Topologie

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé est un convexe de cet espace.

Correction ▼ [005839]

Exercice 2 *** I

1. Inégalités de HÖLDER et de MINKOWSKI. Soit $(p,q) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

   (a) Montrer que pour $(x,y) \in [0,+\infty[^2$, $xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{x^q}{q}$.

   (b) En déduire que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $|\sum_{k=1}^n a_kb_k| \leqslant (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p}(\sum_{k=1}^n |b_k|^q)^{1/q}$.

   (c) En déduire que $\forall((a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $(\sum_{k=1}^n |a_k+b_k|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{k=1}^n |a_k|^p)^{1/p}+(\sum_{k=1}^n |b_k|^p)^{1/p}$.

2. Soit α un réel strictement positif. Pour $x=(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_\alpha(x) = (\sum_{k=1}^n |x_k|^\alpha)^{1/\alpha}$.

   (a) Montrer que $\forall \alpha \geqslant 1$, N_α est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $\alpha \in \left\{\frac{2}{3},1,\frac{3}{2},2,+\infty\right\}$.

   (c) Montrer que, pour $x=(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ fixé, $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = \mathrm{Max}\{|x_k|,\ 1 \leqslant k \leqslant n\} = N_\infty(x)$.

   (d) Montrer que si $0<\alpha<1$, N_α n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geqslant 2$).

Correction ▼ [005840]

Exercice 3 ** I

Soit $E = C^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour f élément de E, on pose $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N''(f) = |f(0)|+|f'(0)|+\int_0^1 |f''(t)|\,dt$. Montrer que N, N' et N'' sont des normes et les comparer.

Correction ▼ [005841]

Exercice 4 *** I Topologie dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé mais non compact (pour $n \geqslant 2$).
3. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est compact. $O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ?
4. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est fermé.
5. Soit $p \in [\![0,n]\!]$. Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Peut-on remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

7. Propriétés topologiques de l'ensemble des triplets de réels (a,b,c) tels que la forme quadratique $(x,y) \mapsto ax^2+2bxy+cy^2$ soit définie positive ?

8. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques (matrices $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$) est un compact convexe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Correction ▼ [005842]

Exercice 5 **

Montrer qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel (ou encore montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$).

Correction ▼ [005843]

Exercice 6 **

Soient A et B des parties d'un espace vectoriel normé E. Montrer que

1. $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

2. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ et$A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3. $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A\cap B}} = \overset{\circ}{A}\cap\overset{\circ}{B}$.

4. $\overline{A\cap B} \subset \overline{A}\cap\overline{B}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A\cup B}} \subset \overset{\circ}{A}\cup\overset{\circ}{B}$. Trouver un exemple où l'inclusion est stricte.

5. $\overset{\circ}{\widehat{A\setminus B}} = \overset{\circ}{A}\setminus\overline{B}$.

6. $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

Correction ▼ [005844]

Exercice 7 **

Trouver une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les sept ensembles A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ soient deux à deux distincts.

Correction ▼ [005845]

Exercice 8 **

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit E de $\|\ \|_\infty$.
D est la partie de E constituée des applications dérivables et P est la partie de E constituée des fonctions polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et l'intérieur de P.

Correction ▼ [005846]

Exercice 9 ** I Distance d'un point à une partie

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E,\|\ \|)$.
Pour $x \in E$, on pose $d_A(x) = d(x,A)$ où $d(x,A) = \text{Inf}\{\|x-a\|,\ a \in A\}$.

1. Justifier l'existence de $d_A(x)$ pour chaque x de E.

2. (a) Montrer que si A est fermée, $\forall x \in E$, $d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
   (b) Montrer que si A est fermée et E est de dimension finie, $\forall x \in E$, $\exists a \in A/\ d_A(x) = \|x-a\|$.

3. Si A est quelconque, comparer $d_A(x)$ et $d_{\overline{A}}(x)$.

4. Montrer d_A est continue sur E.

5. A chaque partie fermée non vide A, on associe l'application d_A définie ci-dessus. Montrer que l'application $A \mapsto d_A$ est injective.

6. Dans l'espace des applications continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme, on considère $A = \left\{f \in E / \ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,dt \geqslant 1\right\}$. Calculer $d_A(0)$.

Correction ▼ [005847]

Exercice 10 **

1. Soient (E,N_E) et (F,N_F) deux espaces vectoriels normés. Soient f et g deux applications continues sur E à valeurs dans F. Soit D une partie de E dense dans E. Montrer que si $f_{/D} = g_{/D}$ alors $f = g$.

2. Déterminer tous les morphismes continus de $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même.

Correction ▼ [005848]

Exercice 11 ***

Soit u une suite bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie ayant une unique valeur d'adhérence. Montrer que la suite u converge.

Correction ▼ [005849]

Exercice 12 ***

Calculer $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}} \left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}} |\sin(n\alpha)|\right\}$.

Correction ▼ [005850]

Exercice 13 *** I

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant a|x| + b$.

Correction ▼ [005851]

Exercice 14 *** I

Donner un développement à la précision $\frac{1}{n^2}$ de la n-ième racine positive x_n de l'équation $\tan x = x$.

Correction ▼ [005852]

Exercice 15 *** I

Soit z un nombre complexe. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Correction ▼ [005853]

Correction de l'exercice 1 ▲

Cas de la boule fermée. Soit $B=\{u\in E/\ \|u\|\leqslant 1\}$. Soient $(x,y)\in B^2$ et $\lambda\in[0,1]$.

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|\leqslant \lambda+1-\lambda=1.$$

Ainsi, $\forall (x,y)\in B^2$, $\forall \lambda\in[0,1]$, $\lambda x+(1-\lambda)y\in B$ et donc B est convexe.
Cas de la boule ouverte. Soit $B=\{u\in E/\ \|u\|<1\}$. Soient $(x,y)\in B^2$ et $\lambda\in[0,1]$.
Puisque $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ et $0\leqslant\|x\|<1$, on en déduit que $\lambda\|x\|<1$. Comme $(1-\lambda)\|y\|\leqslant 1$ (et même <1) et donc

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\leqslant \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|<1.$$

$$\boxed{\text{La boule unité fermée (ou ouverte) de l'espace vectoriel normé } (E,\|\ \|) \text{ est un convexe de l'espace vectoriel } E.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. Puisque $p>0$ et $q>0$, $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{p}$ et donc $p>1$. De même, $q>1$. D'autre part, $q=\frac{p}{p-1}$.

   (a) L'inégalité est immédiate quand $y=0$. Soit $y>0$ fixé.
   Pour $x\geqslant 0$, on pose $f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-xy$. Puisque $p>1$, la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$ et $\forall x\geqslant 0$, $f'(x)=x^{p-1}-y$. f admet donc un minimum en $x_0=y^{1/(p-1)}$ égal à

   $$f\left(y^{1/(p-1)}\right)=\frac{y^{p(p-1)}}{p}+\frac{y^{p/(p-1)}}{q}-y^{1/(p-1)}y=y^{p/(p-1}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)=0.$$

   Finalement, f est positive sur $[0,+\infty[$ et donc

   $$\boxed{\forall x\geqslant 0,\ \forall y\geqslant 0,\ xy\leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.}$$

   (b) Posons $A=\sum_{k=1}^n|a_k|^p$ et $B=\sum_{k=1}^n|b_k|^q$.
   Si A (ou B) est nul, tous les a_k (ou tous les b_k) sont nuls et l'inégalité est vraie.
   On suppose dorénavant que $A>0$ et $B>0$. D'après la question a),

   $$\sum_{k=1}^n\frac{|a_k|}{A^{1/p}}\times\frac{|b_k|}{B^{1/q}}\leqslant\sum_{k=1}^n\left(\frac{|a_k|^p}{pA}+\frac{|b_k|^q}{qB}\right)=\frac{1}{pA}\sum_{k=1}^n|a_k|^p+\frac{1}{qB}\sum_{k=1}^n|b_k|^q=\frac{1}{pA}\times A+\frac{1}{qB}\times B=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

   et donc $\sum_{k=1}^n|a_k||b_k|\leqslant A^{1/p}B^{1/q}=\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q}$. Comme $\left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^n|a_k||b_k|$, on a montré que

   $$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2,\ \sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^q\right)^{1/q}\text{ (Inégalité de HÖLDER).}}$$

   Remarque. Quand $p=q=2$, on a bien $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et l'inégalité de HÖLDER s'écrit

   $$\sum_{k=1}^n|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^2\right)^{1/2}\text{ (inégalité de CAUCHY-SCHWARZ).}$$

   (c) Soit $((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n})\in(\mathbb{R}^n)^2$. D'après l'inégalité de HÖLDER, on a

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p&=\sum_{k=1}^n|a_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}+\sum_{k=1}^n|b_k|(|a_k|+|b_k|)^{p-1}\\&\Leftrightarrow\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^{(p-1)q}\right)^{1/q}\\&=\left(\left(\sum_{k=1}^n|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^n|b_k|^p\right)^{1/p}\right)\left(\sum_{k=1}^n(|a_k|+|b_k|)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

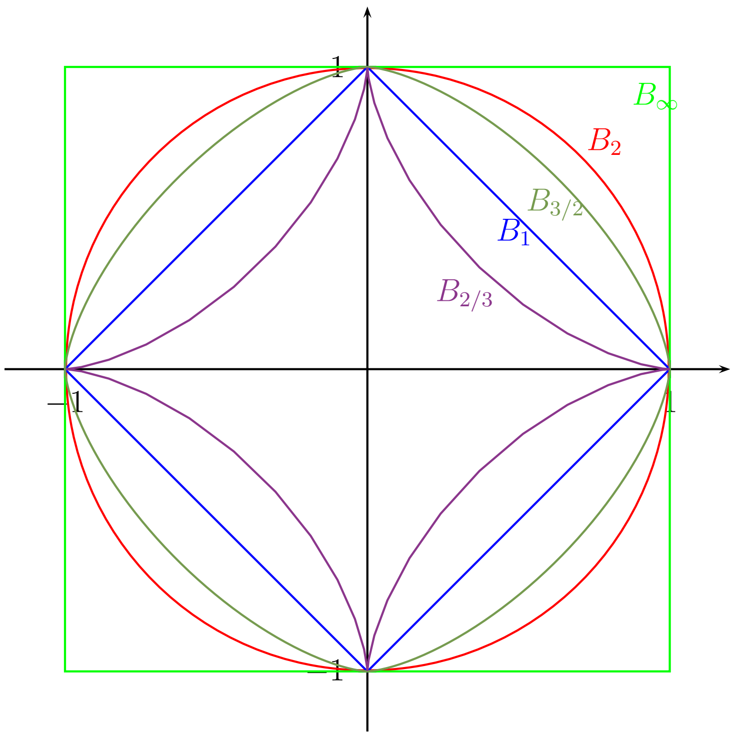
Si $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est claire.
Sinon $\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)^p > 0$ et après simplification des deux membres de l'inégalité précédente par le réel strictement positif $\sum k = 1^n(|a_k|+|b_k|)^p$, on obtient $\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}$

$$\boxed{\forall((a_k)_{1\leqslant k\leqslant n},(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p} \text{ (Inégalité de MINKO}}$$

2. (a) On sait déjà que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\alpha > 1$.
(1) N_α est bien une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$.
(2) Soit $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(x) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1,n]\!],\ |x_k| = 0 \Rightarrow x = 0$.
(3) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x = (x_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n$. $N_\alpha(\lambda x) = \left(\sum_{k=1}^{n}|\lambda x_k|^\alpha\right)^{1/\alpha} = (|\lambda|^\alpha)^{1/\alpha} N_\alpha(x) = |\lambda| N_\alpha(x)$.
(4) L'inégalité triangulaire est l'inégalité de MINKOWSKI.

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^n,\ N_\alpha \text{ est une norme sur } \mathbb{R}^n.}$$

(b) Quelques boules unités dans $\mathbb{R}^2$.



Remarque. Toute boule unité est symétrique par rapport à O puisque $\forall x \in E$, $N(x) = N(-x)$ et donc

$$\forall x \in E,\ N(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow N(-x) \leqslant 1.$$

(c) Soient $\alpha > 0$ et $x \in E$. On a

$$N_\infty(x) \leqslant N_\alpha(x) \leqslant n^{1/\alpha} N_\infty(x),$$

et le théorème des gendarmes fournit $\lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x)$.

$$\boxed{\forall x \in E,\ \lim_{\alpha\to+\infty} N_\alpha(x) = N_\infty(x).}$$

(d) Soient $\alpha \in]0,1[$ puis $B = \{x \in \mathbb{R}^n / N_\alpha(x) \leqslant 1\}$. Les vecteurs $x = (1,0,0,\dots,0)$ et $y = (0,1,0,\dots,0)$ sont des éléments de B. Le milieu du segment $[xy]$ est $z = \frac{1}{2}(1,1,0,\dots,0)$.

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}(1^\alpha + 1^\alpha)^{1/\alpha} = 2^{\frac{1}{\alpha}-1} > 1 \text{ car } \frac{1}{\alpha} - 1 > 0$$

et donc $z \notin B$. Ainsi, B n'est pas convexe et donc N_α n'est pas une norme d'après l'exercice 1.
On peut remarquer que pour $n = 1$, les N_α coïncident toutes avec la valeur absolue.

Correction de l'exercice 3 ▲

• Il est connu que N est une norme sur E.
• Montrons que N' est une norme sur E.
(1) N' est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ car pour f dans E, f' est continue sur le segment $[0,1]$ et donc f' est intégrable
sur le segment $[0,1]$.
(2) Soit $f \in E$. Si $N'(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et $f' = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Par suite, f est un
polynôme de degré inférieur ou égal à 0 tel que $f(0) = 0$ et on en déduit que $f = 0$.
(3) $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\, dt = |\lambda| \left(|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt \right) = |\lambda| N'(f)$.
(4) Soit $(f,g) \in E^2$.

$$N'(f+g) \leqslant |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\, dt + \int_0^1 |g'(t)| dt = N'(f) + N'(g).$$

Donc N' est une norme sur E.
• Montrons que N'' est une norme sur E. On note que $\forall f \in E, N''(f) = |f(0)| + N'(f')$ et tout est immédiat.

$$\boxed{N,\ N' \text{ et } N'' \text{ sont des normes sur } E.}$$

• Soit $f \in E$ et $t \in [0,1]$. Puisque la fonction f' est continue sur $[0,1]$

$$|f(t)| = |f(0) + \int_0^t f'(u)\, du| \leqslant |f(0)| + \int_0^t |f'(u)| du \leqslant |f(0)| + \int_0^1 |f'(u)|\, du = N'(f),$$

et donc $N(f) = \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \int_0^1 N'(f)\, dt = N'(f)$.
Ensuite en appliquant le résultat précédent à f', on obtient

$$N'(f) = |f(0)| + N(f') \leqslant |f(0)| + N'(f') = N''(f).$$

Finalement

$$\boxed{\forall f \in E, N(f) \leqslant N'(f) \leqslant N''(f).}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, on pose $f_n(t) = t^n$.
$N(f_n) = \int_0^1 t^n\, dt = \frac{1}{n+1}$ et donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N).
Par contre, pour $n \geqslant 1$, $N'(f_n) = n \int_0^1 t^{n-1}\, dt = 1$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 dans l'espace vectoriel normé (E,N'). On en déduit que

$$\boxed{\text{les normes } N \text{ et } N' \text{ ne sont pas des normes équivalentes.}}$$

De même en utilisant $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$, on montre que les normes N' et N'' ne sont pas équivalentes.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $d : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$. On sait que l'application d est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (muni de n'importe quelle norme) et que $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant que réunion de deux intervalles ouverts.

   Par suite, $GL_n(\mathbb{R}) = d^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le polynômedet$(A - xI)$ n'a qu'un nombre fini de racines (éventuellement nul) donc pour p entier naturel supérieur ou égal à un certain p_0, $\det\left(A - \frac{1}{p}I\right) \neq 0$. La suite $\left(A - \frac{1}{p}I\right)_{p \geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $GL_n(\mathbb{R})$ convergente de limite A. Ceci montre que l'adhérence de $GL_n(\mathbb{R})$ est $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou encore $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   $\boxed{GL_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{, dense dans } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R})$ est fermé en tant que complémentaire d'un ouvert.

   Soit $n \geqslant 2$. Les matrices $A_p = pE_{1,1}$, $p \in \mathbb{N}$, sont non inversibles et la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est non bornée. Par suite $Mn(R) \setminus GLn(R)$ est non borné et donc non compact.

   $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M_n(\mathbb{R}) \setminus GL_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé mais non compact.}}$

3. • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est fermé. Posons $g : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 \\ M & \mapsto & (M, {}^tM) \end{array}$, $h : \begin{array}{ccc} (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ (M,N) & \mapsto & MN \end{array}$ puis $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(R) \\ M & \mapsto & M^tM \end{array}$.

   g est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car linéaire sur un espace de dimension finie. h est continue sur $(M_n(\mathbb{R}))^2$ car bilinéaire sur un espace de dimension finie. On en déduit que $f = h \circ g$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Enfin $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

   • Montrons que $O_n(\mathbb{R})$ est borné. $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}| \leqslant 1$ et donc $\forall A \in O_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$.

   D'après le théorème de BOREL-Lebesgue, puisque $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe. En effet, les deux matrices I_n et $-I_n$ sont orthogonales mais le milieu du segment joignant ces deux matrices est 0 qui n'est pas une matrice orthogonale.

   $\boxed{O_n(\mathbb{R}) \text{ est compact mais non convexe.}}$

4. $S_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de l'espace de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   $\boxed{S_n(\mathbb{R}) \text{ est fermé.}}$

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et p un élément fixé de $[\![1, n-1]\!]$ (le résultat est clair si $p = 0$ ou $p = n$).

   A est de rang inférieur ou égal à p si et seulement si tous ses mineurs de format $p+1$ sont nuls (hors programme).

   Soient I et J deux sous-ensembles donnés de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $p+1$ et $A_{I,J}$ la matrice extraite de A de format $p+1$ dont les numéros de lignes sont dans I et les numéros de colonnes sont dans J.

   Pour I et J donnés, l'application $A \mapsto A_{I,J}$ est continue car linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$. Par suite, l'application

   $f_{I,J} : A \mapsto \det(A_{I,J})$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices A telles que $\det(A_{I,J}) = 0$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque du fermé $\{0\}$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue $f_{I,J}$) et l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermés.

6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Posons $\mathrm{Sp}(A) = (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On sait que toute matrice est triangulable dans $\mathbb{C}$ et donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathscr{T}_n(\mathbb{C})$ avec $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $t_{i,i} = \lambda_i$ telle que $A = PTP^{-1}$.

   On munit dorénavant $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme multiplicative notée $\| \ \|$. Puisque toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, il existe un réel strictement positif K telle que pour toute matrice M, $\|M\| \leqslant K\|M\|_\infty$.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un n-uplet de réels $(\lambda_1,...,\lambda_n)$ tels que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $0 \leqslant \varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}$ et les $\lambda_k + \varepsilon_k$ sont deux à deux distincts. (On prend $\varepsilon_1 = 0$ puis ε_2 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_2 + \varepsilon_2 \neq \lambda_1 + \varepsilon_1$ ce qui est possible puisque $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini puis ε_3 dans $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ tel que $\lambda_3 + \varepsilon_3$ soit différent de $\lambda_1 + \varepsilon_1$ et $\lambda_2 + \varepsilon_2$ ce qui est possible puisque $\left[0, \frac{\varepsilon}{K\|P\|\|P^{-1}\|}\right[$ est infini ...)

   On pose $D = \mathrm{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ puis $T' = T + D$ et enfin $A' = PT'P^{-1}$. Tout d'abord les valeurs propres de A' sont deux à deux distinctes (ce sont les $\lambda_i + \varepsilon_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$) et donc A' est diagonalisable. Ensuite

$$\|A' - A\| = \|PDP^{-1}\| \leqslant \|P\|\|D\|\|P^{-1}\| \leqslant K\|P\|\|P^{-1}\|\|D\|_\infty < \varepsilon.$$

   En résumé, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) / \ \|A' - A\| < \varepsilon$ et A' diagonalisable. On a montré que

   L'ensemble des matrices complexes diagonalisables dans $\mathbb{C}$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

   On ne peut remplacer $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ par $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

$$\chi_{A+E} = \begin{vmatrix} a-X & c-1 \\ b+1 & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) + (b-c) + 1.$$

   Le discriminant de χ_{A+E} est $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4$. Supposons de plus que $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$. Alors

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc) - 4(b-c) - 4 \leqslant \frac{1}{4} + 4\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) + 4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) - 4 = -\frac{5}{4} < 0.$$

   Par suite, aucune des matrices $A + E$ avec $\|E\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}$ n'a de valeurs propres réelles et donc aucun donc diagonalisable dans $\mathbb{R}$. On a montré que l'ensemble des matrices réelles diagonalisables dans $\mathbb{R}$ n'est pas dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

7. La matrice de la forme quadratique $Q\ :\ (x,y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$ dans la base canonique est $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

   Les valeurs propres de cette matrice sont strictement positives si et seulement si $a + c > 0$ et $ac - b^2 > 0$. L'application $(a,b,c) \mapsto a + c$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ car linéaire sur $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension finie et l'application $(a,b,c) \mapsto ac - b^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$ en tant que polynôme.

   L'ensemble des triplets considéré est l'intersection des images réciproques par ces applications de l'ouvert $]0,+\infty[$ de $\mathbb{R}$ et est donc un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

8. Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.

   • Vérifions que $\mathscr{S}$ est borné. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $0 \leqslant a_{i,j} \leqslant 1$ et donc $\|A\|_\infty \leqslant 1$. Ainsi, $\forall A / in \mathscr{S}$, $\|A\|_\infty \leqslant 1$ et donc $\mathscr{S}$ est borné.

   • Vérifions que $\mathscr{S}$ est fermé.

   Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. L' application $f_{i,j}\ :\ A \mapsto a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. $[0,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car son complémentaire $]-\infty,0[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par suite, $\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ a_{i,j}\geqslant 0\}=f_{i,j}^{-1}([0,+\infty[)$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. L' application $g_i\ :\ A\mapsto\sum_{j=1}^n a_{i,j}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ car linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie. Le singleton $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Par suite, $\{A=(a_{k,l})_{1\leqslant k,l\leqslant n}/\ \sum_{j=1}^n a_{i,j}=1\}=g_i^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\mathscr{S}$ est donc un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en tant qu'intersection de fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

En résumé, $\mathscr{S}$ est un fermé borné de l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie et donc $\mathscr{S}$ est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème de BOREL-LEBESGUE.

• Vérifions que $\mathscr{S}$ est convexe. Soient $(A,B)\in(\mathscr{S})^2$ et $\lambda\in[0,1]$. D'une part, $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $(1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j}\geqslant 0$ et d'autre part, pour $i\in[\![1,n]\!]$

$$\sum_{j=1}^n((1-\lambda)a_{i,j}+\lambda b_{i,j})=(1-\lambda)\sum_{j=1}^n a_{i,j}+\lambda\sum_{j=1}^n b_{i,j}=(1-\lambda)+\lambda=1,$$

ce qui montre que $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$. On a montré que $\forall(A,B)\in\mathscr{S}^2$, $\forall\lambda\in[0,1]$, $(1-\lambda)A+\lambda B\in\mathscr{S}$ et donc $\mathscr{S}$ est convexe.

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices stochastiques est un compact convexe de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

9. Soient A et B deux matrices réelles diagonalisables. Soient $\gamma_1\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & (1-t).A+t.0=(1-t)A\end{array}$ et

$\gamma_2\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & tB\end{array}$. Soit enfin $\gamma\ :\ \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\\ t & \mapsto & \left\{\begin{array}{l}\gamma_1(2t)\text{ si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \gamma_2(2t-1)\text{ si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{array}\right.\end{array}$.

γ_1 est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice nulle et γ_2 est un chemin continu joignant la matrice nulle à la matrice B. Donc γ est un chemin continu joignant la matrice A à la matrice B. De plus, pour tout réel $t\in[0,1]$, la matrice $\gamma_1(t)=(1-t)A$ est diagonalisable (par exemple, si $A=P\text{diag}(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1}$ alors $(1-t)A=P\text{diag}((1-t)\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}P^{-1})$ et de même, pour tout réel $t\in[0,1]$, la matrice $\gamma_2(t)=tB$ est diagonalisable. Finalement γ est un chemin continu joignant les deux matrices A et B diagonalisables dans $\mathbb{R}$, contenu dans l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$. On a montré que

$$\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonalisables dans } \mathbb{R} \text{ est connexe par arcs.}}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

1ère solution. • Montrons qu'entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
Soient x et y deux réels tels que $x<y$. Soient $d=y-x$ puis n un entier naturel non nul tel que $\frac{1}{n}<d$ (par exemple, $n=E\left(\frac{1}{d}\right)+1$). Soient enfin $k=E(nx)$ et $r=\frac{k+1}{n}$. r est un rationnel et de plus

$$x=\frac{nx}{n}<\frac{k+1}{n}=r\leqslant\frac{nx+1}{n}=x+\frac{1}{n}<x+d=x+y-x=y.$$

En résumé, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(x<y\Rightarrow\exists r\in\mathbb{Q}/\ x<r<y)$. Ceci montre que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2ème solution. On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux et en particulier tout réel est limite d'une suite de rationnels. Donc $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit A une partie de E. $\overline{A}$ est fermé et donc $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$. $\mathring{A}$ est ouvert et donc $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

2. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$.

   • Pour tout $x \in E$, $x \in \overline{A} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap A \neq \varnothing \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x),\ V \cap B \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}$. Donc $\overline{A} \subset \overline{B}$.

   • Pour tout $x \in E$, $x \in \mathring{A} \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow B \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow x \in \mathring{B}$. Donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

3. Soient A et B deux parties de E.

   $\overline{A} \cup \overline{B}$ est une partie fermée de E contenant $A \cup B$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (puisque $\overline{A \cup B}$ est le plus petit fermé de E au sens de l'inclusion contenant $A \cup B$).

   Réciproquement, $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subset \overline{A \cup B} \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

   Finalement $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ et donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$.

   Réciproquement , $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{B} \Rightarrow \overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

   Finalement, $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

4. $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$ et donc $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

   On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0,1[$ et $B =]1,2]$, $A \cap B = \varnothing$ puis $\overline{A \cap B} = \varnothing$ mais $\overline{A} \cap \overline{B} = [0,1] \cap [1,2] = \{1\} \neq \varnothing$.

   $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cup B$ et donc $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.

   On n'a pas nécessairement l'égalité. Si $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$, $A \cup B = [0,2]$ puis $\overset{\circ}{A \cup B} =]0,2[$ mais $\mathring{A} \cup \mathring{B} =]0,1[\cup]1,2[\neq]0,2[$.

5. Soient A et B deux parties de E. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{A \setminus B} &\Leftrightarrow A \setminus B \in \mathscr{V}(x) \Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \setminus B \\ &\Leftrightarrow \exists \mathscr{B} \text{ boule ouverte de centre } x \text{ telle que } \mathscr{B} \subset A \text{ et } \mathscr{B} \subset {}^c B \Leftrightarrow A \in \mathscr{V}(x) \text{ et } {}^c B \in \mathscr{V}(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ et } x \in \overset{\circ}{({}^c B)} \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \text{ et } x \in {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \cap {}^c(\overline{B}) \Leftrightarrow x \in \mathring{A} \setminus \overline{B}. \end{aligned}$$

   Donc $\overset{\circ}{A \setminus B} = \mathring{A} \setminus \overline{B}$.

6. Soit A une partie de E. $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}} \subset \overline{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$. D'autre part $\mathring{A} \subset \overline{\mathring{A}} \Rightarrow \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A} \subset \mathring{\overline{\mathring{A}}} \Rightarrow \overline{\mathring{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$. Finalement, $\overline{\mathring{A}} = \overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$.

   $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}} \Rightarrow \mathring{\mathring{\overline{A}}} = \mathring{\overline{A}} \subset \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$. D'autre part $\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A} \Rightarrow \overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} \subset \mathring{\overline{A}}$. Finalement, $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}} = \mathring{\overline{A}}$.

Correction de l'exercice 7 ▲

L'exercice 6 montre que l'on ne peut pas faire mieux.
Soit $A = ([0,1[\cup]1,2]) \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4,5])$.
• $\mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[$.

• $\overline{\mathring{A}} = [0,2]$.
• $\mathring{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[$.
• $\overline{A} = [0,2]] \cup \{3\} \cup [4,5]$
• $\mathring{\overline{A}} =]0,2[\cup]4,5[$.
• $\overline{\mathring{\overline{A}}} = [0,2] \cup [4,5]$.

Les 7 ensembles considérés sont deux à deux distincts.

Correction de l'exercice 8 ▲

Soit $f \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit g_n l'application définie par $\forall x \in [0,1]$, $g_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}\left|x - \frac{1}{2}\right|$.
Chaque fonction g_n est continue sur $[0,1]$ mais non dérivable en $\frac{1}{2}$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g_n \in E \setminus D$. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|f - g_n\|_\infty = \frac{1}{2n}$. On en déduit que la suite $(g_n)_{n \geqslant 1}$ tend vers f dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \|_\infty)$. f est donc limite d'une suite d'éléments de ${}^cD$ et donc est dans l'adhérence de ${}^cD$. Ceci montre que $\overline{{}^cD} = E$ ou encore ${}^c(\mathring{D}) = E$ ou enfin $\mathring{D} = \varnothing$.
Enfin, puisque $P \subset D$, on a aussi $\mathring{P} = \varnothing$.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $x \in E$. $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ est une partie non vide et minorée (par 0) de $\mathbb{R}$. $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$ admet donc une borne inférieure dans $\mathbb{R}$. On en déduit l'existence de $d_A(x)$.

2. (a) Soit A une partie fermée et non vide de E. Soit $x \in E$.
   • Supposons que $x \in A$. Alors $0 \leqslant f(x) = \mathrm{Inf}\{\|x - a\|,\ a \in A\} \leqslant \|x - x\| = 0$ et donc $d_A(x) = 0$.
   • Supposons que $d_A(x) = 0$. Par définition d'une borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a_\varepsilon \in A / \ \|x - a_\varepsilon\| < \varepsilon$.
   Soit V un voisinage de x. V contient une boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ puis d'après ce qui précède, V contient un élément de A. Finalement, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $V \cap A \neq \varnothing$ et donc $x \in \overline{A} = A$.

   $$\boxed{\text{Si } A \text{ est fermée, } \forall x \in E,\ (d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A).}$$

   (b) Posons $d = d_A(x)$. Pour chaque entier naturel n, il existe $a_n \in A$ tel que $d \leqslant \|x - a_n\| \leqslant d + \frac{1}{n}$.
   La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\|a_n\| \leqslant \|a_n - x\| + \|x\| \leqslant d + \frac{1}{n} + \|x\| \leqslant d + \|x\| + 1$.
   Puisque E est de dimension finie, d'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ convergeant vers un certain élément a de E.
   Ensuite, puisque A est fermée, on en déduit que $a \in A$. Puis, comme

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d \leqslant \|x - a_{\varphi(n)}\| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)},$$

   et puisque $\varphi(n)$ tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$, on obtient quand n tend vers l'infini, $d = \lim_{n \to +\infty} \|x - a_{\varphi(n)}\|$. Maintenant on sait que l'application $y \mapsto \|y\|$ est continue sur l'espace normé $(E, \| \|)$ et donc

   $$\lim_{n \to +\infty} \left\|x - a_{\varphi(n)}\right\| = \left\|x - \lim_{n \to +\infty} a_{\varphi(n)}\right\| = \|x - a\|.$$

   On a montré qu'il existe $a \in A$ tel que $d_A(x) = \|x - a\|$.

3. Soit $x \in E$.
   Puisque $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}}(x)$ est un minorant de $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$. Comme $d_A(x)$ est le plus grand des minorants de $\{\|x - a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_{\overline{A}}(x) \leqslant d_A(x)$.
   Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe $y \in \overline{A}$ tel que $\|x - y\| < d(x, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$ et puis il existe $a \in A$ tel que $\||y - a\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
   On en déduit que

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\| < d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon.$$

Ainsi, $\forall \varepsilon > 0$, $d_A(x) < d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$. Quand ε tend vers 0, on obtient $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$.

Finalement

$$\boxed{\forall x \in E,\ d_A(x) = d_{\overline{A}}(x).}$$

4. Montrons que l'application d_A est Lipschitzienne. Soit $(x,y) \in E^2$

   Soit $a \in A$. $d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|x-y\| + \|y-a\|$. Donc, $\forall a \in A$, $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant \|y-a\|$ ou encore $d_A(x) - \|x-y\|$ est un minorant de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$. Puisque $d_A(y)$ est le plus grand des minorants de $\{\|y-a\|,\ a \in A\}$, on a donc $d_A(x) - \|x-y\| \leqslant d_A(y)$.

   En résumé, $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(x) - d_A(y) \leqslant \|x-y\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $\forall (x,y) \in E^2$, $d_A(y) - d_A(x) \leqslant \|x-y\|$ et finalement

$$\forall (x,y) \in E^2,\ |d_A(x) - d_A(y)| \leqslant \|x-y\|.$$

   Ainsi l'application $\begin{array}{rccc} d_A : & (E, \|\ \|) & \to & (\mathbb{R}, |\ |) \\ & x & \mapsto & d_A(x) \end{array}$ est 1-Lipschitzienne et en particulier d_A est continue sur l'espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$.

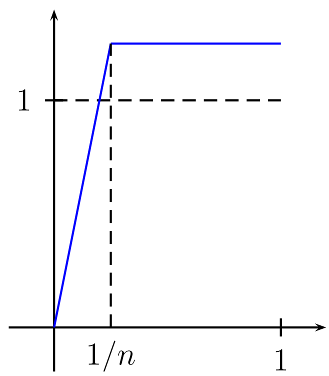
5. Soient A et B deux parties fermées et non vides de E telles que $d_A = d_B$.

   Soit $a \in A$. $d_B(a) = d_A(a) = 0$ (d'après 2)) et donc $a \in B$ (d'après 2)). Ainsi $A \subset B$ puis, par symétrie des rôles, $B \subset A$ et finalement $A = B$.

6. (A n'est pas un sous espace vectoriel de E.)

   Soit $f \in A$. $1 \leqslant \int_0^1 f(t)\, dt \leqslant \int_0^1 |f(t)|\, dt \leqslant \|f\|_\infty$. Ainsi, $\forall f \in A$, $\|f\|_\infty \geqslant 1$ et donc $d_A(0) \geqslant 1$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \left\{\begin{array}{l} (n+1)x \text{ si } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 + \frac{1}{n}\ x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{array}\right.$.



   Pour chaque entier naturel non nul n, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} \geqslant 1.$$

   Donc, la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $d_A(0) \leqslant \|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$.

   En résumé, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant d_A(0) \leqslant 1 + \frac{1}{n}$ et finalement

$$\boxed{d_A(0) = 1.}$$

Remarque. A est fermée mais la distance à A n'est malgré tout pas atteinte. En effet

• Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A convergeant dans l'espace vectoriel normé $(E,\|\ \|_\infty)$ vers un certain élément f de E. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ et donc d'une part, $f(0)=\lim_{n\to+\infty} f_n(0)=0$ et d'autre part $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 1$. Donc $f\in A$ et on a montré que A est fermée.

• Supposons qu'il existe $f\in A$ telle que $\|f\|_\infty=1$. Alors l'encadrement $1\leqslant \int_0^1 f(x)\,dx\leqslant \|f\|_\infty=1$ fournit $\int_0^1 f(x)\,dx=\|f\|_\infty=1$ puis $\int_0^1(\|f\|_\infty-f(x))\,dx=0$ et donc $\|f\|_\infty-f=0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle) ou encore $f=1$ ce qui contredit $f(0)=0$. On ne peut donc pas trouver $f\in A$ tel que $d_A(0)=d(0,f)$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Soit $x\in E$. Puisque D est dense dans E, il existe une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D convergeant vers x et puisque f et g sont continues et coincident sur D et donc en x

$$f(x)=f\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right)=\lim_{n\to+\infty} f(d_n)=\lim_{n\to+\infty} g(d_n)=g\left(\lim_{n\to+\infty} d_n\right)=g(x).$$

On a montré que $f=g$.

2. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ f(x+y)=f(x)+f(y)$. Soit $a=f(1)$.

• $x=y=0$ fournit $f(0)=0=a\times 0$.

• Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$. $f(nx)=f(x+\ldots+x)=f(x)+\ldots+f(x)=nf(x)$. Ceci reste vrai pour $n=0$.

• En particulier $x=1$ fournit pour tout entier naturel non nul n, $f(n)=nf(1)=an$ puis $x=\frac{1}{n}$ fournit $nf\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)=a$ et donc $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{a}{n}$.

• Ensuite, $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(\frac{p}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=a\frac{p}{q}$.

• Soit $x\in\mathbb{R}$. L'égalité $f(x)+f(-x)=f(0)=0$ fournit $f(-x)=-f(x)$.

• En particulier, $\forall(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$, $f\left(-\frac{p}{q}\right)=-f\left(\frac{p}{q}\right)=-a\frac{p}{q}$.

En résumé, si f est morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, $\forall r\in\mathbb{Q}$, $f(r)=ar$ où $a=f(1)$.

Si de plus f est continue sur $\mathbb{R}$, les deux applications $f\ :\ x\mapsto f(x)$ et $g\ :\ x\mapsto ax$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$. D'après le 1), $f=g$ ou encore $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=ax$ où $a=f(1)$.

Réciproquement, toute application linéaire $x\mapsto ax$ est en particulier un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même, continu sur $\mathbb{R}$.

Les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans lui-même sont les applications linéaires $x\mapsto ax$, $a\in\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 11 ▲

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de l'espace normé $(E,\|\ \|)$ ayant une unique valeur d'adhérence que l'on note ℓ. Montrons que la suite u converge vers ℓ.
Supposons par l'absurde que la suite u ne converge pas vers ℓ. Donc

$$\exists\varepsilon>0/\ \forall n_0\in\mathbb{N},\ \exists n\geqslant n_0/\ \|u_n-\ell\|\geqslant\varepsilon\quad(*).$$

ε est ainsi dorénavant fixé.
En appliquant $(*)$ à $n_0 = 0$, il existe un rang $\varphi(0) \geqslant n_0 = 0$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Puis en prenant $n_0 = \varphi(0)+1$, il existe un rang $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$ ... et on construit ainsi par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_{\varphi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$.
Maintenant, la suite u est bornée et il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$. Puisque E est de dimension finie, le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(u_{\varphi(n)})$ et donc de u convergeant vers un certain $\ell' \in E$. ℓ' est donc une valeur d'adhérence de la suite u. Mais quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité $\|u_{\psi(n)} - \ell\| \geqslant \varepsilon$, on obtient $\|\ell' - \ell\| \geqslant \varepsilon$ et donc $\ell \neq \ell'$. Ceci constitue une contradiction et donc u converge vers ℓ.

Correction de l'exercice 12 ▲

Pour $\alpha \in]0,\pi[$, posons $f(\alpha) = \underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)| = \underset{n\in\mathbb{N}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|$.

• Tout d'abord $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(n(\pi-\alpha))| = |\sin(n\alpha)|$ et donc $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $f(\pi-\alpha) = f(\alpha)$.
On en déduit que $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

• $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sup\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Ensuite, si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(\alpha) \geqslant \sin(\alpha) \geqslant \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Par suite $\underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{2}]}{\text{Inf}} f(\alpha) = \underset{\alpha\in]0,\frac{\pi}{3}]}{\text{Inf}} f(\alpha)$.

• Soit alors $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right]$. Montrons qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $n_0\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.
Il existe un unique entier naturel n_1 tel que $n_1\alpha \leqslant \frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha$ à savoir $n_1 = E\left(\frac{\pi}{3\alpha}\right)$.
Mais alors, $\frac{\pi}{3} < (n_1+1)\alpha = n\alpha + \alpha \leqslant \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ et l'entier $n_0 = n_1 + 1$ convient.
Ceci montre que $f(\alpha) \geqslant \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
Finalement $\forall\alpha \in]0,\pi[$, $f(\alpha) \geqslant f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et donc $\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Min}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\underset{\alpha\in]0,\pi[}{\text{Inf}}\left\{\underset{n\in\mathbb{Z}}{\text{Sup}}|\sin(n\alpha)|\right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit f une application uniformément continue sur $\mathbb{R}$. $\exists\alpha > 0/ \ \forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant 1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ (le travail est analogue si $x \in \mathbb{R}^-$).
Pour $n \in \mathbb{N}$

$$|x - n\alpha| \leqslant \alpha \Leftrightarrow -\alpha \leqslant x - n\alpha \leqslant \alpha \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} - 1 \leqslant n \leqslant \frac{x}{\alpha} + 1 \Leftarrow n = E\left(\frac{x}{\alpha}\right).$$

On pose $n_0 = E\left(\frac{x}{\alpha}\right)$.

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant |f(x) - f(x-\alpha)| + |f(x-\alpha) - f(x-2\alpha)| + \ldots + |f(x-(n_0-1)\alpha) - f(x-n_0\alpha)| + |f(x-n_0\alpha) - f(0)| + |f(0)| \\ &\leqslant n_0 + 1 + |f(0)| \text{ (car } |x - n_0\alpha - 0| \leqslant \alpha) \\ &\leqslant \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|.\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leqslant \frac{x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$. Par symétrie des calculs, $\forall x \in \mathbb{R}^-$, $|f(x)| \leqslant \frac{-x}{\alpha} + 2 + |f(0)|$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leqslant \frac{|x|}{\alpha} + 2 + |f(0)|$.

$$\boxed{f \text{ uniformément continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \exists(a,b) \in \mathbb{R}^2/ \ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) \leqslant a|x| + b.}$$

Correction de l'exercice 14 ▲

Posons $I_0 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ et enfin $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Pour $x \in D$, posons $f(x) = \tan x - x$. La fonction f est dérivable sur D et pour $x \in D$, $f'(x) = \tan^2 x$. La fonction f est ainsi strictement croissante sur chaque I_n et s'annule donc au plus une fois dans chaque I_n.
$f(0) = 0$ et donc f s'annule exactement une fois dans I_0 en $x_0 = 0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, f est continue sur I_n et de plus $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^+\right) \times f\left(\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^-\right) = -\infty \times +\infty < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois dans I_n et donc exactement une fois dans I_n.
L'équation $\tan x = x$ admet donc dans chaque intervalle I_n, $n \in \mathbb{N}$, une et une seule solution notée x_n. De plus, $\forall n \geqslant 1$, $f(n\pi) = -n\pi < 0$ et donc $x_n \in]n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi[$.
Pour $n \geqslant 1$, $n\pi < x_n < \frac{\pi}{2}+n\pi$ et donc $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ puis $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\pi$ et même

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + O(1).$$

Ensuite, puisque $x_n - n\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $x_n = \tan(x_n) = \tan(x_n - n\pi)$, $x_n - n\pi = \arctan(x_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{\pi}{2}$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1).$$

Posons $y_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2}$. Alors d'après ce qui précède, $y_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$. De plus, l'égalité $\tan(x_n) = x_n$ fournit $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n) = n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n$ ou encore

$$n\pi + \frac{\pi}{2} + y_n = -\text{cotan}(y_n).$$

Puisque $y_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$, on obtient $n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{y_n}$ ou encore $y_n \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$. Donc

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons $z_n = y_n + \frac{1}{n\pi} = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$. D'après ce qui précède, $\tan\left(-\frac{1}{n\pi} + z_n\right) = -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}$ et aussi $z_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$z_n = \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + z_n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n\pi} - \arctan\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Finalement

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{=} n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2\pi n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

Correction de l'exercice 15 ▲

1ère solution. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $1 + \frac{z}{n} = r_n e^{i\theta}$ où $r_n \geqslant 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$ de sorte que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = r_n^n \, e^{in\theta_n}.$$

Puisque $1 + \frac{z}{n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, pour n assez grand on a $r_n > 0$ et $\theta_n \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Mais alors pour n assez grand

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2} \text{ et } \theta_n = \arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right).$$

Maintenant, $r_n^n = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(x+o(1))$ et donc r_n^n tend vers e^x quand n tend vers $+\infty$.
Ensuite $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} n\arctan\left(\frac{y}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} y+o(1)$ et donc $n\theta_n$ tend vers y quand n tend vers $+\infty$.
Finalement, $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = r_n^n\, e^{in\theta_n}$ tend vers $e^x \times e^{iy} = e^z$.

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\ \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z.}$$

2ème solution. Le résultat est connu quand z est réel. Soit $z\in\mathbb{C}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right)z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k.$$

Maintenant, $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{\overbrace{n\times(n-1)\times\ldots\times(n-k+1)}^{k}}{\underbrace{n\times n\times\ldots\times n}_{k}}\right) \geqslant 0$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}-\frac{C_n^k}{n^k}\right||z|^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}-\left(1+\frac{|z|^n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e^{|z|}-e^{|z|}=0.$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}-\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et puisque $\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}$ tend vers e^z quand n tend vers $+\infty$, il en est de même de $\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.
