



## Fonctions de plusieurs variables

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*\* I

Etudier l'existence et la valeur éventuelle des limites suivantes :

1.  $\frac{xy}{x^2+y^2}$  en  $(0,0)$
2.  $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$  en  $(0,0)$
3.  $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$  en  $(0,0)$
4.  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|\sqrt{|y|}+|y|\sqrt{|x|}}$  en  $(0,0)$
5.  $\frac{(x^2-y)(y^2-x)}{x+y}$  en  $(0,0)$
6.  $\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|}$  en  $(0,0)$
7.  $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$  en  $(0,0,0)$
8.  $\frac{x+y}{x^2-y^2+z^2}$  en  $(2,-2,0)$

[Correction ▼](#)

[005887]

### Exercice 2 \*\*\* I

Pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ . Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  (au moins) sur  $\mathbb{R}^2$ .

[Correction ▼](#)

[005888]

### Exercice 3 \*\*\* I

Soit  $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ .

Déterminer le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$ . Vérifier que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$  existent et sont différents.

[Correction ▼](#)

[005889]

### Exercice 4 \*\*

Montrer que  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même.  
 $(x,y) \mapsto (e^x - e^y, x+y)$

[Correction ▼](#)

[005890]

### Exercice 5 \*\*\*

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que l'équation  $y^{2n+1} + y - x = 0$  définit implicitement une fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  telle que :  
 $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2), [y^{2n+1} + y - x = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)]$ .  
 Montrer que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer  $\int_0^2 \varphi(t) dt$ .

Correction ▼

[005891]

### Exercice 6 \*\*\*

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction implicitement définie sur un voisinage de 0 par l'égalité  $e^{x+y} + y - 1 = 0$ .

Correction ▼

[005892]

### Exercice 7 \*

Soit  $f$  une application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . On dit que  $f$  est positivement homogène de degré  $r$  ( $r$  réel donné) si et seulement si  $\forall \lambda \in ]0, +\infty[, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$ .

Montrer pour une telle fonction l'identité d'EULER :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

Correction ▼

[005893]

### Exercice 8 \*\* I

Extremums des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 15x - 12y$
2.  $f(x, y) = -2(x - y)^2 + x^4 + y^4$ .

Correction ▼

[005894]

### Exercice 9 \*\*\* I

Soit  $f : \begin{matrix} GL_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^{-1} \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est différentiable en tout point de  $M_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  et déterminer sa différentielle.

Correction ▼

[005895]

### Exercice 10 \*

Déterminer  $\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\}$ .

Correction ▼

[005896]

### Exercice 11 \*\*

Les formes différentielles suivantes sont elles exactes ? Si oui, intégrer et si non chercher un facteur intégrant.

1.  $\omega = (2x + 2y + e^{x+y})(dx + dy)$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2.  $\omega = \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2}$  sur  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$
3.  $\omega = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} - ydy$
4.  $\omega = \frac{1}{x^2y} dx - \frac{1}{xy^2} dy$  sur  $(]0, +\infty[)^2$  (trouver un facteur intégrant non nul ne dépendant que de  $x^2 + y^2$ ).

Correction ▼

[005897]

### Exercice 12 \*\*\* I

Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1.  $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$  en posant  $u = x + y$  et  $v = x + 2y$ .
2.  $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  en passant en polaires.

$$3. x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \text{ sur } ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \text{ en posant } x = u \text{ et } y = uv.$$

[Correction ▼](#)

[005898]

### Exercice 13 \*\*

Déterminer la différentielle en tout point de  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$(x, y) \mapsto x \cdot y \qquad (x, y) \mapsto x \wedge y$$

[Correction ▼](#)

[005899]

### Exercice 14 \*\*

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $B = \{x \in E / \|x\| < 1\}$ . Montrer que  $f : E \rightarrow B$  est un

$$x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$$

homéomorphisme.

[Correction ▼](#)

[005900]

### Exercice 15 \*\*

$E = \mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne usuelle. Montrer que  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable sur

$$x \mapsto \|x\|_2$$

$E \setminus \{0\}$  et préciser  $df$ . Montrer que  $f$  n'est pas différentiable en 0.

[Correction ▼](#)

[005901]

### Exercice 16 \*\*\*

Maximum du produit des distances d'un point  $M$  intérieur à un triangle  $ABC$  aux cotés de ce triangle.

[Correction ▼](#)

[005902]

### Exercice 17 \*

Minimum de  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ ,  $a$  réel donné.

[Correction ▼](#)

[005903]

### Exercice 18 \*\*\*

Trouver une application non constante  $f : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  telle que l'application  $g$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $g(x, y) = f\left(\frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)}\right)$  ait un laplacien nul sur un ensemble à préciser. (On rappelle que le laplacien de  $g$  est  $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ . Une fonction de laplacien nul est dite harmonique.)

[Correction ▼](#)

[005904]

### Exercice 19 \*\*\* I

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  dont la différentielle en tout point est une rotation. Montrer que  $f$  est une rotation affine.

[Correction ▼](#)

[005905]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x,0) = 0$ . Quand  $x$  tend vers 0, le couple  $(x,0)$  tend vers le couple  $(0,0)$  et  $f(x,0)$  tend vers 0. Donc, si  $f$  a une limite réelle en 0, cette limite est nécessairement 0.

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x,x) = \frac{1}{2}$ . Quand  $x$  tend vers 0, le couple  $(x,x)$  tend vers  $(0,0)$  et  $f(x,x)$  tend vers  $\frac{1}{2} \neq 0$ . Donc  $f$  n'a pas de limite réelle en  $(0,0)$ .

2.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Pour  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $|f(x,y)| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \times |xy| \leq \frac{1}{2}|xy|$ . Comme  $\frac{1}{2}|xy|$  tend vers 0 quand le couple  $(x,y)$  tend vers le couple  $(0,0)$ , il en est de même de  $f$ .  $f(x,y)$  tend vers 0 quand  $(x,y)$  tend vers  $(0,0)$ .

3.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Pour  $y \neq 0$ ,  $f(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$ . Quand  $y$  tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple  $(0,y)$  tend vers le couple  $(0,0)$  et  $f(0,y)$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $f$  n'a pas de limite réelle en  $(0,0)$ .

4.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x,x) = \frac{\sqrt{2x^2}}{2|x|\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{2|x|}}$ . Quand  $x$  tend vers 0, le couple  $(x,x)$  tend vers le couple  $(0,0)$  et  $f(x,x)$  tend vers  $+\infty$ . Donc  $f$  n'a pas de limite réelle en  $(0,0)$ .

5.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,-x), x \in \mathbb{R}\}$ .

Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x,-x+x^3) = \frac{(x+x^2-x^3)(-x+(-x+x^2)^2)}{x^3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{x}$ . Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures, le couple  $(x,-x+x^3)$  tend vers  $(0,0)$  et  $f(x,-x+x^3)$  tend vers  $-\infty$ . Donc  $f$  n'a pas de limite réelle en  $(0,0)$ .

6.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ .

$\frac{1-\cos\sqrt{|xy|}}{|y|} \underset{(x,y) \rightarrow (0,0)}{\sim} \frac{(\sqrt{|xy|})^2}{2|y|} = \frac{|x|}{2}$  et donc  $f$  tend vers 0 quand  $(x,y)$  tend vers  $(0,0)$ .

7.  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^3$  privé du cône de révolution d'équation  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ .

$f(x,0,0) = \frac{1}{x}$  qui tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 par valeurs supérieures. Donc  $f$  n'a pas de limite réelle en  $(0,0,0)$ .

8.  $f(2+h, -2+k, l) = \frac{h+k}{h^2-k^2+l^2+4h+4k} = g(h,k,l)$ .  $g(h,0,0)$  tend vers  $\frac{1}{4}$  quand  $h$  tend vers 0 et  $g(0,0,l)$  tend vers  $0 \neq \frac{1}{4}$  quand  $l$  tend vers 0. Donc,  $f$  n'a pas de limite réelle quand  $(x,y,z)$  tend vers  $(2,-2,0)$ .

## Correction de l'exercice 2 ▲

•  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .

•  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .

• **Continuité en  $(0,0)$ .** Pour  $(x,y) \neq (0,0)$ ,

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \frac{|xy||x^2-y^2|}{x^2+y^2} \leq |xy| \times \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = |xy|.$$

Comme  $|xy|$  tend vers 0 quand le couple  $(x,y)$  tend vers le couple  $(0,0)$ , on a donc  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = f(0,0)$ .

On en déduit que  $f$  est continue en  $(0,0)$  et finalement  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

$f$  est de classe  $C^0$  au moins sur  $\mathbb{R}^2$ .

• **Dérivées partielles d'ordre 1 sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ .**  $f$  est de classe  $C^1$  au moins sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  et pour  $(x,y) \neq (0,0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - (x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

D'autre part, pour  $(x,y) \neq (0,0)$   $f(x,y) = -f(y,x)$ . Donc pour  $(x,y) \neq (0,0)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

- **Existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ .** Pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

et donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$ . Ainsi,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ . De même,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ . Ainsi,  $f$  admet des dérivées partielles premières sur  $\mathbb{R}^2$  définies par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- **Continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(0, 0)$ .** Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \frac{|y||x^4 + 4x^2y^2 - y^4|}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{x^4 + 4x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq |y| \frac{2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme  $2|y|$  tend vers 0 quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , on en déduit que  $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right|$  tend vers 0 quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ . Donc la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(0, 0)$  et finalement sur  $\mathbb{R}^2$ . Il en est de même de la fonction  $\frac{\partial f}{\partial y}$  et on a montré que

$f$  est au moins de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

On pose  $D = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$  puis  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus D$ .

- $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ .
- $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  en vertu de théorèmes généraux et pour  $(x, y) \in \Omega$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

- Etudions la continuité de  $f$  en  $(0, 0)$ . Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = \begin{cases} y^2 \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq \begin{cases} y^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq y^2.$$

Comme  $y^2$  tend vers 0 quand  $(x, y)$  tend vers 0,  $\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \neq (0, 0)}} f(x, y) = f(0, 0)$  et donc  $f$  est continue en  $(0, 0)$  puis

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$ ,  $x_0$  réel donné. Pour  $x \neq x_0$ ,

$$\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0} = \frac{0 - 0}{x - x_0} = 0.$$

Donc  $\frac{f(x, 0) - f(x_0, 0)}{x - x_0}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $x_0$ . On en déduit que  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = 0$ . Finalement, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$ ,  $x_0$  réel donné. Pour  $y \neq 0$ ,

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} = \frac{y^2 \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)}{y} = y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right).$$

On en déduit que  $\left| \frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0} \right| \leq |y|$  puis que  $\frac{f(x_0, y) - f(x_0, 0)}{y - 0}$  tend vers 0 quand  $y$  tend vers 0. Par suite,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$  existe et  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = 0$ . Finalement, la fonction  $\frac{\partial f}{\partial y}$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

- Etudions la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  en  $(x_0, 0)$ ,  $x_0$  réel donné. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) \right| = \begin{cases} |y| \left| \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq |y|.$$

Quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ ,  $|y|$  tend vers 0 et donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  tend vers  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0)$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(x_0, 0)$ . La fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est donc continue en  $(x_0, 0)$  et finalement

la fonction  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

- Etudions la continuité de  $\frac{\partial f}{\partial y}$  en  $(x_0, 0)$ ,  $x_0$  réel donné. Supposons tout d'abord  $x_0 = 0$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right| = \begin{cases} \left| 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \leq 2|y| + |x|.$$

Quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ ,  $|x| + 2|y|$  tend vers 0 et donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  tend vers  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ .

Supposons maintenant  $x_0 \neq 0$ . Pour  $y \neq 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) - x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$ . Quand  $y$  tend vers 0,  $2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right)$  tend vers 0 car  $\left| 2y \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) \right|$  et  $x_0 \cos\left(\frac{x_0}{y}\right)$  n'a pas de limite réelle car  $x_0 \neq 0$ . Donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$  n'a pas de limite quand  $y$  tend vers 0 et la fonction  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'est pas continue en  $(x_0, 0)$  si  $x_0 \neq 0$ . On a montré que

$f$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega \cup \{(0, 0)\}$ .

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ . Pour  $x \neq 0$ ,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{0 - 0}{x} = 0.$$

Donc  $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. On en déduit que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$ .

- Etudions l'existence et la valeur éventuelle de  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ . Pour  $y \neq 0$ ,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{y \cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1.$$

Donc  $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0}$  tend vers 1 quand  $y$  tend vers 0. On en déduit que  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existe et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$ . On a montré que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  existent et sont différents. D'après le théorème de SCHWARZ,  $f$  n'est pas de classe  $C^2$  sur  $\Omega \cup \{(0, 0)\}$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = (z, t) &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y = z \\ x + y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x - e^{t-x} = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ (e^x)^2 - ze^x - e^t = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = t - x \\ e^x = z - \sqrt{z^2 + 4e^t} \text{ ou } e^x = z + \sqrt{z^2 + 4e^t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = z + \sqrt{z^2 + 4e^t} \\ y = t - x \end{cases} \quad (\text{car } z - \sqrt{z^2 + 4e^t} < z - \sqrt{z^2} = z - |z| \leq 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln(z + \sqrt{z^2 + 4e^t}) \\ y = t - \ln(z + \sqrt{z^2 + 4e^t}) \end{cases} \quad (\text{car } z + \sqrt{z^2 + 4e^t} > z + \sqrt{z^2} = z + |z| \geq 0). \end{aligned}$$

Ainsi, tout élément  $(z, t) \in \mathbb{R}^2$  a un antécédent et un seul dans  $\mathbb{R}^2$  par  $\varphi$  et donc  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même.

La fonction  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  de jacobien  $J_\varphi(x, y) = \begin{vmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = e^x + e^y$ . Le jacobien de  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ . En résumé,  $\varphi$  est une bijection de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même, de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et le jacobien de  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait alors que

$\varphi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même.

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f_x : y \mapsto y^{2n+1} + y - x$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f_x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] \lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y), \lim_{y \rightarrow +\infty} f_x(y) [= \mathbb{R}$ . En particulier, l'équation  $f_x(y) = 0$  a une et une seule solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on note  $\varphi(x)$ .

La fonction  $f : (x, y) \mapsto y^{2n+1} + y - x$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et de plus,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2n+1)y^{2n} + 1 \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction  $\varphi$  implicitement définie par l'égalité  $f(x, y) = 0$  est dérivable en tout réel  $x$  et de plus, en dérivant l'égalité  $\forall x \in \mathbb{R}, (\varphi(x))^{2n+1} + \varphi(x) - x = 0$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}, (2n+1)\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n} + \varphi'(x) - 1 = 0$  et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = \frac{1}{(2n+1)(\varphi(x))^{2n+1}}.$$

Montrons par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\varphi$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

- C'est vrai pour  $p = 1$ .

- Soit  $p \geq 1$ . Supposons que la fonction  $\varphi$  soit  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Alors la fonction  $\varphi' = \frac{1}{(2n+1)\varphi^{2n+1}}$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant qu'inverse d'une fonction  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ . On en déduit

que la fonction  $\varphi$  est  $p+1$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On a montré par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $\varphi$  est  $p$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et donc que

la fonction  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

Calculons maintenant  $I = \int_0^2 \varphi(t) dt$ . On note tout d'abord que, puisque  $0^{2n+1} + 0 - 0 = 0$ , on a  $\varphi(0) = 0$  et puisque  $1^{2n+1} + 1 - 2 = 0$ , on a  $\varphi(2) = 1$ .

Maintenant, pour tout réel  $x$  de  $[0, 2]$ , on a  $\varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} + \varphi'(x)\varphi(x) - x\varphi'(x) = 0$  (en multipliant par  $\varphi'(x)$  les deux membres de l'égalité définissant  $\varphi(x)$ ) et en intégrant sur le segment  $[0, 2]$ , on obtient

$$\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx + \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx - \int_0^2 x\varphi'(x) dx = 0 (*).$$

Or,  $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx = \left[ \frac{(\varphi(x))^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^2 = \frac{1}{2n+2}$ . De même,  $\int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx = \left[ \frac{(\varphi(x))^2}{2} \right]_0^2 = \frac{1}{2}$  et donc  $\int_0^2 \varphi'(x)(\varphi(x))^{2n+1} dx - \int_0^2 \varphi'(x)\varphi(x) dx = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}$ . D'autre part, puisque les deux fonctions  $x \mapsto x$  et  $x \mapsto \varphi(x)$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, 2]$ , on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$- \int_0^2 x\varphi'(x) dx = [-x\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x) dx = -2 + I.$$

L'égalité (\*) s'écrit donc  $\frac{n+2}{2n+2} - 2 + I = 0$  et on obtient  $I = \frac{3n+2}{2n+2}$ .

$$\int_0^2 \varphi(x) dx = \frac{3n+2}{2n+2}.$$

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f_x : y \mapsto e^{x+y} + y - 1$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions continues et strictement croissantes sur  $\mathbb{R}$ . Donc la fonction  $f_x$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]\lim_{y \rightarrow -\infty} f_x(y), \lim_{y \rightarrow +\infty} f_x(y)[ = \mathbb{R}$ . En particulier, l'équation  $f_x(y) = 0$  a une et une seule solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on note  $\varphi(x)$ .

La fonction  $f : (x, y) \mapsto e^{x+y} + y - 1$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et de plus,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y} + 1 \neq 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites, la fonction  $\varphi$  implicitement définie par l'égalité  $f(x, y) = 0$  est dérivable en tout réel  $x$  et de plus, en dérivant l'égalité  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$ , on obtient  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(1 + \varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} + \varphi'(x) = 0$  ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = -\frac{e^{x+\varphi(x)}}{e^{x+\varphi(x)}+1} (*).$$

On en déduit par récurrence que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et en particulier admet en 0 un développement limité d'ordre 3. Déterminons ce développement limité.

**1ère solution.** Puisque  $e^{0+0} + 0 - 1 = 0$ , on a  $\varphi(0) = 0$ . L'égalité (\*) fournit alors  $\varphi'(0) = -\frac{1}{2}$  et on peut poser  $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x + ax^2 + bx^3 + o(x^3)$ . On obtient

$$\begin{aligned} e^{x+\varphi(x)} & \underset{x \rightarrow 0}{=} e^{\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3 + o(x^3)} \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \left(\frac{x}{2} + ax^2 + bx^3\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} + ax^2\right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + o(x^3) \\ & \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + \left(a + \frac{1}{8}\right)x^2 + \left(b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48}\right)x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

L'égalité  $e^{x+\varphi(x)} + \varphi(x) - 1 = 0$  fournit alors  $a + \frac{1}{8} + a = 0$  et  $b + \frac{a}{2} + \frac{1}{48} + b = 0$  ou encore  $a = -\frac{1}{16}$  et  $b = \frac{1}{192}$ .

**2ème solution.** On a déjà  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi'(0) = 0$ . En dérivant l'égalité (\*), on obtient

$$\varphi''(x) = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)}+1) - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}(e^{x+\varphi(x)})}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} = -\frac{(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2},$$

et donc  $\frac{\varphi''(0)}{2} = -\frac{\frac{1}{2}}{2 \times 2^2} = -\frac{1}{16}$ . De même,

$$\varphi^{(3)}(x) = -\varphi''(x) \frac{e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} - (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} \frac{(1+\varphi'(x))}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^2} + (1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)} \frac{2(1+\varphi'(x))e^{x+\varphi(x)}}{(e^{x+\varphi(x)}+1)^3},$$

et donc  $\frac{\varphi^{(3)}(0)}{6} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1/2}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{192}$ . La formule de TAYLOR-YOUNG refournit alors

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{384} + o(x^3).$$



### Correction de l'exercice 7 ▲

On dérive par rapport à  $\lambda$  les deux membres de l'égalité  $f(\lambda x) = \lambda^r f(x)$  et on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda > 0, \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = r \lambda^{r-1} f(x),$$

et pour  $\lambda = 1$ , on obtient

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = r f(x).$$

### Correction de l'exercice 8 ▲

1.  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Donc si  $f$  admet un extremum local en un point  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ .

$$df_{(x,y)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6xy - 15 = 0 \\ 3x^2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Réciproquement,  $r = 6x + 6y$ ,  $t = 0$  et  $s = 6x$  puis  $rt - s^2 = -36x^2$ . Ainsi,  $(rt - s^2)(2, \frac{1}{4}) = (rt - s^2)(-2, -\frac{1}{4}) = -144 < 0$  et  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(2, \frac{1}{4})$  ou  $(-2, -\frac{1}{4})$ .

**$f$  n'admet pas d'extremum local sur  $\mathbb{R}^2$ .**

2. La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que polynôme à plusieurs variables. Donc, si  $f$  admet un extremum local en  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(x_0, y_0)$  est un point critique de  $f$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4(x-y) + 4x^3 = 0 \\ 4(x-y) + 4y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ -4(x-y) + 4x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) \in \left\{ (0,0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \right\}. \end{aligned}$$

Réciproquement,  $f$  est plus précisément de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et

$$r(x,y)t(x,y) - s^2(x,y) = (-4 + 12x^2)(-4 + 12y^2) - (4)^2 = -48x^2 - 48y^2 + 144x^2y^2 = 48(3x^2y^2 - x^2 - y^2)$$

- $(rt - s^2)(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 48(12 - 2 - 2) > 0$ . Donc  $f$  admet un extremum local en  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Plus précisément, puisque  $r(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2 \times 12 - 4 = 20 > 0$ ,  $f$  admet un minimum local en  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . De plus, pour  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) &= -2(x-y)^2 + x^4 + y^4 - 8 = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy + 8 \\ &\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 8 = (x^4 - 4x^2 + 4) + (y^4 - 4y^2 + 4) = (x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

et  $f(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  est un minimum global.

- Pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(-x, -y) = f(x,y)$  et donc  $f$  admet aussi un minimum global en  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  égal à 8.
- $f(0,0) = 0$ . Pour  $x \neq 0$ ,  $f(x,x) = 2x^4 > 0$  et donc  $f$  prend des valeurs strictement supérieures à  $f(0,0)$  dans tout voisinage de  $(0,0)$ . Pour  $x \in ]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[ \setminus \{0\}$ ,  $f(x,0) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) < 0$  et  $f$  prend des valeurs strictement inférieures à  $f(0,0)$  dans tout voisinage de  $(0,0)$ . Finalement,  $f$  n'admet pas d'extremum local en  $(0,0)$ .

$f$  admet un minimum global égal à 8, atteint en  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  et  $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  d'une norme sous-multiplicative  $\| \cdot \|$ . Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . On sait que  $GL_n(\mathbb{R})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et donc pour  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de norme suffisamment petite,  $A + H \in GL_n(\mathbb{R})$ . Pour un tel  $H$

$$(A + H)^{-1} - A^{-1} = (A + H)^{-1}(I_n - (A + H)A^{-1}) = -(A + H)^{-1}HA^{-1}$$

puis

$$\begin{aligned} (A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} &= -(A + H)^{-1}HA^{-1} + A^{-1}HA^{-1} = (A + H)^{-1}(-HA^{-1} + (A + H)A^{-1}HA^{-1}) \\ &= (A + H)^{-1}HA^{-1}HA^{-1}. \end{aligned}$$

Par suite,  $\|f(A + H) - f(A) + A^{-1}HA^{-1}\| = \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| \leq \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\|^2$ .  
Maintenant, la formule  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t(\text{com}(M))$ , valable pour tout  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ , et la continuité du déterminant montre que l'application  $M \mapsto M^{-1}$  est continue sur l'ouvert  $GL_n(\mathbb{R})$ . On en déduit que  $\|(A + H)^{-1}\|$  tend vers  $\|A^{-1}\|$  quand  $H$  tend vers 0. Par suite,

$$\lim_{H \rightarrow 0} \|(A + H)^{-1}\| \|A^{-1}\|^2 \|H\| = 0 \text{ et donc } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{1}{\|H\|} \|(A + H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\| = 0.$$

Comme l'application  $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$  est linéaire, c'est la différentielle de  $f$  en  $A$ .

$\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}.$

### Correction de l'exercice 10 ▲

Pour tout complexe  $z$  tel que  $|z| \leq 1$ ,

$$|\sin(z)| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \text{sh}(|z|) \leq \text{sh} 1,$$

l'égalité étant obtenue effectivement pour  $z = i$  car  $|\sin(i)| = \left| \frac{e^{i^2} - e^{-i^2}}{2i} \right| = \frac{e - e^{-1}}{2} = \text{sh}(1)$ .

$\text{Max}\{|\sin z|, z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} = \text{sh}(1).$

### Correction de l'exercice 11 ▲

1. Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $P(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} = Q(x, y)$ . Les fonctions  $P$  et  $Q$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$ . Donc, d'après le théorème de SCHWARZ,  $\omega$  est exacte sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  et comme  $\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + e^{x+y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , la forme différentielle  $\omega$  est une forme différentielle exacte sur  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $f$  une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ 2x + e^{x+y} + g'(y) = 2x + 2y + e^{x+y} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} f(x, y) = x^2 + 2xy + e^{x+y} + g(y) \\ g(y) = y^2 + \lambda \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x + y)^2 + e^{x+y} + \lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^2$  sont les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto (x+y)^2 + e^{x+y} + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Remarque.** On pouvait aussi remarquer immédiatement que si  $f(x, y) = (x+y)^2 + e^{x+y}$  alors  $df = \omega$ .

2. La forme différentielle  $\omega$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x\}$  qui est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$  car convexe. Donc, d'après le théorème de SCHWARZ,  $\omega$  est exacte sur  $\Omega$  si et seulement si  $\omega$  est fermée sur  $\Omega$ .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x-y)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{x-y} + y \frac{1}{(x-y)^2} \right) = -\frac{1}{(x-y)^2} - \frac{2y}{(x-y)^3} = -\frac{x+y}{(x-y)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{y}{(x-y)^2} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{1}{y-x} - x \frac{1}{(y-x)^2} \right) = \frac{1}{(y-x)^2} + \frac{2x}{(y-x)^3} = \frac{x+y}{(y-x)^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{(x-y)^2} \right).$$

Donc  $\omega$  est exacte sur l'ouvert  $\Omega$ . Soit  $f$  une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{y}{(x-y)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} f(x, y) = \frac{y}{x-y} + g(y) \\ \frac{x}{(x-y)^2} + g'(y) = \frac{x}{(x-y)^2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \frac{y}{x-y} + \lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de  $\omega$  sur  $\Omega$  sont les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto \frac{y}{x-y} + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

3.  $\omega$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  mais n'est pas étoilé. On se place dorénavant sur  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in ]-\infty, 0]\}$  qui est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$ . Sur  $\Omega$ ,  $\omega$  est exacte si et seulement si  $\omega$  est fermée d'après le théorème de SCHWARZ.

$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2+y^2} - y \right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ . Donc  $\omega$  est exacte sur  $\Omega$ . Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} df = \omega &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \Omega, \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2) + g(y) \\ \frac{y}{x^2+y^2} + g'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} - y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall (x, y) \in \Omega, f(x, y) = \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda. \end{aligned}$$

Les primitives de  $\omega$  sur  $\Omega$  sont les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2) - y^2) + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Les fonctions précédentes sont encore des primitives de  $\omega$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et donc  $\omega$  est exacte sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

4.  $\omega$  est de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[^2$  qui est un ouvert étoilé de  $\mathbb{R}^2$ . Donc  $\omega$  est exacte sur  $]0, +\infty[^2$  si et seulement si  $\omega$  est fermée sur  $]0, +\infty[^2$  d'après le théorème de SCHWARZ.

$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{xy^2} \right) = \frac{1}{x^2y^2}$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2y} \right) = -\frac{1}{x^2y^2}$ . Donc  $\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{xy^2} \right) \neq \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2y} \right)$  et  $\omega$  n'est pas exacte sur  $]0, +\infty[^2$ .

On cherche un facteur intégrant de la forme  $h : (x, y) \mapsto g(x^2+y^2)$  où  $g$  est une fonction non nulle de classe  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{xy^2} g(x^2+y^2) \right) = \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2} g'(x^2+y^2)$  et  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x^2y} g(x^2+y^2) \right) = -\frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2} g'(x^2+y^2)$ .

$$h\omega \text{ est exacte sur } ]0, +\infty[^2 \Leftrightarrow \forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{2}{y^2} g'(x^2+y^2) = -\frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) + \frac{2}{x^2} g'(x^2+y^2)$$

$$\Leftrightarrow \forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2, \frac{1}{x^2y^2} g(x^2+y^2) - \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} g'(x^2+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t > 0, -tg'(t) + g(t) = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t > 0, g(t) = \lambda t.$$

La forme différentielle  $(x^2 + y^2)\omega$  est exacte sur  $]0, +\infty[^2$ . De plus,

$$d\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x}\right)dy = (x^2 + y^2)\omega.$$

### Correction de l'exercice 12 ▲

1. Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Posons  $f(x, y) = g(u, v)$  où  $u = x + y$  et  $v = x + 2y$ . L'application  $(x, y) \mapsto (x + y, x + 2y) = (u, v)$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$  et en particulier un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  sur lui-même.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(g(u, v)) = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}$$

De même,  $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v}$  et donc

$$2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 2\frac{\partial g}{\partial u} + 2\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial u} - 2\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Par suite,  $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, g(u, v) = h(v) \Leftrightarrow \exists h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = h(x + 2y)$ .

Les solutions sont les  $(x, y) \mapsto h(x + 2y)$  où  $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Par exemple, la fonction  $(x, y) \mapsto \cos \sqrt{(x + 2y)^2 + 1}$  est solution.

2. Soit  $f$  une application de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Posons  $f(x, y) = g(r, \theta)$  où  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$ . L'application  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . De plus,

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y},$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(f(x, y)) = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (r, \theta) \in ]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[, g(r, \theta) = h_1(r) \\ &\Leftrightarrow \exists h_1 \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h_1\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}) / \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = h(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

Les solutions sont les  $(x, y) \mapsto h(x^2 + y^2)$  où  $h \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$ .

3. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . D'après le théorème de SCHWARZ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

Soit  $\varphi : ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Donc si on pose  $f(x, y) = g(u, v)$ , on a  $g = f \circ \varphi$ .

$$(u, v) \mapsto (u, uv) = (x, y)$$

Soit  $(x, y, u, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

$$\varphi(u, v) = (x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ uv = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}.$$

Ainsi,  $\varphi$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur lui-même et sa réciproque est l'application

$$\varphi^{-1} : \begin{matrix} ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} & \rightarrow & ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \left(x, \frac{y}{x}\right) = (u, v) \end{matrix}.$$

De plus,  $\varphi$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  et son jacobien

$$J\varphi(u, v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

ne s'annule pas sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . On sait alors que  $\varphi$  est un  $C^2$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  sur lui-même.

Puisque  $g = f \circ \varphi$  et que  $\varphi$  est un  $C^2$ -difféomorphisme de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  sur lui-même,  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$  si et seulement si  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ .

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v}$ .
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v}$ .
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \left( \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} \right) + \left( \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{2y}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^4} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x^3} \frac{\partial g}{\partial v}$ .
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x} \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{y}{x^3} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ .
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial v} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ .

Ensuite,

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2y \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} + 2y \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial v} - \frac{2y}{x} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{2y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{y^2}{x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists h \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / \forall (u, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = h(v) \\ &\exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (u, v) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, g(u, v) = uh(v) + k(v) \\ &\exists (h, k) \in (C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}))^2 / \forall (x, y) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R}, f(x, y) = xh(xy) + k(xy). \end{aligned}$$

Les fonctions solutions sont les  $(x, y) \mapsto xh(xy) + k(xy)$  où  $h$  et  $k$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Correction de l'exercice 13 ▲

On munit  $(\mathbb{R}^3)^2$  de la norme définie par  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \|(x, y)\| = \text{Max}\{\|h\|_2, \|k\|_2\}$ .

- Soit  $(a, b) \in (\mathbb{R}^3)^2$ . Pour  $(h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2$ ,

$$f((a, b) + (h, h)) = (a + h) \cdot (b + k) = a \cdot b + a \cdot h + b \cdot k + h \cdot k,$$

et donc  $f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) = (a \cdot h + b \cdot k) + h \cdot k$ . Maintenant l'application  $L : (h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$  est linéaire et de plus, pour  $(h, k) \neq (0, 0)$ ,

$$|f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = |h \cdot k| \leq \|h\|_2 \|k\|_2 \leq \|(h, k)\|^2,$$

et donc  $\frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| \leq \|(h, k)\|$  puis

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\|(h, k)\|} |f((a, b) + (h, h)) - f((a, b)) - L((h, k))| = 0.$$

Puisque l'application  $(h, k) \mapsto a \cdot h + b \cdot k$  est linéaire, on en déduit que  $f$  est différentiable en  $(a, b)$  et que  $\forall (h, k) \in (\mathbb{R}^3)^2, df_{(a, b)}(h, k) = a \cdot h + b \cdot k$ .

La démarche est analogue pour le produit vectoriel :

$$\frac{1}{\|(h,k)\|} \|(a+h) \wedge (b+k) - a \wedge b - a \wedge h - b \wedge k\|_2 = \frac{\|h \wedge k\|_2}{\|(h,k)\|} \leq \frac{\|h\|_2 \|k\|_2}{\|(h,k)\|} \leq \|(h,k)\|.$$

Puisque l'application  $(h,k) \mapsto a \wedge h + b \wedge k$  est linéaire, on en déduit que  $g$  est différentiable en  $(a,b)$  et que  $\forall (h,k) \in (\mathbb{R}^3)^2, dg_{(a,b)}(h,k) = a \wedge h + b \wedge k$ .

### Correction de l'exercice 14 ▲

- Pour tout  $x \in E, \|f(x)\| = \frac{\|x\|}{1+\|x\|} < \frac{\|x\|+1}{\|x\|+1} = 1$ . Donc  $f$  est bien une application de  $E$  dans  $B$ .
  - Si  $y = 0$ , pour  $x \in E, f(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{1+\|x\|}x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
- Soit alors  $y \in B \setminus \{0\}$ . Pour  $x \in E$ ,

$$f(x) = y \Rightarrow x = (1 + \|x\|)y \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} / x = \lambda y.$$

Donc un éventuel antécédent de  $y$  est nécessairement de la forme  $\lambda y, \lambda \in \mathbb{R}$ . Réciproquement, pour  $\lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda y) = \frac{\lambda}{1+|\lambda||y|}y$  et donc

$$\begin{aligned} f(\lambda y) = y &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{1+|\lambda||y|} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 + |\lambda||y| \\ &\Leftrightarrow (\lambda \geq 0 \text{ et } (1 - \|y\|)\lambda = 1) \text{ ou } (\lambda < 0 \text{ et } (1 + \|y\|)\lambda = 1) \\ &\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{1 - \|y\|} \text{ (car } \|y\| < 1). \end{aligned}$$

Dans tous les cas,  $y$  admet un antécédent par  $f$  et un seul à savoir  $x = \frac{1}{1-\|y\|}y$ . Ainsi,

$$f \text{ est bijective et } \forall x \in B, f^{-1}(x) = \frac{1}{1-\|x\|}x.$$

- On sait que l'application  $x \mapsto \|x\|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Donc l'application  $x \mapsto \frac{1}{1+\|x\|}$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  en tant qu'inverse d'une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $x \mapsto \frac{1}{1-\|x\|}$  est continue sur  $B$  pour les mêmes raisons. Donc les applications  $f$  et  $f^{-1}$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  et  $B$  respectivement et on a montré que

$$\begin{array}{l} \text{l'application } f : E \rightarrow B \text{ est un homéomorphisme.} \\ x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|} \end{array}$$

### Correction de l'exercice 15 ▲

**1ère solution.** Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ .  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  en vertu de théorèmes généraux et pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et pour  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $h \in \mathbb{R}^n$

$$df_x(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)h_i = \frac{1}{\|x\|_2} \sum_{i=1}^n x_i h_i = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}.$$

**2ème solution.** Soit  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Pour  $h \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 = \frac{(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2},$$

puis

$$\|x+h\|_2 - \|x\|_2 - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{2(x|h) + \|h\|_2^2}{\|x+h\|_2 + \|x\|_2} - \frac{x|h}{\|x\|_2} = \frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2}.$$

Maintenant, on sait que l'application  $x \mapsto \|x\|_2$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ . On en déduit que  $\frac{1}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\|x\|_2^2}$  et aussi que  $\|x+h\|_2 - \|x\|_2$  tend vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Ensuite, puisque  $|(x|h)| \leq \|x\|_2 \|h\|_2$  (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ), on a  $x|h \underset{h \rightarrow 0}{=} O(\|h\|_2)$  puis  $(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$ .

Finalement,  $\frac{-(\|x+h\|_2 - \|x\|_2)(x|h) + \|x\|_2 \|h\|_2^2}{(\|x+h\|_2 + \|x\|_2)\|x\|_2} \underset{h \rightarrow 0}{=} o(\|h\|_2)$  et donc

$$\|x+h\|_2 \underset{h \rightarrow 0}{=} \|x\|_2 + \frac{x|h}{\|x\|_2} + o(\|h\|_2).$$

Puisque l'application  $h \mapsto \frac{x|h}{\|x\|_2}$  est linéaire, on a redémontré que  $f$  est différentiable en tout  $x$  de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et que  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall h \in \mathbb{R}^n, df_x(h) = \frac{x|h}{\|x\|_2}$ .  
Soit  $L$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire une forme linéaire.

$$\frac{1}{\|h\|_2} (\|0+h\|_2 - \|0\|_2 - L(h)) = 1 - L\left(\frac{h}{\|h\|_2}\right).$$

Supposons que cette expression tende vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Pour  $u$  vecteur non nul donné et  $t$  réel non nul, l'expression  $1 - L\left(\frac{tu}{\|tu\|_2}\right) = 1 - \frac{t}{|t|} L\left(\frac{u}{\|u\|_2}\right)$  tend donc vers 0 quand  $t$  tend vers 0. Mais si  $t$  tend vers 0 par valeurs supérieures, on obtient  $L(u) = \|u\|_2$  et si  $t$  tend vers 0 par valeurs inférieures, on obtient  $L(u) = -\|u\|_2$  ce qui est impossible car  $u \neq 0$ . Donc  $f$  n'est pas différentiable en 0.

### Correction de l'exercice 16 ▲

On pose  $BC = a$ ,  $CA = b$  et  $AB = c$  et on note  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle  $ABC$ . Soit  $M$  un point intérieur au triangle  $ABC$ . On note  $I, J$  et  $K$  les projetés orthogonaux de  $M$  sur les droites  $(BC)$ ,  $(CA)$  et  $(AB)$  respectivement. On pose  $u =$  aire de  $MBC$ ,  $v =$  aire de  $MCA$  et  $w =$  aire de  $MAB$ . On a

$$d(M, (BC)) \times d(M, (CA)) \times d(M, (AB)) = MI \times MJ \times MK = \frac{2u}{a} \times \frac{2v}{b} \times \frac{2w}{c} = \frac{8}{abc} uv(\mathcal{A} - u - v).$$

Il s'agit alors de trouver le maximum de la fonction  $f : (u, v) \mapsto uv(\mathcal{A} - u - v)$  sur le domaine

$$T = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0, v \geq 0 \text{ et } u + v \leq \mathcal{A}\}.$$

$T$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ . En effet :

-  $\forall (u, v) \in T^2, \|(u, v)\|_1 = u + v \leq \mathcal{A}$  et donc  $T$  est bornée.

- Les applications  $\varphi_1 : (u, v) \mapsto u$ ,  $\varphi_2 : (u, v) \mapsto v$  et  $\varphi_3 : (u, v) \mapsto u + v$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  en tant que formes

linéaires sur un espace de dimension finie. Donc les ensembles  $P_1 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u \geq 0\} = \varphi_1^{-1}([0, +\infty[)$ ,

$P_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / v \geq 0\} = \varphi_2^{-1}([0, +\infty[)$  et  $P_3 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u + v \leq \mathcal{A}\} = \varphi_3^{-1}(]-\infty, \mathcal{A}])$  sont des fermés de  $\mathbb{R}^2$

en tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues. On en déduit que  $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3$  est un

fermé de  $\mathbb{R}^2$  en tant qu'intersection de fermés de  $\mathbb{R}^2$ .

Puisque  $T$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  puisque  $\mathbb{R}^2$  est de dimension finie et d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

$f$  est continue sur le compact  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  en tant que polynôme à plusieurs variables et donc  $f$  admet un maximum sur  $T$ .

Pour tout  $(u, v)$  appartenant à la frontière de  $T$ , on a  $f(u, v) = 0$ . Comme  $f$  est strictement positive sur  $\overset{\circ}{T} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u > 0, v > 0 \text{ et } u + v < \mathcal{A}\}$ ,  $f$  admet son maximum dans  $\overset{\circ}{T}$ . Puisque  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\overset{\circ}{T}$  qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , si  $f$  admet un maximum en  $(u_0, v_0) \in \overset{\circ}{T}$ ,  $(u_0, v_0)$  est nécessairement un point critique de  $f$ .

Soit  $(u, v) \in \overset{\circ}{T}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(\mathcal{A} - 2u - v) = 0 \\ u(\mathcal{A} - u - 2v) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u + v = \mathcal{A} \\ u + 2v = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow u = v = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Puisque  $f$  admet un point critique et un seul à savoir  $(u_0, v_0) = (\frac{\mathcal{A}}{3}, \frac{\mathcal{A}}{3})$ ,  $f$  admet son maximum en ce point et ce maximum vaut  $f(u_0, v_0) = \frac{\mathcal{A}^3}{27}$ . Le maximum du produit des distances d'un point  $M$  intérieur au triangle  $ABC$  aux cotés de ce triangle est donc  $\frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$ .

**Remarque.** On peut démontrer que pour tout point  $M$  intérieur au triangle  $ABC$ , on a  $M = \text{bar}((A, \text{aire de } MBC), (B, \text{aire de } MAC), (C, \text{aire de } MAB))$ . Si maintenant  $M$  est le point en lequel on réalise le maximum, les trois aires sont égales et donc le maximum est atteint en  $G$  l'isobarycentre du triangle  $ABC$ .

### Correction de l'exercice 17 ▲

Soient  $A$  et  $B$  les points du plan de coordonnées respectives  $(0, a)$  et  $(a, 0)$  dans un certain repère  $\mathcal{R}$  orthonormé. Soit  $M$  un point du plan de coordonnées  $(x, y)$  dans  $\mathcal{R}$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$f(x, y) = \|\overrightarrow{MA}\|_2 + \|\overrightarrow{MB}\|_2 = MA + MB \geq AB \text{ avec égalité si et seulement si } M \in [AB].$$

Donc  $f$  admet un minimum global égal à  $AB = a\sqrt{2}$  atteint en tout couple  $(x, y)$  de la forme  $(\lambda a, (1 - \lambda)a)$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ .

### Correction de l'exercice 18 ▲

Puisque la fonction  $\text{ch}$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2 \frac{\sin(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f'' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{1 - \cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f'' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

De même,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -2 \frac{\cos(2x) \text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right)$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= -2 \cos(2x) \frac{2 \text{ch}^3(2y) - 4 \text{sh}^2(2y) \text{ch}(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) \text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) \\ &= -4 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)} (-\text{ch}^2(2y) + 2) f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + 4 \frac{\cos^2(2x) (\text{ch}^2(2y) - 1)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right). \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{\text{ch}^2(2y)}{4} \Delta g(x, y) = -2 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right) + \left( 1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} \right) f'' \left( \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \right).$$

Maintenant, pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $-1 \leq \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \leq 1$  et d'autre part, l'expression  $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} = \cos(2x)$  décrit  $[-1, 1]$  quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ . Donc  $\left\{ \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} = [-1, 1]$ . Par suite,



$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1], (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0.$$

On cherche une application  $f$  de classe  $C^2$  sur  $] -1, 1[$ . Or  $\left| \frac{\cos(2x)}{\operatorname{ch}(2y)} \right| = 1 \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) \Leftrightarrow |\cos(2x)| = \operatorname{ch}(2y) = 1 \Leftrightarrow y = 0$  et  $x \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ . Donc

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left( \frac{k\pi}{2}, 0 \right), k \in \mathbb{Z} \right\}, \Delta g(x,y) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in ] -1, 1[, (1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in ] -1, 1[, ((1-t^2)f'(t))' = 0 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in ] -1, 1[, f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 / \forall t \in ] -1, 1[, f(t) = \lambda \operatorname{argth} t + \mu.$$

De plus,  $f$  n'est pas constante si et seulement si  $\mu = 0$ .

L'application  $t \mapsto \operatorname{argth} t$  convient.

### Correction de l'exercice 19 ▲

Soit  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ . La matrice jacobienne de  $f$  en  $(x,y)$  s'écrit  $\begin{pmatrix} c(x,y) & -s(x,y) \\ s(x,y) & c(x,y) \end{pmatrix}$  où  $c$  et  $s$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que  $c^2 + s^2 = 1$  (\*). Il s'agit dans un premier temps de vérifier que les fonctions  $c$  et  $s$  sont constantes sur  $\mathbb{R}^2$ .

Puisque  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , d'après le théorème de SCHWARZ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ . Ceci s'écrit encore  $\frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} =$

$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix}$  ou enfin

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix} (**).$$

En dérivant (\*) par rapport à  $x$  ou à  $y$ , on obtient les égalités  $c \frac{\partial c}{\partial x} + s \frac{\partial s}{\partial x} = 0$  et  $c \frac{\partial c}{\partial y} + s \frac{\partial s}{\partial y} = 0$ . Ceci montre que les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$  sont orthogonaux au vecteur non nul  $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$  et sont donc colinéaires.

Mais l'égalité (\*\*) montre que les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial x} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix}$  sont aussi orthogonaux l'un à l'autre.

Finalement, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , les deux vecteurs  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial x}(x,y) \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{\partial c}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial s}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$  sont nuls. On en déduit que les deux applications  $c$  et  $s$  sont constantes sur  $\mathbb{R}^2$  et donc, il existe  $\theta$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ , la matrice jacobienne de  $f$  en  $(x,y)$  est  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

Soit  $g$  la rotation d'angle  $\theta$  prenant la même valeur que  $f$  en  $(0,0)$ .  $f$  et  $g$  ont mêmes différentielles en tout point et coïncident en un point. Donc  $f = g$  et  $f$  est une rotation affine.

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^2$  dont la différentielle en tout point est une rotation.  
Alors  $f$  est une rotation affine.