



Suites et séries de matrices

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 **

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n$ (a réel strictement positif donné).

[Correction ▼](#)

[005864]

Exercice 2 ***

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $p \geq 1$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$ (disque unité ouvert).
- (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$
- (3) La série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge.

[Correction ▼](#)

[005865]

Exercice 3 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 4/3 & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 \end{pmatrix}$. Convergence et somme de la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$.

[Correction ▼](#)

[005866]

Exercice 4 ** I

On munit $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\| \cdot \|$. Soit A un élément de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tel que $\|A\| < 1$. Montrer que la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I - A)^{-1}$.

En déduire que $\|(I - A)^{-1} - (I + A)\| \leq \frac{\|A\|^2}{1 - \|A\|}$.

[Correction ▼](#)

[005867]

Exercice 5 ** I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$, $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{R})$.

[Correction ▼](#)

[005868]

Exercice 6 ** I

Calculer $\exp(tA)$, $t \in \mathbb{R}$, si

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -10 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

[Correction ▼](#)

[005869]

Exercice 7 **

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Calculer $\ln(I_3 + tA) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^n}{n} A^n$ en précisant les valeurs de t pour lesquelles la série converge.

[Correction ▼](#)

[005870]

Exercice 8 ** I Exponentielle d'un endomorphisme anti-symétrique de \mathbb{R}^3

- (a) Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Pour $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, on pose $f_{\vec{\omega}}(\vec{x}) = \vec{\omega} \wedge \vec{x}$. Vérifier que $f_{\vec{\omega}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$.
(b) Réciproquement, soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $\vec{\omega}$ unique tel que $f = f_{\vec{\omega}}$.
- Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\exp(f_{\vec{\omega}})$ est une rotation dont on déterminera l'axe (quand celui-ci est défini) et l'angle.

[Correction ▼](#)

[005871]

Exercice 9 **

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, calculer $\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p$.

[Correction ▼](#)

[005872]

Exercice 10 **

Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exp(A)$ est un polynôme en A .

[Correction ▼](#)

[005873]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire $A_n = \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} & -\frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} \\ \frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} \end{pmatrix}$. Les sommes des carrés des deux nombres

$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ et $\frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ est égale à 1. Donc il existe un réel $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ tel que $\cos(\theta_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin(\theta_n) = \frac{a/n}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$. De plus, $\cos(\theta_n) > 0$ et $\sin(\theta_n) > 0$ et donc on peut prendre

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{a}{n}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a alors

$$A_n^n = \left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right)^n \begin{pmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \end{pmatrix}^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

Maintenant, $\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \exp\left(\frac{a^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1)$.

D'autre part, $n\theta_n = n \arctan\left(\frac{a}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \times \frac{a}{n} = a$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n = 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

$$\forall a > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

(3) \Rightarrow (2). On sait que si la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$.

(2) \Rightarrow (1). Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour tout entier naturel n , $A^n X = \lambda^n X$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$, on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n X = 0$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n X = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$.

Ainsi, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n = 0$ alors $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$.

(1) \Rightarrow (3). Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) \subset B_o(0, 1)$. On sait (voir exercice ?? : décomposition de DUNFORD) qu'il existe deux matrices D et N telles que

- 1) $A = D + N$
- 2) D diagonalisable
- 3) N nilpotente
- 4) $DN = ND$.

De plus, les valeurs propres de D sont les valeurs propres de A .

On note k l'indice de nilpotence de N . Puisque les matrices D et N convergent, la formule du binôme de NEWTON permet d'écrire pour $n \geq k$

$$A^n = (D + N)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} D^{n-j} N^j = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} D^{n-j} N^j.$$

Il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale Δ tel que $D = P\Delta P^{-1}$. Mais alors, $\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\forall n \geq j$, $\binom{n}{j} D^{n-j} N^j = P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times P N^j$.

Soit $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Vérifions tout d'abord que la série de terme général $\binom{n}{j} \Delta^{n-j}$, $n \geq j$ converge. Posons $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$. Alors $\forall n \geq j$, $\binom{n}{j} \Delta^{n-j} = \text{diag} \left(\binom{n}{j} \lambda_1^{n-j}, \dots, \binom{n}{j} \lambda_p^{n-j} \right)$. Maintenant, si λ est une valeur propre de Δ (et donc de A), $\binom{n}{j} \lambda^{n-j} = \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!} \lambda^{n-j} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^j \lambda^{n-j} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n^2} \right)$ car $|\lambda| < 1$ et donc la série de terme général $\binom{n}{j} \lambda^{n-j}$, $n \geq j$, converge.

Ainsi, la série de terme général $\binom{n}{j} \Delta^{n-j}$ converge. D'autre part, l'application $M \mapsto P \times M \times PN^j$ est continue sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ en tant qu'endomorphisme d'un espace de dimension finie. On en déduit que la série de terme général $P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times PN^j$ converge.

Finalement, pour chaque $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la série de terme général $P \times \binom{n}{j} \Delta^{n-j} \times PN^j$ converge et donc la série de terme général A^n converge car est somme de $j+1$ séries convergentes.

Correction de l'exercice 3 ▲

$\chi_A = \begin{vmatrix} 4/3 - X & -5/6 \\ 5/3 & -7/6 - X \end{vmatrix} = X^2 - \frac{1}{6}X - \frac{1}{6} = (X - \frac{1}{2})(X + \frac{1}{3})$. Par suite, $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n A^k = P \left(\sum_{k=0}^n D^k \right) P^{-1} = P \text{diag} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k, \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right) P^{-1}.$$

Puisque $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{3}$ sont dans $] -1, 1[$, les séries numériques de termes généraux respectifs $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $\left(-\frac{1}{3}\right)^k$ convergent. Il en est de même de la série de terme général D^k . Maintenant, l'application $M \mapsto PMP^{-1}$, converge est continue car linéaire sur un espace de dimension finie et on en déduit que la série de terme général A^k converge. De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} PD^n P^{-1} = P \left(\sum_{n=0}^{+\infty} D^n \right) P^{-1} \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto PMP^{-1}) \\ &= P \text{diag} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) P^{-1} = P \text{diag} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}, \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} \right) P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} & -\frac{5}{4} \\ \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Remarque. D'après l'exercice suivant, la matrice obtenue est $(I - A)^{-1}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| < 1$. Pour tout entier naturel n , on a $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Puisque $\|A\| < 1$, la série numérique de terme général $\|A\|^n$, $n \in \mathbb{N}$, converge. Il en est de même de la série de terme général $\|A^n\|$ et donc la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge absolument. Puisque $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est complet en tant que \mathbb{C} espace de dimension finie, on en déduit que la série de terme général A^n , $n \in \mathbb{N}$, converge. De plus,

$$\begin{aligned}(I-A) \sum_{n=0}^{+\infty} A^n &= (I-A) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n A^k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((I-A) \sum_{k=0}^n A^k \right) \text{ (par continuité de l'application } M \mapsto (I-A)M) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (I-A^{n+1}) = I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A^{n+1} = 0 \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}, \|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \right).\end{aligned}$$

Ainsi, la matrice $I-A$ est inversible à droite et donc inversible et de plus, $(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. On en déduit encore

$$\|(I-A)^{-1} - (I+A)\| = \left\| \sum_{n=2}^{+\infty} A^n \right\| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \|A\|^n = \frac{\|A\|^2}{1-\|A\|}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On sait que d'une part $\det(\exp(A)) \neq 0$ et d'autre part $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right)$. Par continuité du déterminant, on a donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \det \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right) = \det(\exp(A)) \neq 0$. Par suite, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geq p_0$, $\det \left(\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \right) \neq 0$ et donc tel que $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in GL_n(\mathbb{C})$.

Correction de l'exercice 6 ▲

$$1. \chi_A = \begin{vmatrix} 3-X & 2 & 2 \\ 1 & -X & 1 \\ -1 & 1 & -X \end{vmatrix} = (3-X)(X^2-1) - (-2X-2) - (2X+2) = -(X+1)(X-1)(X-3).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \times \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$. En évaluant les deux membres de cette égalité en $-1, 1$ et 3 , on obtient

$$\begin{cases} a_n - b_n + c_n = (-1)^n \\ a_n + b_n + c_n = 1 \\ 9a_n + 3b_n + c_n = 3^n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ a_n + c_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) \\ 8a_n + \frac{3}{2}(1 - (-1)^n) + \frac{1}{2}(1 + (-1)^n) = 3^n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{8}(3^n - 2 + (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ c_n = \frac{1}{8}(-3^n + 6 + 3(-1)^n) \end{cases}.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON fournit alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \frac{1}{8}((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3).$$

Maintenant,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et donc, pour tout réel t ,

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \cdot \frac{1}{8} ((3^n - 2 + (-1)^n)A^2 + 4(1 - (-1)^n)A + (-3^n + 6 + 3(-1)^n)I_3) \\
&= \frac{e^{3t} - 2e^t + e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \frac{4(e^t - e^{-t})}{8} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{-e^{3t} + 6e^t + 3e^{-t}}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8e^{3t} & 8e^{3t} - 8e^t & 8e^{3t} - 8e^t \\ 2e^{3t} - 2e^{-t} & 2e^{3t} + 6e^{-t} & 2e^{3t} - 2e^{-t} \\ -2e^{3t} + 2e^{-t} & -2e^{3t} + 8e^t - 6e^{-t} & 2e^{3t} + 8e^t + 2e^{-t} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4e^{3t} & 4e^{3t} - 4e^t & 4e^{3t} - 4e^t \\ e^{3t} - e^{-t} & e^{3t} + 3e^{-t} & e^{3t} - e^{-t} \\ -e^{3t} + e^{-t} & -e^{3t} + 4e^t - 3e^{-t} & e^{3t} + 4e^t + e^{-t} \end{pmatrix}.$$

2. $\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & 1 \\ 6 & 4-X & 2 \\ -10 & -4 & -2-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2 - 2X) - 6(-X+2) - 10(X-2) = (X-2)[-X(X-4) + 6 - 10] = -(X-2)(X^2 - 4X + 4) = -(X-2)^3$. On est dans la situation où A a une unique valeur propre. D'après le théorème de CAYLEY-HAMILTON, $(A - 2I_3)^3 = 0$ et donc pour tout réel t ,

$$\begin{aligned}
\exp(tA) &= \exp(t(A - 2I_3) + 2tI_3) = \exp(t(A - 2I_3)) \times \exp(2tI_3) \text{ (car les matrices } t(A - 2I_3) \text{ et } 2tI_3 \text{ commutent)} \\
&= \left(I_3 + t(A - 2I_3) + \frac{t^2}{2}(A - 2I_3)^2 \right) \times e^{2t}I_3 \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \frac{t^2 e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 \\ -10 & -4 & -4 \end{pmatrix} + \frac{t^2 e^{2t}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ (2t^2+6t)e^{2t} & (t^2+2t+1)e^{2t} & (t^2+2t)e^{2t} \\ (-2t^2-10t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) = \begin{pmatrix} (2t+1)e^{2t} & te^{2t} & te^{2t} \\ (2t^2+6t)e^{2t} & (t^2+2t+1)e^{2t} & (t^2+2t)e^{2t} \\ (-2t^2-10t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} & (-t^2-4t)e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

$$\chi_A = \begin{vmatrix} -X & 1/2 & -2 \\ 1/2 & -X & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 - X \end{vmatrix} = -X(X^2 + \frac{1}{2}X) - \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}X - \frac{1}{4}) = -X^2(X + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(X + \frac{1}{2}) = -(X + \frac{1}{2})^2(X - \frac{1}{2}).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^n par χ_A s'écrit $X^n = Q_n \chi_A + a_n X^2 + b_n X + c_n$ où $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$.

On évalue les deux membres de cette égalité en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ et on obtient $\frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\frac{a_n}{4} - \frac{b_n}{2} + c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Puis en dérivant les deux membres de l'égalité et en évaluant en $-\frac{1}{2}$, on obtient $-a_n + b_n = n\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. Maintenant,

$$\begin{cases} \frac{a_n}{4} + \frac{b_n}{2} + c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{a_n}{4} - \frac{b_n}{2} + c_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -a_n + b_n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \frac{a_n}{2} + 2c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ -a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = -2n\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ c_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A^2 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)A + \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3$ avec $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. On en déduit que pour $|t| < 2$,

$$\begin{aligned} \ln(I_3 + tA) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} A^n \\ &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A^2 + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)\right)A \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}t^n}{n} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2n-3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)I_3. \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \ln(I_3 + tA) &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A^2 \\ &\quad + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)A \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(t/2)^n}{n} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} (t/2)^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-t/2)^n}{n}\right)I_3 \\ &= \left(\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{1-t/2} - 1\right) - \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right)A^2 + \left(\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) - \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right)A \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{1-t/2} - 1\right) + 3\ln\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right)I_3 \\ &= \left(\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t}\right) \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} + \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\ln\left(1 + \frac{t}{2}\right) + \frac{2t}{2-t} + 3\ln\left(1 - \frac{t}{2}\right)\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\forall t \in]-2, 2[, \ln(I_3 + tA) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) & \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) - \frac{2t}{2-t} \\ \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) & \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) & -\ln\left(\frac{2+t}{2-t}\right) + \frac{2t}{2-t} \\ 0 & 0 & \ln\left(1 - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

1. (a) Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. $f_{\vec{\omega}}$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 par bilinéarité du produit vectoriel. De plus, pour $(\vec{x}, \vec{y}) \in (\mathbb{R}^3)^2$,

$$f_{\vec{\omega}}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) \cdot \vec{y} = [\vec{\omega}, \vec{x}, \vec{y}] = -[\vec{\omega}, \vec{y}, \vec{x}] = -(\vec{\omega} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{x} = -\vec{x} \cdot f_{\vec{\omega}}(\vec{y}).$$

Donc,

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, f_{\vec{\omega}} \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3).$$

- (b) Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$.
 $\vec{\omega} \mapsto f_{\vec{\omega}}$

• Vérifions que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{A}(\mathbb{R}^3))$. Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} (\varphi(\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2))(\vec{x}) &= f_{\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2}(\vec{x}) = (\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2) \wedge \vec{x} = \lambda_1 (\vec{\omega}_1 \wedge \vec{x}) + \lambda_2 (\vec{\omega}_2 \wedge \vec{x}) \\ &= \lambda_1 f_{\vec{\omega}_1}(\vec{x}) + \lambda_2 f_{\vec{\omega}_2}(\vec{x}) = ((\lambda_1 \varphi(\vec{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{\omega}_2))(\vec{x})) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(\lambda_1 \vec{\omega}_1 + \lambda_2 \vec{\omega}_2) = \lambda_1 \varphi(\vec{\omega}_1) + \lambda_2 \varphi(\vec{\omega}_2)$. On a montré que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathcal{A}(\mathbb{R}^3))$.

• Vérifions que φ est injective. Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$.

$$\vec{\omega} \in \text{Ker}(\varphi) \Rightarrow f_{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3, \vec{\omega} \wedge \vec{x} = \vec{0}.$$

On applique alors ce dernier résultat à deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} . On obtient $\vec{\omega} \wedge \vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ et donc $\vec{x} \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) = \{\vec{0}\}$. On a montré que φ est injective.

• Enfin, $\dim(\mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \frac{3 \times (3-1)}{2} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) < +\infty$. On en déduit que φ est un isomorphisme de \mathbb{R}^3 sur $\mathcal{A}(\mathbb{R}^3)$. En particulier,

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^3), \exists \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3 / f = f_{\vec{\omega}}.$$

2. Soit $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$. Si $\vec{\omega} = \vec{0}$, alors $f_{\vec{\omega}} = 0$ et donc $\exp(f_{\vec{\omega}}) = Id_{\mathbb{R}^3}$.

On suppose dorénavant $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. On pose $\vec{e}_3 = \frac{1}{\|\vec{\omega}\|} \vec{\omega}$ puis on complète la famille orthonormale (\vec{e}_3) en une base orthonormale directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (en particulier $\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2$).

• Puisque \vec{e}_3 est colinéaire à $\vec{\omega}$, $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_3) = \vec{0}$. On en déduit que

$$\exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_3) = Id(\vec{e}_3) + f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_3) + \frac{1}{2} f_{\vec{\omega}}^2(\vec{e}_3) + \frac{1}{6} f_{\vec{\omega}}^3(\vec{e}_3) + \dots = \vec{e}_3.$$

• D'autre part, $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_1 = \|\vec{\omega}\| \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \|\vec{\omega}\| \vec{e}_2$ et de même $f_{\vec{\omega}}(\vec{e}_2) = -\|\vec{\omega}\| \vec{e}_1$.

On en déduit que $f_{\vec{\omega}}^2(\vec{e}_1) = -\|\vec{\omega}\|^2 \vec{e}_1$ et donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{\vec{\omega}}^{2n}(\vec{e}_1) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n} \vec{e}_1 \quad \text{puis} \quad f_{\vec{\omega}}^{2n+1}(\vec{e}_1) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n+1} \vec{e}_2.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_1) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\vec{\omega}}^n(\vec{e}_1) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n}}{(2n)!} \right) \vec{e}_1 + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \vec{e}_2 \quad (\text{somme de deux séries convergentes}) \\ &= \cos(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_1 + \sin(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_{\vec{\omega}}^{2n}(\vec{e}_2) = (-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n} \vec{e}_2 \quad \text{puis} \quad f_{\vec{\omega}}^{2n+1}(\vec{e}_2) = -(-1)^n \|\vec{\omega}\|^{2n+1} \vec{e}_1.$$

et donc

$$\begin{aligned} \exp(f_{\vec{\omega}})(\vec{e}_2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f_{\vec{\omega}}^n(\vec{e}_2) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n}}{(2n)!} \right) \vec{e}_2 - \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\|\vec{\omega}\|^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) \vec{e}_1 \\ &= -\sin(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_1 + \cos(\|\vec{\omega}\|) \vec{e}_2. \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de $\exp(f_{\vec{\omega}})$ dans la base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est $\begin{pmatrix} \cos(\|\vec{\omega}\|) & -\sin(\|\vec{\omega}\|) & 0 \\ \sin(\|\vec{\omega}\|) & \cos(\|\vec{\omega}\|) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

et $\exp(f_{\vec{\omega}})$ est la rotation d'angle $\|\vec{\omega}\|$ autour de $\vec{\omega}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme sous-multiplicative notée $\|\cdot\|$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\left\| \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p} \right)^p \right\| = \left\| \sum_{k=0}^p \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right) A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^p \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k.$$

Maintenant, $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{p \times (p-1) \times \dots \times (p-k+1)}{\underbrace{p \times p \times \dots \times p}_k} \right) \geq 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^p \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| \|A\|^k = \sum_{k=0}^p \frac{\|A\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|A\|^p}{p} \right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} e^{\|A\|} - e^{\|A\|} = 0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} - \left(I + \frac{A}{p} \right)^p$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!}$ tend vers $\exp(A)$ quand p tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(I + \frac{A}{p} \right)^p$.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left(I_n + \frac{A}{p} \right)^p.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Puisque χ_A est de degré n , la division euclidienne de X^k par χ_A s'écrit

$$X^k = Q_k \times \chi_A + a_{n-1}^{(k)} X^{n-1} + \dots + a_1^{(k)} X + a_0^{(k)} \quad \text{où } Q_k \in \mathbb{R}[X] \text{ et } (a_0^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)}) \in \mathbb{C}^n.$$

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON montre alors que $A^k = a_{n-1}^{(k)}A^{n-1} + \dots + a_1^{(k)}A + a_0^{(k)}I_n$.

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, A^k \in \text{Vect}(A^{n-1}, \dots, A, I_n)$ puis $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$. Enfin, puisque $\text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en tant que sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, $\exp(A) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^p \frac{A^k}{k!} \in \text{Vect}(A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A, I_n)$.

On a montré que

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A].}$$
