Applications linéaires continues, normes matricielles

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 *

On munit $E=\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|\ \|_\infty$ définie par : $\forall P\in E,\ \|P\|_\infty=\text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(n)}(0)}{n!}\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\}$.

1. Vérifier brièvement que $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.
2. Soit f l'endomorphisme de E défini par $\forall P\in E,\ f(P)=XP$. Démontrer que l'application f est continue sur $(E,\|\ \|_\infty)$ et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005854]

Exercice 2 **

On munit $E=\ell^\infty(\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites bornées de la norme $\|u\|_\infty=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$.

On considère les endomorphismes Δ et C de $\ell^\infty(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall u\in E,\ \Delta(u)=v \text{ où } \forall n\in\mathbb{N},\ v_n=u_{n+1}-u_n \text{ et } \forall u\in E,\ C(u)=w \text{ où } \forall n\in\mathbb{N},\ w_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n u_k.$$

Montrer que Δ et C sont continus sur $(E,\|\ \|_\infty)$ et calculer leur norme.

Correction ▼ [005855]

Exercice 3 *** I

On munit $E=C^0([0,1],\mathbb{R})$ de la norme 1 définie par $\forall f\in E,\ \|f\|_1=\int_0^1|f(t)|\,dt$.

On pose $T:\begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & Tf:\begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \int_0^x f(t)\,dt\end{array}\end{array}$ et on admet que T est un endomorphisme de E.

1. Démontrer que T est continu sur $(E,\|\ \|_1)$ et déterminer $|||T|||$.
2. Vérifier que la borne supérieure n'est pas atteinte.

Correction ▼ [005856]

Exercice 4 **

On munit $E=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme N définie par $\forall A\in E,\ N(A)=\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Sup}}\left\{\sum_{j=1}^n|a_{i,j}|\right\}$ (on admet que N est une norme sur E).

Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\forall A\in E,\ f(A)=\text{Tr}(A)$. Démontrer que l'application f est continue sur (E,N) et déterminer $|||f|||$.

Correction ▼ [005857]

Exercice 5 ***

Déterminer $s=\text{Sup}\left\{\frac{\|AB\|}{\|A\|\|B\|},\ (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\}$ quand $\|\ \|$ est

1. $\| \|_1$,
2. $\| \|_2$,
3. $\| \|_\infty$.

Correction ▼ [005858]

Exercice 6 *

Une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$), est-elle nécessairement une « norme trois barres » ?

Correction ▼ [005859]

Exercice 7 **

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant k(A)N(B)$.

Correction ▼ [005860]

Exercice 8 **

Existe-t-il une norme N sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ($n \geqslant 2$) telle que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) = N(A)N(B)$.

Correction ▼ [005861]

Exercice 9 ***

On pose $\forall X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|X\|_\infty = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i|$.

Déterminer les normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ respectivement associées aux normes $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On notera $||| \ |||_1$ et $||| \ |||_\infty$ ces normes.

Correction ▼ [005862]

Exercice 10 **I

Pour $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Pour $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\rho(A)$ le rayon spectral de A c'est-à-dire $\rho(A) = \text{Max}\{|\lambda|,\ \lambda \in \text{Sp}(A)\}$.
Montrer que $\forall A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_2 = \rho(A)$ où $|||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\right\}$.

Correction ▼ [005863]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. • Soit $P \in E$. Si on pose $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > n$, $a_k = 0$. Donc $\|P\|_\infty = \text{Sup}\left\{\left|\frac{P^{(k)}(0)}{k!}\right|,\ k \in \mathbb{N}\right\} = \text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ existe dans $\mathbb{R}$.
   • $\forall P \in E$, $\|P\|_\infty \geqslant 0$.
   • Soit $P \in E$. $\|P\|_\infty = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ |a_k| \leqslant 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = 0 \Rightarrow P = 0$.
   • Soient $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda P\|_\infty = \text{Max}\{|\lambda a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda|\text{Max}\{|a_k|,\ 0 \leqslant k \leqslant n\} = |\lambda|\|P\|_\infty$.
   • Soient $P = \sum_{k \geqslant 0} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \geqslant 0} b_k X^k$ deux polynômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $|a_k + b_k| \leqslant |a_k| + |b_k| \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$ et donc $\|P+Q\|_\infty \leqslant \|P\|_\infty + \|Q\|_\infty$.

$$\boxed{\|\ \|_\infty \text{ est une norme sur } E.}$$

2. $\forall P \in E$, $\|f(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$ et donc $\forall P \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty} = 1$. On en déduit que $\text{Sup}\left\{\frac{\|f(P)\|_\infty}{\|P\|_\infty},\ P \in E \setminus \{0\}\right\} = 1$. Ceci montre tout à la fois que f est continue sur $(E, \|\ \|_\infty)$ et $|||f||| = 1$.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||f||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

(La linéarité de Δ est claire et de plus Δ est un endomorphisme de E car si u est une suite bornée, $\Delta(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ |\Delta(u)_n| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| \leqslant 2\|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|\Delta(u)\|_\infty \leqslant 2\|u\|_\infty.$$

Ceci montre que Δ est continu sur E et $|||\Delta||| \leqslant 2$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|\Delta(u)\|_\infty = 2$. En résumé,
• $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 2$,
• $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|\Delta(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 2$.
On en déduit que

$$\boxed{\Delta \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||\Delta||| = 2.}$$

(La linéarité de C est claire et C est un endomorphisme de E car si u est bornée, $C(u)$ l'est encore. Plus précisément,)

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N},\ |(C(u))_n| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty \text{ et donc } \forall u \in E,\ \|C(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

Par suite T est continue sur E et $|||T||| \leqslant 1$. Ensuite, si u est la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$ alors u est un élément non nul de E tel que $\|u\|_\infty = 1$ et $\|C(u)\|_\infty = 1$. En résumé,
• $\forall u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$,
• $\exists u \in E \setminus \{0\}$, $\frac{\|C(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} = 1$.
On en déduit que

$$\boxed{C \text{ est continu sur } (E, \|\ \|_\infty) \text{ et } |||C||| = 1.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned}\|Tf\|_1 &= \int_0^1 |Tf(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \|f\|_1\,dx = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Ceci montre que $\forall f \in E\setminus\{0\}$, $\frac{\|Tf\|_1}{\|f\|_1} \leqslant 1$. Ceci montre que T est continu sur $(E,\|\ \|_1)$ et que $|||T||| \leqslant 1$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, posons $f_n(x) = (1-x)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 (1-x)^n\,dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},$$

puis pour $x \in [0,1]$, $Tf_n(x) = \int_0^x (1-t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}(1-(1-x)^{n+1})$ et donc

$$\|Tf_n\|_1 = \int_0^1 |Tf_n(x)|\,dx = \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-(1-x)^{n+1})\,dx = \frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|||T||| \geqslant \frac{\|Tf_n\|_1}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{n+2}$.
En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leqslant |||T||| \leqslant 1$ et donc $|||T||| = 1$.

$$\boxed{T \text{ est continu sur } (E,\|\ \|_1) \text{ et } |||T||| = 1.}$$

2. Supposons qu'il existe $f \in E\setminus\{0\}$ tel que $\|Tf\|_1 = \|f\|_1$. On en déduit que chaque inégalité écrite au début de la question 1) est une égalité et en particulier $\int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt\right) dx$ ou encore $\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt\right) dx = 0$. Par suite, $\forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 |f(t)|\,dt - \int_0^x |f(t)|\,dt = 0$ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle) puis en dérivant la dernière inégalité, $\forall x \in [0,1]$, $|f(x)| = 0$ et finalement $f = 0$. Ceci est une contradiction et donc $|||T|||$ n'est pas atteinte.

Correction de l'exercice 4 ▲

L'application f est linéaire de (E,N) dans $(\mathbb{R},|\ |)$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in E$.

$$\begin{aligned}|f(A)| &= |\mathrm{Tr}(A)| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right) \leqslant \sum_{i=1}^n N(A) = nN(A).\end{aligned}$$

Ceci montre déjà que f est continue sur (E,N) et que $|||f||| \leqslant n$. De plus, si $A = I_n \neq 0$, $\frac{|f(A)|}{N(A)} = \frac{n}{1} = n$. Donc

$$\boxed{f \text{ est continue sur } (E,N) \text{ et } |||f||| = n.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

• $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty = \mathrm{Max}\{|a_{i,j}|,\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$.
Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Posons $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$.
Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$|c_{i,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}| \leqslant \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty\|B\|_\infty = n\|A\|_\infty\|B\|_\infty,$$

et donc, $\|AB\|_\infty \leqslant n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Ainsi, $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty} \leqslant n$.
De plus, pour $A_0 = B_0 = (1)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \neq 0$, $\|A_0\|_\infty = \|B_0\|_\infty = 1$ puis $\|A_0B_0\|_\infty = \|nA_0\|_\infty = n$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_\infty}{\|A_0\|_\infty\|B_0\|_\infty} = n$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_\infty}{\|A\|_\infty\|B\|_\infty},\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\} = n.}$$

En particulier, $\|\ \|_\infty$ n'est pas une norme sous-multiplicative.
• $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_1 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_1 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |c_{i,j}| = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right| \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n |a_{i,k}||b_{k,j}|\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant n} |a_{i,k}||b_{k,j}| \\
&\sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} |a_{i,j}||b_{k,l}| = \|A\|_1\|B\|_1.
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1} \leqslant 1$.
De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_= E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_1}{\|A_0\|_1\|B_0\|_1} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_1}{\|A\|_1\|B\|_1},\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\} = 1.}$$

En particulier, $\|\ \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
• $\forall A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2}$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2^2 &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} c_{i,j}^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}\right)^2 \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j}^2\right) \text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\
&= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^n b_{l,j}^2\right) = \sum_{1\leqslant i,j,k,l\leqslant n} a_{i,k}^2 b_{l,j}^2 = \left(\sum_{1\leqslant i,k\leqslant n} a_{i,k}^2\right)\left(\sum_{1\leqslant j,l\leqslant n} b_{l,j}^2\right) = \|A\|_2\|B\|_2
\end{aligned}$$

Donc $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\setminus\{0\})^2$, $\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2} \leqslant 1$.
De plus, pour $A_0 = B_0 = E_{1,1}$, on a $A_0B_= E_{1,1}$ et donc $\frac{\|A_0B_0\|_2}{\|A_0\|_2\|B_0\|_2} = 1$. Ceci montre que

$$\boxed{\mathrm{Sup}\left\{\frac{\|AB\|_2}{\|A\|_2\|B\|_2},\ (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\setminus\{0\})^2\right\} = 1}$$

En particulier, $\|\ \|_2$ est une norme sous-multiplicative.

Correction de l'exercice 6 ▲

Une « norme trois barres » sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nécessairement sous-multiplicative. L'exercice précédent montre qu'il existe des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne sont pas sous-multiplicatives (par exemple $\|\ \|_\infty$). Donc une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une « norme trois barres ».

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit N une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après l'exercice 5, $\| \|_1$ est une norme sous-multiplicative.
Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, N et $\| \|_1$ sont des normes équivalentes. Par suite, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $\alpha\| \|_1 \leqslant N \leqslant \beta\| \|_1$.
Pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N(AB) \leqslant \beta\|AB\|_1 \leqslant \beta\|A\|_1\|B\|_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$$

et le réel $k = \frac{\beta}{\alpha^2}$ est un réel strictement positif tel que $\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $N(AB) \leqslant kN(A)N(B)$.
Remarque. Le résultat précédent signifie que $N' = \frac{1}{K}N$ est une norme sous-multiplicative car pour $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$,

$$N'(AB) = \tfrac{1}{k^2}N(AB) \leqslant \tfrac{1}{k^2}N(A)N(B) = \tfrac{1}{k}N(A)\tfrac{1}{k}N(B) = N'(A)N'(B).$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Non, car si $A = E_{1,1} \neq 0$ et $B = E_{2,2} \neq 0$ alors $AB = 0$ puis $N(AB) < N(A)N(B)$.

Correction de l'exercice 9 ▲

• Pour $\| \|_1$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j|\right) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) \\
&\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|\right)\mathrm{Max}\left\{\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\} = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\times\|X\|_1,
\end{aligned}$$

en notant $C_1,\ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 \leqslant \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.
Soit alors $j_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|C_{j_0}\|_1 = \mathrm{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$. On note X_0 le vecteur colonne dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0-ème qui est égale à 1. X_0 est un vecteur non nul tel que

$$\|AX_0\|_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j_0}| = \mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}\times\|X_0\|_1.$$

En résumé,
(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \leqslant \mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$,
(2) $\exists X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_1}{\|X_0\|_1} = \mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
On en déduit que $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_1 = \mathrm{Max}\left\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\right\}$.
• Pour $\| \|_\infty$. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ puis $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
|(AX)_i| &= \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}||x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right)\|X\|_\infty \\
&\leqslant \mathrm{Max}\left\{\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\|X\|_\infty = \mathrm{Max}\{\|L_k\|_1,\ 1\leqslant k\leqslant n\}\times\|X\|_\infty,
\end{aligned}$$

en notant $L_1,\ldots, L_n$ les lignes de la matrice A. Donc, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty \leqslant \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.
Soit alors $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \mathrm{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$. On pose $X_0 = (\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ où $\forall j \in [\![1,n]\!]$, ε_j est un élément de $\{-1,1\}$ tel que $a_{i_0,j} = \varepsilon_j|a_{i_0,j}|$ (par exemple, $\varepsilon_j = \frac{a_{i_0,j}}{|a_{i_0,j}|}$ si $a_{i_0,j} \neq 0$ et $\varepsilon_j = 1$ si $a_{i_0,j} = 1$).

$$
\begin{aligned}
\|AX_0\|_\infty &= \text{Max}\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_{i,j}\varepsilon_j\right|,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}\\
&\geqslant \left|\sum_{j=1}^n a_{i_0,j}\varepsilon_j\right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \|L_{i_0}\|_1 = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}\times\|X_0\|_\infty.
\end{aligned}
$$

En résumé,
(1) $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}\leqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$,
(2) $\exists X_0\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|AX_0\|_\infty}{\|X_0\|_\infty}\geqslant \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$.
On en déduit que $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|||A|||_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}$.
Ainsi, en notant $C_1,\ldots,C_n$ et $L_1,\ldots,L_n$ respectivement les colonnes et les lignes d'une matrice A,

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_1 = \text{Max}\{\|C_j\|_1,\ 1\leqslant j\leqslant n\}\text{ et }|||A|||_\infty = \text{Max}\{\|L_i\|_1,\ 1\leqslant i\leqslant n\}.}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit $D=\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$. Pour $X=(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\|DX\|_2 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n \lambda_i^2x_i^2}\leqslant\sqrt{(\rho(D))^2\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2} = \rho(D)\|X\|_2,$$

De plus, si λ est une valeur propre de D telle que $|\lambda|=\rho(D)$ et X_0 est un vecteur propre associé, alors

$$\|DX_0\|_2 = \|\lambda X_0\|_2 = |\lambda|\|X_0\|_2 = \rho(D)\|X_0\|_2.$$

En résumé
(1) $\forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|DX\|_2}{\|X\|_2}\leqslant\rho(D)$,
(2) $\exists X_0\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, $\frac{\|DX_0\|_2}{\|X_0\|_2}=\rho(D)$.
On en déduit que $\forall D\in\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$, $|||D|||_2=\rho(D)$.
Soit alors $A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ et $D=\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\in\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$ tel que $A=PD{}^tP$. De plus $\rho(A)=\rho(D)$. Pour $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$
\begin{aligned}
\|AX\|_2 &= \|PD{}^tPX\|_2\\
&= \|D({}^tPX)\|_2\ (\text{car } P\in O_n(\mathbb{R})\Rightarrow\forall Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PY\|_2=\|Y\|_2)\\
&= \|DX'\|_2 \text{ où on a posé } X'={}^tPX.
\end{aligned}
$$

Maintenant l'application $X\mapsto{}^tPX=X'$ est une permutation de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car la matrice ${}^tP$ est inversible et donc X décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si X' décrit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, pour tout vecteur colonne X, $\|X'\|_2=\|{}^tPX\|_2=\|X\|_2$. On en déduit que $\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}=\left\{\frac{\|DX'\|_2}{\|X'\|_2},\ X'\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}$ et en particulier,

$$|||A|||_2 = |||D|||_2 = \rho(D) = \rho(A).$$

$$\boxed{\forall A\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R}),\ |||A|||_2 = \text{Sup}\left\{\frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}\right\}=\rho(A).}$$

Remarque. L'application $A\mapsto\rho(A)$ est donc une norme sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et de plus cette norme est sous-multiplicative.
