 0 quand  $R$  tend vers  $+\infty$ ,  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} \cos(R \cos t) dt = 0$ . On en déduit que pour tout  $r > 0$ , l'intégrale  $\int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  converge en  $+\infty$  et que

$$\forall r > 0, \int_r^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt.$$

• Etudions maintenant  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$ . Soit  $F : [0, +\infty[ \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Pour tout réel  $r \in [0, +\infty[$ , la fonction  $t \mapsto F(r, t)$  est continue par morceaux sur  $[0, \pi]$ .

- Pour tout réel  $t \in [0, \pi]$ , la fonction  $r \mapsto F(r, t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

- Pour tout  $(r, t) \in [0, +\infty[ \times [0, \pi]$ ,  $|F(r, t)| \leq 1 = \varphi(t)$  où  $\varphi$  est une fonction continue par morceaux et intégrable sur le segment  $[0, \pi]$ .

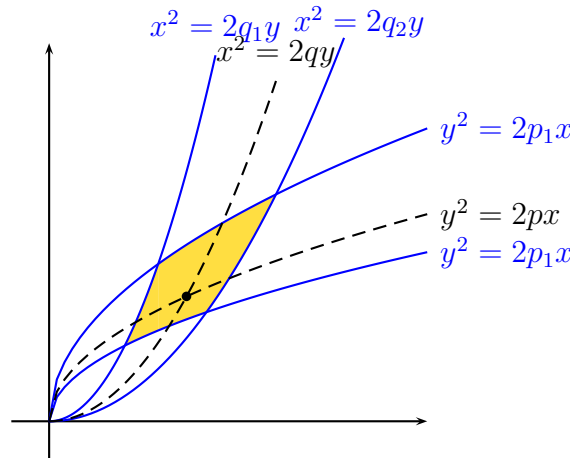
D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres, la fonction  $r \mapsto \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . On en déduit que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^\pi e^{-r \sin t} \cos(r \cos t) dt = \int_0^\pi e^0 \cos(0) dt = \pi,$$

et finalement que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$





L'aire du domaine considéré  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x \text{ et } 2q_2y \leq x^2 \leq 2q_1x\}$  est

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy.$$

Pour  $(x, y) \in D^2$ , posons  $p = \frac{y^2}{2x}$  et  $q = \frac{x^2}{2y}$  ou encore considérons l'application  $\varphi : D \rightarrow [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$   
 $(x, y) \mapsto \left(\frac{y^2}{2x}, \frac{x^2}{2y}\right)$

et vérifions que  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme.

- Pour chaque  $(x, y) \in D^2$ , on  $2p_1x \leq y^2 \leq 2p_2x$  et  $2q_1y \leq x^2 \leq 2q_2y$  ou encore  $p_1 \leq \frac{y^2}{2x} \leq p_2$  et  $q_1 \leq \frac{x^2}{2y} \leq q_2$ . Donc  $\varphi$  est bien une application.
- Soit  $(p, q) \in [p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ . Pour  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,

$$\begin{cases} \frac{y^2}{2x} = p \\ \frac{x^2}{2y} = q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{2q} \\ \frac{(x^2/2q)^2}{2x} = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{8pq^2} \\ y = \sqrt[3]{8p^2q} \end{cases}$$

Donc, l'équation  $\varphi(x, y) = (p, q)$  a exactement une solution  $(x_0, y_0)$  dans  $]0, +\infty[^2$ . De plus, puisque  $\frac{y_0^2}{2x_0} = p \in [p_1, p_2]$  et  $\frac{x_0^2}{2y_0} = q \in [q_1, q_2]$ , on a  $2p_1x_0 \leq y_0^2 \leq 2p_2x_0$  et  $2q_1y_0 \leq x_0^2 \leq 2q_2y_0$  et donc  $(x_0, y_0) \in D^2$ . Donc  $\varphi$  est une bijection.

- $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $D$  et pour  $(x, y) \in D^2$ ,

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = J(\varphi)(x, y) = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{2x^2} & \frac{y}{x} \\ \frac{x}{y} & -\frac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \neq 0.$$

Ainsi,  $\varphi$  est une bijection de  $D$  sur  $[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ , de classe  $C^1$  sur  $D$  et son jacobien ne s'annule pas sur  $D$ . On sait alors que  $\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $D$  sur  $[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]$ .

Posons alors  $(p, q) = \varphi(x, y)$  dans  $\iint_D dx dy$ . On obtient

$$\mathcal{A} = \iint_D dx dy = \iint_{[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]} \left| \frac{D(x, y)}{D(p, q)} \right| dp dq = \frac{4}{3} \iint_{[p_1, p_2] \times [q_1, q_2]} dp dq = \frac{4}{3} (p_2 - p_1)(q_2 - q_1).$$

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{4}{3} (p_2 - p_1)(q_2 - q_1).}$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $R \geq 0$ , posons  $B_n(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\}$  et notons  $V_n(R)$  le volume de  $B_n(R)$ . Par définition,

$$V_n(R) = \int \dots \iint_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n.$$

En posant  $x_1 = Ry_1, \dots, x_n = Ry_n$ , on a  $\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = R^n$  (quand  $R > 0$ ) puis

$$V_n(R) = \int \dots \iint_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n = R^n \int \dots \iint_{y_1^2 + \dots + y_n^2 \leq 1} dy_1 \dots dy_n = R^n V_n(1).$$

ce qui reste vrai quand  $R = 0$ . Pour  $n \geq 2$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \int_{-1}^1 \left( \int \dots \iint_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \right) dx_n = \int_{-1}^1 V_{n-1} \left( \sqrt{1 - x_n^2} \right) dx_n \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{(n-1)/2} V_{n-1}(1) dx_n = I_n V_{n-1}(1) \end{aligned}$$

où  $I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{(n-1)/2} dx$ . Pour calculer  $I_n$ , on pose  $x = \cos \theta$ . On obtient

$$I_n = \int_{\pi}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{(n-1)/2} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = 2W_n \text{ (intégrales de WALLIS).}$$

Finalement,

$$V_1(1) = 2 \text{ et } \forall n \geq 2, V_n(1) = 2W_n V_{n-1}(1).$$

On en déduit que pour  $n \geq 2$ ,

$$V_n(1) = (2W_n)(2W_{n-1}) \dots (2W_2)V_1(1) = 2^n \prod_{k=2}^n W_k = 2^n \prod_{k=1}^n W_k,$$

ce qui reste vrai pour  $n = 1$ . Maintenant, il est bien connu que la suite  $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante et plus précisément que  $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$ . Donc, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$V_{2p}(1) = 2^{2p} \prod_{k=1}^{2p} W_k = 2^{2p} \prod_{k=1}^p (W_{2k-1}W_{2k}) = 2^{2p} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k)} = \frac{\pi^p}{p!},$$

et de même

$$\begin{aligned} V_{2p+1}(1) &= 2^{2p+1} \prod_{k=2}^{2p+1} W_k = 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p (W_{2k}W_{2k+1}) = 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k+1)} \\ &= \frac{\pi^p 2^{2p+1}}{3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} (2p) \times (2p-2) \times \dots \times 2}{(2p+1)!} = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p!}{(2p+1)!}. \end{aligned}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall R > 0, V_{2p}(R) = \frac{\pi^p R^{2p}}{p!} \text{ et } V_{2p-1}(R) = \frac{\pi^p 2^{2p+1} p! R^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

En particulier,  $V_1(R) = 2R, V_2(R) = \pi R^2$  et  $V_3(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$ .

### Correction de l'exercice 7 ▲

**1ère solution.**  $V = \iiint_{x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz \leq 1} dx dy dz$ . Or  $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz = \left(x + \frac{z}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$ . On pose donc  $u = x + \frac{z}{2}, v = \frac{y}{\sqrt{2}}$  et  $w = \frac{z}{\sqrt{2}}$ .

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que  $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = 2$  puis que

$$V = \iiint_{x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz \leq 1} dx dy dz = \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq 1} \left| \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \right| du dv dw = 2 \times \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

**2ème solution.** Supposons savoir que le volume délimité par l'ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  est  $\frac{4}{3}\pi abc$ . La matrice de la forme quadratique  $(x,y,z) \mapsto x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{4}z^2 + xz$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^3$

est  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ . On sait que cette matrice a 3 valeurs propres strictement positives  $\lambda = \frac{1}{a^2}$ ,  $\mu = \frac{1}{b^2}$  et

$\nu = \frac{1}{c^2}$  puis qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'ellipsoïde a pour équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Le volume de l'ellipsoïde est alors

$$V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\lambda\mu\nu}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\det(A)}} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{8\pi}{3}$$

$$V = \frac{8\pi}{3}.$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

Supposons tout d'abord que le support de l'arc  $\gamma$  est de longueur  $L = 2\pi$ . Puisque  $\gamma$  est un arc de classe  $C^1$  régulier, on peut choisir pour  $\gamma$  une paramétrisation normale c'est-à-dire une paramétrisation de classe  $C^1$   $t \mapsto (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , telle que  $\forall t \in [0, 2\pi]$ ,  $x'^2(t) + y'^2(t) = 1$ . L'arc étant fermé, on a de plus  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ . Cette dernière condition permet de prolonger les fonctions  $x$  et  $y$  en des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodiques.

Puisque les fonctions  $x'$  et  $y'$  sont continues par morceaux sur  $\mathbb{R}$ , la formule de PARSEVAL permet d'écrire

$$\begin{aligned} L = 2\pi &= \int_0^{2\pi} 1 dt = \int_0^{2\pi} (x'^2(t) + y'^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} x'^2(t) dt + \int_0^{2\pi} y'^2(t) dt \\ &= \pi \left( \frac{a_0^2(x')}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x')) + \frac{a_0^2(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \\ &= \pi \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x') + b_n^2(x') + a_n^2(y') + b_n^2(y')) \right) \left( a_0(x') = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x'(t) dt = \frac{1}{\pi} (x(2\pi) - x(0)) = 0 = a_0(y') \right) \\ &\quad \pi \left( \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (a_n^2(x) + b_n^2(x) + a_n^2(y) + b_n^2(y)) \right). \end{aligned}$$

D'autre part, d'après la formule de GREEN-RIEMANN

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{\gamma} x dy = \int_0^{2\pi} x(t) y'(t) dt = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} ((x(t) + y'(t))^2 - (x(t) - y'(t))^2) dt \\ &= \frac{\pi}{4} \left( \frac{a_0^2(x+y')}{2} - \frac{a_0^2(x-y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(x+y') - a_n^2(x-y') + b_n^2(x+y') - b_n^2(x-y')) \right) \\ &= \pi \left( \frac{a_0(x) a_0(y')}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(x) a_n(y') + b_n(x) b_n(y')) \right) \quad (\text{par linéarité des coefficients de FOURIER}) \\ &= \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n (a_n(x) b_n(y) - b_n(x) a_n(y)) \\ &\leq \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2} (a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) = \frac{\mathcal{L}}{2} \times \frac{\mathcal{L}}{\pi} = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Si on a l'égalité, alors les inégalités valables pour  $n \geq 1$ ,

$$n(a_n(x)b_n(y) - b_n(x)a_n(y)) \leq n \times \frac{1}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)) \leq \frac{n^2}{2}(a_n^2(x) + b_n^2(y) + b_n^2(x) + a_n^2(y)),$$

sont des égalités. En particulier, pour  $n \geq 2$ , on a  $a_n(x) = a_n(y) = b_n(x) = b_n(y) = 0$ . D'autre part, quand  $n = 1$ ,  $a_1(x)b_1(y) - b_1(x)a_1(y) = \frac{1}{2}(a_1^2(x) + b_1^2(y) + b_1^2(x) + a_1^2(y))$  impose  $(a_1(x) - b_1(y))^2 + (b_1(x) + a_1(y))^2 = 0$  et donc  $a_1(y) = -b_1(x)$  et  $b_1(y) = a_1(x)$ .

D'après le théorème de DIRICHLET, en posant  $\alpha = \frac{a_0(x)}{2}$ ,  $\beta = \frac{a_0(y)}{2}$ ,  $a = a_1(x)$  et  $b = b_1(x)$ ,

$$\forall t \in [0, 2\pi], \begin{cases} x(t) = \alpha + a \cos t + b \sin t = \alpha + \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - t_0) \\ y(t) = \beta - b \cos t + a \sin t = \beta + \sqrt{a^2 + b^2} \sin(t - t_0) \end{cases}$$

où  $\cos(t_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  et  $\sin(t_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Le support de l'arc  $\gamma$  est donc un cercle. La réciproque est claire.

L'inégalité isopérimétrique est donc démontrée dans le cas où  $L = 2\pi$  et on a l'égalité si et seulement si le support de l'arc  $\gamma$  est un cercle. Dans le cas où la longueur de la courbe  $C$  est un réel strictement positif  $\mathcal{L}$  quelconque, l'homothétique ( $C'$ ) de ( $C$ ) dans l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\frac{2\pi}{\mathcal{L}}$  a une longueur  $\mathcal{L}'$  égale à  $2\pi$  et délimite une aire  $\mathcal{A}' = \left(\frac{2\pi}{\mathcal{L}}\right) \times \mathcal{A}$ .

L'inégalité  $\mathcal{A}' \leq \frac{\mathcal{L}'^2}{2\pi} = 2\pi$  s'écrit encore  $\mathcal{A} \leq 2\pi \times \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi^2} = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi}$ . De plus on a l'égalité si et seulement si la courbe ( $C$ ) est un cercle (dans ce cas,  $\frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2 = \mathcal{A}$ ).

$$\mathcal{A} \leq \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} \text{ avec égalité si et seulement si la courbe } (C) \text{ est un cercle.}$$

(A périmètre donné, le cercle est la courbe fermée délimitant la plus grande aire)

### Correction de l'exercice 9 ▲

On pose déjà  $u = xa$  et  $v = yb$  de sorte que  $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = ab$ . On obtient

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (x^2 - y^2) dx dy = ab \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (a^2 u^2 - b^2 v^2) du dv.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} u^2 du dv &= \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} v^2 du dv = \frac{1}{2} \iint_{u^2 + v^2 \leq 1} (u^2 + v^2) du dv = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{r=1} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2 \times r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 2\pi = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

et donc

$$I = \frac{\pi ab(a^2 - b^2)}{4}.$$