Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1. $\frac{xy}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en $(0,0)$
3. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ en $(0,0)$
4. $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$ en $(0,0)$
5. $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$ en $(0,0)$
6. $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$ en $(0,0)$
7. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(0,0,0)$
8. $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$ en $(2,-2,0)$

Correction ▼ [005887]

Exercice 2 *** I

Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on pose $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 \text{ si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Montrer que f est de classe C^1 (au moins) sur $\mathbb{R}^2$.

Correction ▼ [005888]

Exercice 3 *** I

Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0\\ 0 \text{ si } y=0\end{cases}$.

Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1. Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents.

Correction ▼ [005889]

Exercice 4 **

Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (e^x-e^y, x+y)\end{array}$ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

Correction ▼ [005890]

Exercice 5 ***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $y^{2n+1}+y-x=0$ définit implicitement une fonction φ sur $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2),\ [y^{2n+1}+y-x=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)]$.
Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\int_0^2 \varphi(t)\,dt$.

Correction ▼ [005891]

Exercice 6 ***

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité $e^{x+y}+y-1=0$.

Correction ▼ [005892]

Exercice 7 *

Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que f est positivement homogène de degré r (r réel donné) si et seulement si $\forall \lambda \in]0,+\infty[$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(\lambda x)=\lambda^r f(x)$.
Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = rf(x).$$

Correction ▼ [005893]

Exercice 8 ** I

Extremums des fonctions suivantes :

1. $f(x,y)=x^3+3x^2y-15x-12y$
2. $f(x,y)=-2(x-y)^2+x^4+y^4$.

Correction ▼ [005894]

Exercice 9 *** I

Soit $f : \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{array}$. Montrer que f est différentiable en tout point de $M_n(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ et déterminer sa différentielle.

Correction ▼ [005895]

Exercice 10 *

Déterminer $\text{Max}\{|\sin z|,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant 1\}$.

Correction ▼ [005896]

Exercice 11 **

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1. $\omega=(2x+2y+e^{x+y})(dx+dy)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\omega=\frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}$ sur $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \ y>x\}$
3. $\omega=\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}-ydy$
4. $\omega=\frac{1}{x^2y}dx-\frac{1}{xy^2}dy$ sur $(]0,+\infty[)^2$ (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de x^2+y^2).

Correction ▼ [005897]

Exercice 12 *** I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en posant $u = x+y$ et $v = x+2y$.
2. $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en passant en polaires.
3. $x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ en posant $x = u$ et $y = uv$.

Correction ▼ [005898]

Exercice 13 **

Déterminer la différentielle en tout point de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x.y \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x\wedge y \end{array}$.

Correction ▼ [005899]

Exercice 14 **

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $B = \{x \in E / \ \|x\| < 1\}$. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$ est un homéomorphisme.

Correction ▼ [005900]

Exercice 15 **

$E = \mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et préciser df. Montrer que f n'est pas différentiable en 0.

Correction ▼ [005901]

Exercice 16 ***

Maximum du produit des distances d'un point M intérieur à un triangle ABC aux cotés de ce triangle.

Correction ▼ [005902]

Exercice 17 *

Minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2+(y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2+y^2}$, a réel donné.

Correction ▼ [005903]

Exercice 18 ***

Trouver une application non constante $f\ :]-1,1[\to\mathbb{R}$ de classe C^2 telle que l'application g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\mathrm{ch}(2y)}\right)$ ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de g est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$. Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

Correction ▼ [005904]

Exercice 19 *** I

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que f est une rotation affine.

Correction ▼ [005905]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$. Quand x tend vers 0, le couple $(x,0)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,0)$ tend vers 0. Donc, si f a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{1}{2}$. Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $\frac{1}{2} \neq 0$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

2. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $(x,y) \neq (0,0)$, $|f(x,y)| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{|xy|}{x^2+y^2} \times |xy| \leqslant \frac{1}{2}|xy|$. Comme $\frac{1}{2}|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, il en est de même de f. $f(x,y)$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

3. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $y \neq 0$, $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$. Quand y tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(0,y)$ tend vers le couple $(0,0)$ et $f(0,y)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

4. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$.Quand x tend vers 0, le couple (x,x) tend vers le couple $(0,0)$ et $f(x,x)$ tend vers $+\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

5. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple $(x,-x+x^3)$ tend vers $(0,0$ et $f(x,-x+x^3)$ tend vers $-\infty$. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

6. f est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in \mathbb{R}\}$.

   $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$ et donc f tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

7. f est définie sur $\mathbb{R}^3$ privé du cône de révolution d'équation $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

   $f(x,0,0) = \frac{1}{x}$ qui tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc f n'a pas de limite réelle en $(0,0,0)$.

8. $f(2+h,-2+k,l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$. $g(h,0,0)$ tend vers $\frac{1}{4}$ quand h tend vers 0 et $g(0,0,l)$ tend vers $0 \neq \frac{1}{4}$ quand l tend vers 0. Donc, f n'a pas de limite réelle quand (x,y,z) tend vers $(2,-2,0)$.

Correction de l'exercice 2 ▲

• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
• **Continuité en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leqslant |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme $|xy|$ tend vers 0 quand le couple (x,y) tend vers le couple $(0,0)$, on a donc $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$.

On en déduit que f est continue en $(0,0)$ et finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$f \text{ est de classe } C^0 \text{ au moins sur } \mathbb{R}^2.$$

• **Dérivées partielles d'ordre** 1 **sur** $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$**.** f est de classe C^1 au moins sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ et pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour $(x,y)\neq(0,0)$ $f(x,y)=-f(y,x)$. Donc pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

• **Existence de** $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$**.** Pour $x\neq 0$,

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\frac{0-0}{x}=0,$$

et donc $\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$. Ainsi, f admet des dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ définies par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\\ 0\text{ si }(x,y)=(0,0)\end{cases}\quad\text{et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}\text{ si }(x,y)\neq(0,0)\\ 0\text{ si }(x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

• **Continuité de** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **en** $(0,0)$**.** Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|=\frac{|y||x^4+4x^2y^2-y^4|}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{x^4+4x^2y^2+y^4}{(x^2+y^2)^2}\leqslant|y|\frac{2x^4+4x^2y^2+2y^4}{(x^2+y^2)^2}=2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$, on en déduit que $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right|$ tend vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. Donc la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et finalement sur $\mathbb{R}^2$. Il en est de même de la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ et on a montré que

$$\boxed{f\text{ est au moins de classe }C^1\text{ sur }\mathbb{R}^2.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

On pose $D=\{(x,0),\ x\in\mathbb{R}\}$ puis $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus D$.
• f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
• f est de classe C^1 sur Ω en vertu de théorèmes généraux et pour $(x,y)\in\Omega$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

• Etudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour $(x,y)\neq(0,0)$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\begin{cases}y^2\left|\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right|\text{ si }y\neq 0\\ 0\text{ si }y=0\end{cases}\leqslant\begin{cases}y^2\text{ si }y\neq 0\\ 0\text{ si }y=0\end{cases}\leqslant y^2.$$

Comme y^2 tend vers 0 quand (x,y) tend vers 0, $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\neq(0,0)}}f(x,y)=f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$ puis

$$f\text{ est continue sur }\mathbb{R}^2.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $x\neq x_0$,

$$\frac{f(x,0)-f(x_0,0)}{x-x_0}=\frac{0-0}{x-x_0}=0.$$

Donc $\frac{f(x,x_0)-f(x_0,0)}{x-x_0}$ tend vers 0 quand x tend vers x_0. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\left\{\begin{array}{l} y\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{array}\right. .$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}=\frac{y^2\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y}=y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que $\left|\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}\right|\leqslant |y|$ puis que $\frac{f(x_0,y)-f(x_0,0)}{y-0}$ tend vers 0 quand y tend vers 0. Par suite, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=0$. Finalement, la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left\{\begin{array}{l} 2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{array}\right. .$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l} |y|\left|\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{array}\right. \leqslant |y|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ quand (x,y) tend vers $(x_0,0)$. La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est donc continue en $(x_0,0)$ et finalement

$$\text{la fonction } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2.$$

• Etudions la continuité de $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x_0,0)$, x_0 réel donné. Supposons tout d'abord $x_0=0$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right|=\left\{\begin{array}{l} \left|2y\sin\left(\frac{x}{y}\right)-x\cos\left(\frac{x}{y}\right)\right| \text{ si } y\neq 0 \\ 0 \text{ si } y=0 \end{array}\right. \leqslant 2|y|+|x|.$$

Quand (x,y) tend vers $(0,0)$, $|x|+2|y|$ tend vers 0 et donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ tend vers $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.
Supposons maintenant $x_0\neq 0$. Pour $y\neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)=2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)-x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$. Quand y tend vers 0, $2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$ tend vers 0 car $\left|2y\sin\left(\frac{x_0}{y}\right)\right|$ et $x_0\cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ n'a pas de limite réelle car $x_0\neq 0$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y)$ n'a pas de limite quand y tend vers 0 et la fonction $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(x_0,0)$ si $x_0\neq 0$. On a montré que

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \Omega\cup\{(0,0)\}.$$

• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$. Pour $x\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}=\frac{0-0}{x}=0.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)=0$.
• Etudions l'existence et la valeur éventuelle de $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$. Pour $y\neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}=\frac{y\cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y}=1.$$

Donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existe et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)=1$. On a montré que $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ, f n'est pas de classe C^2 sur $\Omega\cup\{(0,0)\}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,y)=(z,t) &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x-e^y=z \\ x+y=t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ e^x-e^{t-x}=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ (e^x)^2-ze^x-e^t=0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=t-x \\ e^x=z-\sqrt{z^2+4e^t} \text{ ou } e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t} \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} e^x=z+\sqrt{z^2+4e^t} \\ y=t-x \end{array}\right. \quad (\text{car } z-\sqrt{z^2+4e^t}<z-\sqrt{z^2}=z-|z|\leqslant 0) \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t}) \\ y=t-\ln(z+\sqrt{z^2+4e^t}) \end{array}\right. \quad (\text{car } z+\sqrt{z^2+4e^t}>z+\sqrt{z^2}=z+|z|\geqslant 0).
\end{aligned}$$

Ainsi, tout élément $(z,t)\in\mathbb{R}^2$ a un antécédent et un seul dans $\mathbb{R}^2$ par φ et donc φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
La fonction φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de jacobien $J_\varphi(x,y)=\begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=e^x+e^y$. Le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. En résumé, φ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et le jacobien de φ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors que

$$\boxed{\varphi \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme de } \mathbb{R}^2 \text{ sur lui-même.}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y),\lim_{y\to+\infty} f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.
La fonction $f:(x,y)\mapsto y^{2n+1}+y-x$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2n+1)y^{2n}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi(x)-x=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n}+\varphi'(x)-1=0$ et donc

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n}+1}.$$

Montrons par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
- C'est vrai pour $p=1$.
- Soit $p\geqslant 1$. Supposons que la fonction φ soit p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction $\varphi'=\frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n}+1}$ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant qu'inverse d'une fonction p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$. On en déduit
que la fonction φ est $p+1$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a montré par récurrence que $\forall p\in\mathbb{N}^*$, la fonction φ est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc que

$$\boxed{\text{la fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Calculons maintenant $I=\int_0^2 \varphi(t)\,dt$. On note tout d'abord que, puisque $0^{2n+1}+0-0=0$, on a $\varphi(0)=0$ et puisque $1^{2n+1}+1-2=0$, on a $\varphi(2)=1$.
Maintenant, pour tout réel x de $[0,2]$, on a $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}+\varphi'(x)\varphi(x)-x\varphi'(x)=0$ (en multipliant par $\varphi'(x)$ les deux membres de l'égalité définissant $\varphi(x)$) et en intégrant sur le segment $[0,2]$, on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx=0\ (*).$$

Or, $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^2=\frac{1}{2n+2}$. De même, $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\left[\frac{(\varphi(x))^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{2}$ et donc $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1}\,dx+\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2}=\frac{n+2}{2n+2}$. D'autre part, puisque les deux fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\varphi(x)$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,2]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$-\int_0^2 x\varphi'(x)\,dx=[-x\varphi(x)]_0^2+\int_0^2 \varphi(x)\,dx=-2+I.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit donc $\frac{n+2}{2n+2}-2+I=0$ et on obtient $I=\frac{3n+2}{2n+2}$.

$$\boxed{\int_0^2 \varphi(x)\,dx=\frac{3n+2}{2n+2}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $x\in\mathbb{R}$. La fonction $f_x : y\mapsto e^{x+y}+y-1$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]\lim_{y\to-\infty} f_x(y),\lim_{y\to+\infty} f_x(y)[=\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $f_x(y)=0$ a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$ que l'on note $\varphi(x)$.
La fonction $f:(x,y)\mapsto e^{x+y}+y-1$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et de plus, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}+1\neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction φ implicitement définie par l'égalité $f(x,y)=0$ est dérivable en tout réel x et de plus, en dérivant l'égalité $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}$, $(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}+\varphi'(x)=0$ ou encore

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi'(x)=-\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1}\ (*).$$

On en déduit par récurrence que φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.
1ère solution. Puisque $e^{0+0}+0-1=0$, on a $\varphi(0)=0$. L'égalité $(*)$ fournit alors $\varphi'(0)=-\frac{1}{2}$ et on peut poser $\varphi(x)\underset{x\to0}{=}-\frac{1}{2}x+ax^2+bx^3+o(x^3)$. On obtient

$$\begin{aligned}
e^{x+\varphi(x)} &\underset{x\to0}{=} e^{\frac{x}{2}+ax^2+bx^3+o(x^3)}\\
&\underset{x\to0}{=} 1+\left(\frac{x}{2}+ax^2+bx^3\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+ax^2\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to0}{=} 1+\frac{x}{2}+\left(a+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}\right)x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

L'égalité $e^{x+\varphi(x)}+\varphi(x)-1=0$ fournit alors $a+\frac{1}{8}+a=0$ et $b+\frac{a}{2}+\frac{1}{48}+b=0$ ou encore $a=-\frac{1}{16}$ et $b=\frac{1}{192}$.
2ème solution. On a déjà $\varphi(0)=0$ et $\varphi'(0)=0$. En dérivant l'égalité $(*)$, on obtient

$$\varphi''(x)=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1)-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}=-\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2},$$

et donc $\frac{\varphi''(0)}{2}=-\frac{\frac{1}{2}}{2\times2^2}=-\frac{1}{16}$. De même,

$$\varphi^{(3)}(x)=-\varphi''(x)\frac{e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}-(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{(1+\varphi'(x))}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^2}+(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}\frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{\left(e^{x+\varphi(x)}+1\right)^3},$$

et donc $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{8}\times\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times\frac{1/2}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{192}$. La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

On dérive par rapport à λ les deux membres de l'égalité $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ et on obtient

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda > 0,\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r\lambda^{r-1} f(x),$$

et pour $\lambda = 1$, on obtient

$$\forall x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Donc si f admet un extremum local en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f.

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^2+6xy-15=0 \\ 3x^2-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=\frac{1}{4} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-\frac{1}{4} \end{array}\right. .$$

Réciproquement, $r = 6x+6y$, $t = 0$ et $s = 6x$ puis $rt - s^2 = -36x^2$. Ainsi, $(rt-s^2)\left(2,\frac{1}{4}\right) = (rt - s^2)\left(-2,-\frac{1}{4}\right) = -144 < 0$ et f n'admet pas d'extremum local en $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ ou $\left(-2,-\frac{1}{4}\right)$.

$$\boxed{f \text{ n'admet pas d'extremum local sur } \mathbb{R}^2.}$$

2. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si f admet un extremum local en $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, (x_0,y_0) est un point critique de f. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -4(x-y)+4x^3=0 \\ 4(x-y)+4y^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^3+y^3=0 \\ -4(x-y)+4x^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-x \\ x^3-2x=0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{(0,0), \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right), \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\right\}.$$

Réciproquement, f est plus précisément de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et

$$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4+12x^2)(-4+12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

• $(rt-s^2)\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 48(12-2-2) > 0$. Donc f admet un extremum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. Plus précisément, puisque $r\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) = 2\times 12 - 4 = 20 > 0$, f admet un minimum local en $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\ &\geqslant x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2+y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

et $f\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ est un minimum global.

• Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(-x,-y)=f(x,y)$ et donc f admet aussi un minimum global en $\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ égal à 8.

• $f(0,0)=0$. Pour $x\neq 0$, $f(x,x)=2x^4>0$ et donc f prend des valeurs strictement supérieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Pour $x\in\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[\setminus\{0\}$, $f(x,0)=x^4-2x^2=x^2(x^2-2)<0$ et f prend des valeurs strictement inférieures à $f(0,0)$ dans tout voisinage de $(0,0)$. Finalement, f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.

$$\boxed{f \text{ admet un minimum global égal à 8, atteint en } \left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \text{ et } \left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right).}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative $\|\ \|$. Soit $A\in GL_n(\mathbb{R})$. On sait que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et donc pour $H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de norme suffisamment petite, $A+H\in GL_n(\mathbb{R})$. Pour un tel H

$$(A+H)^{-1}-A^{-1}=(A+H)^{-1}(I_n-(A+H)A^{-1})=-(A+H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned}(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}&=-(A+H)^{-1}HA^{-1}+A^{-1}HA^{-1}=(A+H)^{-1}(-HA^{-1}+(A+H)A^{-1}HA^{-1})\\&=(A+H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}.\end{aligned}$$

Par suite, $\left\|f(A+H)-f(A)+A^{-1}HA^{-1}\right\|=\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\|\leqslant\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|^2$. Maintenant, la formule $M^{-1}=\frac{1}{\det(M)}{}^t(\mathrm{com}(M))$, valable pour tout $M\in GL_n(\mathbb{R})$, et la continuité du déterminant montre que l'application $M\mapsto M^{-1}$ est continue sur l'ouvert $GL_n(\mathbb{R})$. On en déduit que $\left\|(A+H)^{-1}\right\|$ tend vers $\left\|A^{-1}\right\|$ quand H tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H\to 0}\left\|(A+H)^{-1}\right\|\left\|A^{-1}\right\|^2\|H\|=0 \text{ et donc } \lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\left\|(A+H)^{-1}-A^{-1}+A^{-1}HA^{-1}\right\|=0.$$

Comme l'application $H\mapsto -A^{-1}HA^{-1}$ est linéaire, c'est la différentielle de f en A.

$$\boxed{\forall A\in GL_n(\mathbb{R}),\ \forall H\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ df_A(H)=-A^{-1}HA^{-1}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout complexe z tel que $|z|\leqslant 1$,

$$|\sin(z)|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!}=\mathrm{sh}(|z|)\leqslant\mathrm{sh}\,1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour $z=i$ car $|\sin(i)|=\left|\frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i}\right|=\frac{e-e^{-1}}{2}=\mathrm{sh}(1)$.

$$\boxed{\mathrm{Max}\{|\sin z|,\ z\in\mathbb{C},\ |z|\leqslant 1\}=\mathrm{sh}(1).}$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $P(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} = Q(x,y)$. Les fonctions P et Q sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et comme $\frac{\partial P}{\partial y} = 2+e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, la forme différentielle ω est une forme différentielle exacte sur $\mathbb{R}^2$.

   Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x+2y+e^{x+y} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = x^2+2xy+e^{x+y}+g(y) \\ 2x+e^{x+y}+g'(y) = 2x+2y+e^{x+y} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = x^2+2xy+e^{x+y}+g(y) \\ g(y) = y^2+\lambda \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ f(x,y) = (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda.
\end{aligned}$$

   Les primitives de ω sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto (x+y)^2+e^{x+y}+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Remarque. On pouvait aussi remarquer immédiatement que si $f(x,y) = (x+y)^2+e^{x+y}$ alors $df = \omega$.

2. La forme différentielle ω est de classe C^1 sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ y > x\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$ car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ, ω est exacte sur Ω si et seulement si ω est fermée sur Ω.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x-y}+y\frac{1}{(x-y)^2}\right) = -\frac{1}{(x-y)^2}-\frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3}$.

   $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{(x-y)^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{y-x}-x\frac{1}{(y-x)^2}\right) = \frac{1}{(y-x)^2}+\frac{2x}{(y-x)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{(x-y)^2}\right)$.

   Donc ω est exacte sur l'ouvert Ω. Soit f une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \Omega, \left\{ \begin{array}{l} f(x,y) = \frac{y}{x-y}+g(y) \\ \frac{x}{(x-y)^2}+g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall (x,y) \in \Omega, \ f(x,y) = \frac{y}{x-y}+\lambda.
\end{aligned}$$

   Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{y}{x-y}+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. ω est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0),\ x \in]-\infty,0]\}$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Sur Ω, ω est exacte si et seulement si ω est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}-y\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Donc ω est exacte sur Ω. Soit f une application de classe C^1 sur Ω.

$$\begin{aligned}
df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \Omega, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}-y \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \Omega, \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+g(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2}+g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}-y \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall (x,y) \in \Omega, \ f(x,y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda.
\end{aligned}$$

Les primitives de ω sur Ω sont les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2)-y^2)+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de ω sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et donc ω est exacte sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

4. ω est de classe C^1 sur $]0,+\infty[^2$ qui est un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^2$. Donc ω est exacte sur $]0,+\infty[^2$ si et seulement si ω est fermée sur $]0,+\infty[^2$ d'après le théorème de SCHWARZ.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) = \frac{1}{x^2y^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right) = -\frac{1}{x^2y^2}$. Donc $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}\right)$ et ω n'est pas exacte sur $]0,+\infty[^2$.

   On cherche un facteur intégrant de la forme $h\ :\ (x,y) \mapsto g(x^2+y^2)$ où g est une fonction non nulle de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

   $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{xy^2}g(x^2+y^2)\right) = \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2y}g(x^2+y^2)\right) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2)$.

$$\begin{aligned}
h\omega \text{ est exacte sur }]0,+\infty[^2 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2}g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2}g'(x^2+y^2) \\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{1}{x^2y^2}g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2}g'(x^2+y^2) = 0 \\
&\Leftrightarrow \forall t>0,\ -tg'(t)+g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \ \forall t>0,\ g(t) = \lambda t.
\end{aligned}$$

   La forme différentielle $(x^2+y^2)\omega$ est exacte sur $]0,+\infty[^2$. De plus,

$$d\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2}+\frac{1}{x}\right)dy = (x^2+y^2)\omega.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Posons $f(x,y) = g(u,v)$ où $u = x+y$ et $v = x+2y$. L'application $(x,y) \mapsto (x+y, x+2y) = (u,v)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et en particulier un C^1-difféormorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u,v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

   De même, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$ et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

   Par suite, $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = h(x+2y)$.

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x+2y) \text{ où } h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).}$$

   Par exemple, la fonction $(x,y) \mapsto \cos\sqrt{(x+2y)^2+1}$ est solution.

2. Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Posons $f(x,y) = g(r,\theta)$ où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. L'application $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) = (x,y)$ est un C^1-difféormorphisme de $]0,+\infty[\times[0,2\pi[$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x,y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y} = -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (r,\theta) \in]0,+\infty[\times[0,2\pi[,\ g(r,\theta) = h_1(r)\\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h_1\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})/\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f(x,y) = h(x^2+y^2).\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions sont les } (x,y) \mapsto h(x^2+y^2) \text{ où } h \in C^1(]0,+\infty[,\mathbb{R}).}$$

3. Soit f une fonction de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. D'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

   Soit $\varphi : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & (u,uv) = (x,y) \end{array}$. Donc si on pose $f(x,y) = g(u,v)$, on a $g = f \circ \varphi$.

   Soit $(x,y,u,v) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\times]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

$$\varphi(u,v) = (x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u = x \\ uv = y \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{array}\right. .$$

   Ainsi, φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1} : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[\times\mathbb{R} & \to &]0,+\infty[\times\mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left(x,\frac{y}{x}\right) = (u,v) \end{array}.$$

   De plus, φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et son jacobien

$$J_\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

   ne s'annule pas sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$. On sait alors que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même.

   Puisque $g = f \circ \varphi$ et que φ est un C^2-difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur lui-même, f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ si et seulement si g est de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}$.
   - $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}\right) + \left(\frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3}\frac{\partial g}{\partial v}$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.
   - $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$.

   Ensuite,

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{2y}{x}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\ &= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0 \Leftrightarrow \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)=0$$
$$\Leftrightarrow \exists h\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)=h(v)$$
$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (u,v)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ g(u,v)=uh(v)+k(v)$$
$$\exists (h,k)\in (C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2/\ \forall (x,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\ f(x,y)=xh(xy)+k(xy).$$

Les fonctions solutions sont les $(x,y)\mapsto xh(xy)+k(xy)$ où h et k sont deux fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 ▲

On munit $(\mathbb{R}^3)^2$ de la norme définie par $\forall (x,y)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $\|(x,y)\|=\text{Max}\{\|h\|_2,\|k\|_2\}$.
• Soit $(a,b)\in(\mathbb{R}^3)^2$. Pour $(h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$,

$$f((a,b)+(h,h))=(a+h).(b+k)=a.b+a.h+b.k+h.k,$$

et donc $f((a,b)+(h,h))-f((a,b))=(a.h+b.k)+h.k$. Maintenant l'application $L\ :\ (h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire et de plus, pour $(h,k)\neq(0,0)$,

$$|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=|h.k|\leqslant\|h\|_2\|k\|_2\leqslant\|(h,k)\|^2,$$

et donc $\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|\leqslant\|(h,k)\|$ puis

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\|(h,k)\|}|f((a,b)+(h,h))-f((a,b))-L((h,k))|=0.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a.h+b.k$ est linéaire, on en déduit que f est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $df_{(a,b)}(h,k)=a.h+b.k$.
La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|}\|(a+h)\wedge(b+k)-a\wedge b-a\wedge h-b\wedge k\|_2=\frac{\|h\wedge k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\frac{\|h\|_2\|k\|_2}{\|(h,k)\|}\leqslant\|(h,k)\|.$$

Puisque l'application $(h,k)\mapsto a\wedge h+b\wedge k$ est linéaire, on en déduit que g est différentiable en (a,b) et que $\forall (h,k)\in(\mathbb{R}^3)^2$, $dg_{(a,b)}(h,k)=a\wedge h+b\wedge k$.

Correction de l'exercice 14 ▲

• Pour tout $x\in E$, $\|f(x)\|=\frac{\|x\|}{1+\|x\|}<\frac{\|x\|+1}{\|x\|+1}=1$. Donc f est bien une application de E dans B.
• Si $y=0$, pour $x\in E$, $f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{1+\|x\|}x=0\Leftrightarrow x=0$.
Soit alors $y\in B\setminus\{0\}$. Pour $x\in E$,

$$f(x)=y\Rightarrow x=(1+\|x\|)y\Rightarrow\exists\lambda\in\mathbb{K}/\ x=\lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de y est nécessairement de la forme λy, $\lambda\in\mathbb{R}$. Réciproquement, pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda y)=\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}y$ et donc

$$f(\lambda y)=y\Leftrightarrow\frac{\lambda}{1+|\lambda|\|y\|}=1\Leftrightarrow\lambda=1+|\lambda|\|y\|$$
$$\Leftrightarrow(\lambda\geqslant 0\text{ et }(1-\|y\|)\lambda=1)\text{ ou }(\lambda<0\text{ et }(1+\|y\|)\lambda=1)$$
$$\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{1-\|y\|}\ (\text{car }\|y\|<1).$$

Dans tous les cas, y admet un antécédent par f et un seul à savoir $x=\frac{1}{1-\|y\|}y$. Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in B,\ f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}x.$$

• On sait que l'application $x \mapsto \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Donc l'application $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ en tant qu'inverse d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}^2$. L'application $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$ est continue sur B pour les mêmes raisons. Donc les applications f et f^{-1} sont continues sur $\mathbb{R}^2$ et B respectivement et on a montré que

$$\boxed{\text{l'application } f : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+\|x\|} \end{array} \text{ est un homéomorphisme.}}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ en vertu de théorèmes généraux et pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que f est différentiable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i = \frac{1}{\|x\|_2} \sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n,\ df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.}$$

2 ème solution. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. On en déduit que $\frac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \to 0}{\sim} \frac{1}{2\|x\|_2^2}$ et aussi que $\|x+h\|_2 - \|x\|_2$ tend vers 0 quand h tend vers 0. Ensuite, puisque $|(x|h)| \leqslant \|x\|_2 \|h\|_2$ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a $x|h \underset{h \to 0}{=} O(\|h\|_2)$ puis $(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|_2)$.
Finalement, $\frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \to 0}{=} o(\|h\|_2)$ et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h \to 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$ est linéaire, on a redémontré que f est différentiable en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}$.
Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2}(\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand h tend vers 0. Pour u vecteur non nul donné et t réel non nul, l'expression $1-L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right)=1-\frac{t}{|t|}L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$ tend donc vers 0 quand t tend vers 0. Mais si t tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient $L(u)=\|u\|_2$ et si t tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient $L(u)=-\|u\|_2$ ce qui est impossible car $u\neq 0$. Donc f n'est pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice 16 ▲

On pose $BC=a$, $CA=b$ et $AB=c$ et on note $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC. Soit M un point intérieur au triangle ABC. On note I, J et K les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (CA) et (AB) respectivement. On pose $u=$ aire de MBC, $v=$ aire de MCA et $w=$ aire de MAB. On a

$$d(M,(BC))\times d(M,(CA))\times d(M,(AB))=MI\times MJ\times MK=\frac{2u}{a}\times\frac{2v}{b}\times\frac{2w}{c}=\frac{8}{abc}uv(\mathscr{A}-u-v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction $f\ :\ (u,v)\mapsto uv(\mathscr{A}-u-v)$ sur le domaine

$$T=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant 0,\ v\geqslant 0 \text{ et } u+v\leqslant\mathscr{A}\right\}.$$

T est un compact de $\mathbb{R}^2$. En effet :
- $\forall(u,v)\in T^2$, $\|(u,v)\|_1=u+v\leqslant\mathscr{A}$ et donc T est bornée.
- Les applications $\varphi_1\ :\ (u,v)\mapsto u$, $\varphi_2\ :\ (u,v)\mapsto v$ et $\varphi_3\ :\ (u,v)\mapsto u+v$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ en tant que formes
linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles $P_1=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u\geqslant 0\}=\varphi_1^{-1}([0,+\infty[)$, $P_2=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ v\geqslant 0\}=\varphi_2^{-1}([0,+\infty[)$ et $P_3=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u+v\leqslant 0\}=\varphi_3^{-1}(]-\infty,0])$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$
en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que $T=P_1\cap P_2\cap P_3$ est un
fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant qu'intersection de fermés de $\mathbb{R}^2$.
Puisque T est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, T est un compact de $\mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.
f est continue sur le compact T à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant que polynôme à plusieurs variables et donc f admet un maximum sur T.
Pour tout (u,v) appartenant à la frontière de T, on a $f(u,v)=0$. Comme f est strictement positive sur $\overset{\circ}{T}=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2/\ u>0,\ v>0 \text{ et } u+v<0\}$, f admet son maximum dans $\overset{\circ}{T}$. Puisque f est de classe C^1 sur $\overset{\circ}{T}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si f admet un maximum en $(u_0,v_0)\in\overset{\circ}{T}$, (u_0,v_0) est nécessairement un point critique de f.
Soit $(u,v)\in\overset{\circ}{T}$.

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v)=0\\ \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}v(\mathscr{A}-2u-v)=0\\ u(\mathscr{A}-u-2v)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2u+v=\mathscr{A}\\ u+2v=\mathscr{A}\end{array}\right.\Leftrightarrow u=v=\frac{\mathscr{A}}{3}.$$

Puisque f admet un point critique et un seul à savoir $(u_0,v_0)=\left(\frac{\mathscr{A}}{3},\frac{\mathscr{A}}{3}\right)$, f admet son maximum en ce point et ce maximum vaut $f(u_0,v_0)=\frac{\mathscr{A}^3}{27}$. Le maximum du produit des distances d'un point M intérieur au triangle ABC aux cotés de ce triangle est donc $\frac{8\mathscr{A}^3}{27abc}$.
Remarque. On peut démontrer que pour tout point M intérieur au triangle ABC, on a $M=\text{bar}\left((A,\text{aire de } MBC),(B,\text{aire de } M\right.$
Si maintenant M est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en G l'isobarycentre du triangle ABC.

Correction de l'exercice 17 ▲

Soient A et B les points du plan de coordonnées respectives $(0,a)$ et $(a,0)$ dans un certain repère $\mathscr{R}$ orthonormé. Soit M un point du plan de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x,y)=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|_2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|_2=MA+MB\geqslant AB \text{ avec égalité si et seulement si } M\in[AB].$$

Donc f admet un minimum global égal à $AB = a\sqrt{2}$ atteint en tout couple (x,y) de la forme $(\lambda a, (1-\lambda)a)$, $\lambda \in [0,1]$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Puisque la fonction ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\sin^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{1-\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -2\frac{\cos(2x)\operatorname{sh}(2y)}{\operatorname{ch}^2(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$$

puis

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -2\cos(2x)\frac{2\operatorname{ch}^3(2y) - 4\operatorname{sh}^2(2y)\operatorname{ch}(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)\operatorname{sh}^2(2y)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)\\ &= -4\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}^3(2y)}(-\operatorname{ch}^2(2y)+2) f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + 4\frac{\cos^2(2x)(\operatorname{ch}^2(2y)-1)}{\operatorname{ch}^4(2y)} f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).\end{aligned}$$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\operatorname{ch}^2(2y)}{4}\Delta g(x,y) = -2\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} f'\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{ch}^2(2y)}\right) f''\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right).$$

Maintenant, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $-1 \leqslant \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \leqslant 1$ et d'autre part, l'expression $\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)} = \cos(2x)$ décrit $[-1,1]$ quand x décrit $\mathbb{R}$. Donc $\left\{\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2\times)},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = [-1,1]$. Par suite,

$$\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2,\ \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1],\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application f de classe C^2 sur $]-1,1[$. Or $\left|\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$ et $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$. Donc

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\ \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right),\ k \in \mathbb{Z}\right\},\ \Delta g(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall t \in]-1,1[,\ ((1-t^2)f')'(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in]-1,1[,\ f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}\\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in]-1,1[,\ f(t) = \lambda \operatorname{argth} t + \mu.\end{aligned}$$

De plus, f n'est pas constante si et seulement si $\mu = 0$.

$$\boxed{\text{L'application } t \mapsto \operatorname{argth} t \text{ convient.}}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La matrice jacobienne de f en (x,y) s'écrit $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$ où c et s sont deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $c^2+s^2=1$ $(*)$. Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ceci s'écrit encore $\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$ ou enfin

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} (**).$$

En dérivant $(*)$ par rapport à x ou à y, on obtient les égalités $c\frac{\partial c}{\partial x} + s\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ et $c\frac{\partial c}{\partial y} + s\frac{\partial s}{\partial y} = 0$. Ceci montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont orthogonaux au vecteur non nul $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et sont donc colinéaires.
Mais l'égalité $(**)$ montre que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$ sont aussi orthogonaux l'un à l'autre.
Finalement, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, les deux vecteurs $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$ sont nuls. On en déduit que les deux applications c et s sont constantes sur $\mathbb{R}^2$ et donc, il existe θ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice jacobienne de f en (x,y) est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Soit g la rotation d'angle θ prenant la même valeur que f en $(0,0)$. f et g ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc $f=g$ et f est une rotation affine.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^2 dont la différentielle en tout point est une rotation.
Alors f est une rotation affine.