



## Quadriques

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile  
I : Incontournable

### Exercice 1 \*\* I

Nature et éléments caractéristiques de la quadrique ( $\mathcal{S}$ ) dont une équation dans un repère orthonormé donné  $\mathcal{R} = (O, i, j, k)$  de l'espace de dimension 3 est :

1.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 4x + 4y - 1 = 0$ .
2.  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 1 = 0$ .
3.  $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 3x - y + z + 1 = 0$ .
4.  $x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 4xy - 2x + 4y = 0$ .
5.  $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0$ .
6.  $7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 = 0$ .
7.  $(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y) + (x-y) = 0$ .
8.  $xy + yz = 1$ .
9.  $xy + yz + zx + 2y + 1 = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005825]

### Exercice 2 \*\*

Déterminer la quadrique contenant le point  $A(2, 3, 2)$  et les deux paraboles ( $\mathcal{P}$ ) d'équations  $\begin{cases} z = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases}$  et ( $\mathcal{P}'$ ) d'équations  $\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$ .

[Correction ▼](#)

[005826]

### Exercice 3 \*\*\*

Démontrer que toute équation du second degré symétrique en  $x, y$  et  $z$  est l'équation d'une surface de révolution (une surface ( $\mathcal{S}$ ) est dite de révolution d'axe ( $\mathcal{D}$ ) si et seulement si ( $\mathcal{S}$ ) est invariante par toute rotation d'axe ( $\mathcal{D}$ )).

[Correction ▼](#)

[005827]

### Exercice 4 \*\*\*

Former l'équation de la surface de révolution ( $\mathcal{S}$ ) engendrée par la rotation de la droite ( $\mathcal{D}$ )  $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$  autour de la droite ( $\Delta$ ) d'équations  $x = y = z$ . Quelle surface obtient-on ?

[Correction ▼](#)

[005828]

### Exercice 5 \*\*\*

Equation du cône de sommet  $S$  et de directrice ( $\mathcal{C}$ ) dans les cas suivants :

1.  $S(0,0,0)$  et  $(\mathcal{C}) : x = t, y = t^2, z = t^3, t \in \mathbb{R}^*$ .

2.  $S(1, -1, 0)$  et  $(\mathcal{C}) : \begin{cases} y+z = 1 \\ x^2 + y^2 = z \end{cases}$ .

Correction ▼

[005829]

### Exercice 6 \*\*\*

Trouver une équation du cône de sommet  $S$  circonscrit à la surface  $(\mathcal{S})$  quand

1.  $S(0,5,0)$  et  $(\mathcal{S}) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,

2.  $S(0,0,0)$  et  $(\mathcal{S}) : x^2 + xy + z - 1 = 0$ . (Préciser la courbe de contact.)

**(Définitions.** Le cône  $(\mathcal{C})$  de sommet  $S$  circonscrit à la surface  $(\mathcal{S})$  est la réunion des tangentes à  $(\mathcal{S})$  passant par  $S$ . D'autre part, une droite est tangente à la surface  $(\mathcal{S})$  en un point  $M$  si et seulement si elle passe par  $M$  et est contenue dans le plan tangent à  $(\mathcal{S})$  en  $M$ ).

Correction ▼

[005830]

### Exercice 7 \*\*\*

Pour quelles valeurs de  $\lambda$  la surface  $(\mathcal{S})$  d'équation  $x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda = 0$  est-elle un cône du second degré ? En préciser alors le sommet et une directrice.

Correction ▼

[005831]

### Exercice 8 \*

Montrer que l'arc paramétré  $\begin{cases} x = \frac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) \\ y = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) \\ z = e^t \end{cases}$  est tracé sur un cône du second degré de sommet  $O$ .

Correction ▼

[005832]

### Exercice 9 \*\*\*

Equation cartésienne du cylindre  $(\mathcal{C})$  de direction  $\vec{u}$  et de directrice  $(C)$  dans les cas suivants :

1.  $\vec{u}(1,0,1)$  et  $(C) : x = a \cos t, y = b \sin t, z = a \sin t \cos t$  ( $a$  et  $b$  tous deux non nuls).

2.  $\vec{u}(0,1,1)$  et  $(C) : \begin{cases} y+z = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ .

Correction ▼

[005833]

### Exercice 10 \*\*

Equation du cylindre  $(\mathcal{C})$  de section droite la courbe  $(C)$  d'équations  $\begin{cases} z = x \\ 2x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Correction ▼

[005834]

### Exercice 11 \*\* I

Equation cartésienne du cylindre de révolution  $(\mathcal{C})$  de rayon  $R$  et d'axe  $(\mathcal{D})$  d'équations  $\begin{cases} x = z + 2 \\ y = z + 1 \end{cases}$ . Déterminer  $R$  pour que la droite  $(Oz)$  soit tangente au cylindre.

Correction ▼

[005835]

### Exercice 12 \*

Trouver les plans tangents à l'ellipsoïde d'équation  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  qui sont parallèles au plan d'équation  $x + 4y + 6z = 0$ .

[Correction ▼](#)

[005836]

---

**Exercice 13** \*\*

Trouver les plans tangents à la surface ( $\mathcal{S}$ ) d'équation  $x - 8yz = 0$  et contenant la droite ( $\mathcal{D}$ )

d'équations  $\begin{cases} y = 1 \\ x + 4z + 2 = 0 \end{cases}$ .

[Correction ▼](#)

[005837]

---

**Exercice 14** \*\* I

1. Equation du cylindre de révolution ( $\mathcal{C}$ ) d'axe la droite d'équations  $x = y + 1 = 3z - 6$  et de rayon 3.
2. Equation du cône de révolution ( $\mathcal{C}$ ) d'axe la droite d'équations  $x = y + 1 = 3z - 6$ , de sommet  $S(0, -1, 2)$  et de demi-angle au sommet  $\frac{\pi}{3}$ .

[Correction ▼](#)

[005838]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on pose  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz$ .

Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz = x^2 + (y - z)^2 = X^2 + 2Y^2$  en posant  $X = x$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z)$  et  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$  correspondant au changement de bases orthonormées de matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ .

Notons  $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$  le repère orthonormé ainsi défini. La surface  $(\mathcal{S})$  admet pour équation dans  $\mathcal{R}'$   $X^2 + 2Y^2 - 4X + 2\sqrt{2}(Y + Z) - 1 = 0$  ou encore

$$(X - 2)^2 + 2\left(Y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -2\sqrt{2}\left(Z - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

La surface  $(\mathcal{S})$  est un parabolôïde elliptique de sommet  $S$  de coordonnées  $\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$  dans  $\mathcal{R}'$  et donc  $(2, 2, 1)$  dans  $\mathcal{R}$ .

2. En posant  $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$  et  $Z = z$ , on obtient :  $2X^2 + Z^2 = 1$ .

La surface  $(\mathcal{S})$  est un cylindre elliptique d'axe  $(OY)$  ou encore d'axe la droite d'équations  $\begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$ .

3. Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz$ .

La matrice de  $Q$  dans la base canonique  $(i, j, k)$  de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 1 - X & -1 & 1 \\ -1 & 1 - X & 0 \\ 1 & 0 & 1 - X \end{vmatrix} = (1 - X)^3 + (X - 1) + (X - 1) = (1 - X)((1 - X)^2 - 2) \\ &= (1 - X)(1 + \sqrt{2} - X)(1 + \sqrt{2} - X). \end{aligned}$$

$Q$  est de rang 3 et de signature  $(2, 1)$ . La surface  $(\mathcal{S})$  peut être un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône de révolution.

$\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(e_1)$  où  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$ .

$\text{Ker}(A - (1 + \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_2)$  où  $e_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, -1, 1)$  et  $\text{Ker}(A - (1 - \sqrt{2})I_3) = \text{Vect}(e_3)$  où  $e_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, 1, -1)$

La matrice de passage correspondante est la matrice  $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

Déterminons une équation réduite de la surface  $(\mathcal{S})$  dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$ .

$$\begin{aligned}
& X^2 + (1 + \sqrt{2})Y^2 + (1 - \sqrt{2})Z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(Y + Z) - \frac{1}{2}(\sqrt{2}X - Y + Z) + \frac{1}{2}(\sqrt{2}X + Y - Z) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left( Y^2 + \frac{3 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} Y \right) + (1 - \sqrt{2}) \left( Z^2 - \frac{3 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} Z \right) + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left( Y + \frac{3 + \sqrt{2}}{2(2 + \sqrt{2})} \right)^2 - \frac{(3 + \sqrt{2})^2}{8(1 + \sqrt{2})} + (1 - \sqrt{2}) \left( Z - \frac{3 - \sqrt{2}}{2(2 - \sqrt{2})} \right)^2 - \frac{(3 - \sqrt{2})^2}{8(1 - \sqrt{2})} + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left( Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (1 - \sqrt{2}) \left( Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = \frac{11 + 6\sqrt{2}}{8(1 + \sqrt{2})} + \frac{11 - 6\sqrt{2}}{8(1 - \sqrt{2})} - 1 \\
& \Leftrightarrow X^2 + (1 + \sqrt{2}) \left( Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + (1 - \sqrt{2}) \left( Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = -\frac{3}{4} \\
& \Leftrightarrow -\frac{4}{3}X^2 - \frac{4(1 + \sqrt{2})}{3} \left( Y + 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 + \frac{4(\sqrt{2} - 1)}{3} \left( Z - 1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un hyperboloïde à deux nappes de centre de coordonnées  $\left(0, -1 + \frac{\sqrt{2}}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ .

4. On pose  $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y)$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y)$  et  $Z = z$ . Dans le repère  $\mathcal{R}'$  ainsi défini, la surface ( $\mathcal{S}$ ) admet pour équation  $5X^2 + 5Z^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}(X + 2Y) + \frac{4}{\sqrt{5}}(-2X + Y) = 0$  ou encore  $5\left(X - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + 5Z^2 = 1$ .

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équations  $\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ Z = 0 \end{cases}$  dans  $\mathcal{R}'$  et de rayon  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

5.  $x^2 - 4x - 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 3(y + 2)$ . La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un cylindre parabolique de direction ( $Oz$ ).

6. Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $Q(x, y, z) = 7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz$ . La matrice de  $Q$  dans la base canonique  $(i, j, k)$  de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 10 \\ 2 & -2 & 8 \\ 10 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \begin{vmatrix} 7 - X & 2 & 10 \\ 2 & -2 - X & 8 \\ 10 & 8 & 4 - X \end{vmatrix} = (7 - X)(X^2 - 2X - 72) - 2(-2X - 72) + 10(10X + 36) \\
&= -X^3 + 9X^2 + 162X = -X(X + 9)(X - 18).
\end{aligned}$$

Donc  $Q$  est de rang 2 et de signature  $(1, 1)$ .

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 2y + 10z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 10x + 8y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4z \\ 5x + 4y = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 2z \end{cases} \text{ et } \text{Ker}(A) = \text{Vect}(e_1)$$

où  $e_1 = \frac{1}{3}(-2, 2, 1)$ .

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(A + 9I_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 16x + 2y + 10z = 0 \\ 2x + 7y + 8z = 0 \\ 10x + 8y + 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -8x - 5z \\ z = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ z = -2x \end{cases} \text{ et } \text{Ker}(A + 9I_3) =$$

$\text{Vect}(e_2)$  où  $e_2 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$ .

$\text{Ker}(A - 18I_3) = \text{Vect}(e_3)$  où  $e_3 = -e_1 \wedge e_2 = \frac{1}{3}(2, 1, 2)$ .

La matrice de passage du changement de bases ainsi défini est  $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminons une équation réduite de la surface ( $\mathcal{S}$ ) dans le repère  $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$

$$\begin{aligned} 7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy + 20xz + 16yz - 36x + 72y - 108z + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 - 12(-2X + Y + 2Z) + 24(2X + 2Y + Z) - 36(X - 2Y + 2Z) + 36 &= 0 \\ \Leftrightarrow -9Y^2 + 18Z^2 + 36X + 108Y - 72Z + 36 = 0 &\Leftrightarrow -Y^2 + 2Z^2 + 4X + 12Y - 8Z + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 4(X + 8) = (Y - 6)^2 - 2(Z - 2)^2. \end{aligned}$$

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un parabolôïde hyperbolique. Son point selle est le point de coordonnées  $(-8, 6, 2)$  dans le repère  $\mathcal{R}'$ .

7. La surface ( $\mathcal{S}$ ) admet pour équation cartésienne :  $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx - x + y = 0$ .

Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $Q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zx$ . La matrice de  $Q$  dans la base canonique

$(i, j, k)$  de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ .  $\text{Sp}(A) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ . Une base orthonormée  $(e_1, e_2, e_3)$  de

vecteurs propres est la famille de matrice  $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ .

Dans le repère  $\mathcal{R}' = (O, e_1, e_2, e_3)$ , la surface ( $\mathcal{S}$ ) admet pour équation cartésienne  $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - (\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z) - (-\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z) = 0$  ou encore  $\frac{3}{2}(X^2 + Y^2) - \sqrt{2}X = 0$  ou enfin  $(X - \frac{\sqrt{2}}{3})^2 + Y^2 = \frac{2}{9}$ .

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un cylindre de révolution d'axe la droite d'équation  $\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ Y = 0 \end{cases}$  dans le repère  $\mathcal{R}'$  et de rayon  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

8. En posant  $X = y$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + z)$  (et  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-y + z)$ ),  $xy + yz = 0 \Leftrightarrow XY = \sqrt{2}$ .

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un cylindre hyperbolique.

9. Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , posons  $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$ .

La matrice de  $Q$  dans la base canonique  $(i, j, k)$  de  $\mathbb{R}^3$  est  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .  $\text{Sp}(A) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$  et donc

la surface ( $\mathcal{S}$ ) est soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, soit un cône du second degré et dans tous les cas une surface de révolution (puisque les deux valeurs propres négatives sont égales) d'axe de direction  $\text{Ker}(A - I_3) = \text{Vect}(1, 1, 1)$  et passant par le point critique  $\Omega(-1, 1, -1)$ .

Quand on se place dans le repère  $(\Omega, i, j, k)$ , la surface ( $\mathcal{S}$ ) admet pour équation  $XY + YZ + ZX + 2 = 0$  (car  $f(-1, 1, -1) = 2$ ) puis dans le repère  $(\Omega, e_1, e_2, e_3)$ ,  $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + Z^2 + 2 = 0$  ou encore  $\frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{4}Y^2 - \frac{1}{2}Z^2 = 1$ .

La surface ( $\mathcal{S}$ ) est un hyperboloïde de révolution à une nappe.

On cherche  $(a, b, c, d, e, f, g, h, i, j) \neq (0, \dots, 0)$  tel que la surface  $(\mathcal{S})$  d'équation  $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + 2gx + 2hy + 2iz + j = 0$  contienne la parabole  $(\mathcal{P})$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ , la

parabole  $(\mathcal{P}')$  de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = \frac{t^2}{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ , et le point  $A(2, 3, 2)$ .

$$(\mathcal{P}) \subset (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{a}{4}t^4 + bt^2 + dt^3 + gt^2 + 2ht + j = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{a}{4}t^4 + dt^3 + (b+g)t^2 + 2ht + j = 0$$

$$\Leftrightarrow a = d = h = j = 0 \text{ et } g = -b.$$

Donc  $(\mathcal{P})$  est contenue dans  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $(\mathcal{S})$  a une équation de la forme  $by^2 + cz^2 + 2eyz + 2fzx - 2bx + 2iz = 0$  avec  $(b, c, e, f, i) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ .

$$(\mathcal{P}') \subset (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, bt^2 + \frac{c}{4}t^4 + et^3 + it^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{c}{4}t^4 + et^3 + (b+i)t^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow c = e = 0 \text{ et } i = -b.$$

Donc  $(\mathcal{P})$  et  $(\mathcal{P}')$  sont contenues dans  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $(\mathcal{S})$  a une équation de la forme  $by^2 + 2fzx - 2bx - 2bz = 0$  avec  $(b, f) \neq (0, 0)$ .

Enfin,  $A \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow 9b + 8f - 4b - 4b = 0 \Leftrightarrow b = -8f$  et  $f \neq 0$ . On trouve donc une et une seule quadrique à savoir la surface  $(\mathcal{S})$  d'équation  $-4y^2 + zx + 8x + 8z = 0$ .

En posant  $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)$ ,  $Y = y$  et  $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-z)$ , on obtient

$$-4y^2 + zx + 8x + 8z = -4Y^2 + \frac{1}{2}(X+Z)(X-Z) + 8\sqrt{2}X$$

$$= \frac{1}{2}(X+8\sqrt{2})^2 - 4Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 - 64.$$

Dans le nouveau repère ainsi défini, une équation cartésienne de la surface  $(\mathcal{S})$  est  $\frac{1}{128}(X+8\sqrt{2})^2 - \frac{1}{16}Y^2 + \frac{1}{128}Z^2 = 1$  et  $(\mathcal{S})$  est un hyperboloïde à deux nappes.

### Correction de l'exercice 3 ▲

Soit  $(\mathcal{S})$  une surface du second degré d'équation  $f(x, y, z) = 0$  où  $f$  est symétrique en  $x, y$  et  $z$ . Soient  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$  les trois fonctions symétriques élémentaires en  $x, y$  et  $z$ .

Puisque  $f$  est symétrique en  $x, y$  et  $z$ ,  $f$  est un polynôme en  $\sigma_1, \sigma_2$  et  $\sigma_3$ .  $f$  est d'autre part un polynôme de degré 2 en  $x, y$  et  $z$  et donc

$$\text{il existe } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } (a, b) \neq (0, 0) \text{ tel que } f = a\sigma_1^2 + b\sigma_2 + c\sigma_1 + d.$$

Réciproquement, si  $f$  est de la forme ci-dessus, alors  $f$  est symétrique en  $x, y$  et  $z$ .

Puisque  $\sigma_2 = xy + yz + zx = \frac{1}{2}((x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2))$ ,  $(\mathcal{S})$  admet une équation cartésienne de la forme :

$$(a + \frac{b}{2})(x+y+z)^2 - b(x^2 + y^2 + z^2) + c(x+y+z) + d = 0 \text{ où } (a, b) \neq (0, 0).$$

Soit  $(\mathcal{D})$  la droite passant par  $O$  dirigée par  $\vec{n} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  ( $\vec{n}$  est vecteur normal à tout plan d'équation  $x+y+z=k, k \in \mathbb{R}$ ) et soit  $r$  une rotation quelconque d'axe  $(\mathcal{D})$ .

Si  $M$  est un point de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $M' = r(M)$  a pour coordonnées  $(x', y', z')$  alors  $x+y+z = x' + y' + z'$  car  $M$  et  $M'$  sont dans un plan perpendiculaire à  $(\mathcal{D})$  et  $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$  car une rotation est une isométrie et car  $r(O) = O$ .

Finalement, pour toute rotation  $r$  d'axe  $(\mathcal{D})$ ,  $M \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow r(M) \in (\mathcal{S})$  et donc la surface  $(\mathcal{S})$  est une surface de révolution d'axe  $(\mathcal{D})$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

Soit  $A(a, b, c)$  un point quelconque de l'espace  $E_3$ .

Déterminons un système d'équation du cercle  $(C_A)$  d'axe  $(\Delta)$  d'équations  $x = y = z$  passant par  $A$ .

Ce cercle est par exemple l'intersection du plan passant par  $A$  de vecteur normal  $(1, 1, 1)$  et de la sphère de centre  $O$  et de rayon  $OA$ .

Un système d'équations de  $(C_A)$  est  $\begin{cases} x+y+z = a+b+c \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2 \end{cases}$ .

Déterminons alors une équation cartésienne de la surface  $\mathcal{S}$ . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point  $M(x, y, z)$  soit un point de  $(\mathcal{S})$  est  $(C_M) \cap (\mathcal{D}) \neq \emptyset$ . Donc

$$\begin{aligned}
 M \in (\mathcal{S}) &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x+y+z = \alpha + \beta + \gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ \alpha = \gamma + 2 \\ \beta = 2\gamma + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma + 2 \\ \beta = 2\gamma + 1 \\ x+y+z = \gamma + 2 + 2\gamma + 1 + \gamma \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} \alpha = \gamma + 2 \\ \beta = 2\gamma + 1 \\ \gamma = \frac{1}{4}(x+y+z-3) \\ x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)+2\right)^2 + \left(\frac{2}{4}(x+y+z-3)+1\right)^2 + \left(\frac{1}{4}(x+y+z-3)\right)^2 \\
 &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = (x+y+z+5)^2 + 4(x+y+z-1)^2 + (x+y+z-3)^2 \\
 &\Leftrightarrow 16(x^2+y^2+z^2) = 6(x+y+z)^2 - 2(x+y+z) + 38 \\
 &\Leftrightarrow 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0.
 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de  $(\mathcal{S})$  est  $5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx) - (x+y+z) - 19 = 0$ .

La matrice de la forme quadratique  $(x, y, z) \mapsto 5(x^2+y^2+z^2) - 6(xy+yz+zx)$  dans la base canonique de

$\mathbb{R}^3$  est  $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ . Ses valeurs propres sont 8, valeur propre d'ordre 2 associée au plan d'équation

$x+y+z=0$  et  $-1$  valeur propre d'ordre 1 associé à la droite d'équation. Dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  où  $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$  et  $\vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$M \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow 8x'^2 + 8y'^2 - z'^2 - \sqrt{3}z' - 19 = 0 \Leftrightarrow 8\left(x' - \frac{\sqrt{3}}{16}\right)^2 + 8y'^2 - z'^2 = 19 + \frac{3}{32}.$$

La surface  $(\mathcal{S})$  est un hyperboloïde à une nappe.

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. On note  $(\mathcal{S})$  le cône de sommet  $S$  et de directrice  $(\mathcal{C})$ .



$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (\mathcal{S}) \setminus \{O\} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / O + \lambda \overrightarrow{OM} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} \lambda x = t \\ \lambda y = t^2 \\ \lambda z = t^3 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \exists t \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} t = \lambda x \\ y = \lambda x^2 \\ z = \lambda^2 x^3 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 x^3 \\
&\Leftrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \text{ et } z = y^2 x.
\end{aligned}$$

Si on récupère le point  $O$ ,  $M(x,y,z) \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow (x = y = 0 \text{ ou } xy \neq 0) \text{ et } z = y^2 x$ .

On peut noter que la surface d'équation  $z = y^2 x$  est la réunion du cône, sommet  $O$  compris, et des axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$  qui ne font pas partie du cône (à l'exception du point  $O$ ).

2. On note  $(\mathcal{S})$  le cône de sommet  $S$  et de directrice  $(\mathcal{C})$ .

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (\mathcal{S}) \setminus \{S\} &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / S + \lambda \overrightarrow{SM} \in (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / (1 + \lambda(x-1), -1 + \lambda(y+1), \lambda z) \in (\mathcal{C}) \\
&\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \begin{cases} -1 + \lambda(y+1) + \lambda z = 1 \\ (1 + \lambda(x-1))^2 + (-1 + \lambda(y+1))^2 = \lambda z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \left(1 + \frac{2}{y+z+1}(x-1)\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{y+z+1}(y+1)\right)^2 = \frac{2}{y+z+1}z \\
&\Leftrightarrow (2x+y+z-1)^2 + (y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z \text{ et } y+z+1 \neq 0.
\end{aligned}$$

En résumé,  $M(x,y,z)$  est dans  $(\mathcal{S})$  si et seulement si  $M = S$  ou  $M \neq S$  et  $(2x+y+z-1)^2 + (y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$  et  $y+z+1 \neq 0$ .

Maintenant le point  $S(1, -1, 0)$  est dans le plan  $(P)$  d'équation  $y+z+1=0$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  n'a aucun point dans ce plan. Donc la surface  $(\mathcal{S})$  contient un et un seul point de ce plan.

Notons alors  $(\mathcal{S}')$  la surface d'équation  $(2x+y+z-1)^2 + (y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$  et vérifions que l'intersection de  $(\mathcal{S}')$  et de  $(P)$  est  $\{S\}$ . Ceci montrera que  $(\mathcal{S}') = (\mathcal{S})$ .

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (\mathcal{S}') \cap (P) &\Leftrightarrow \begin{cases} y+z+1=0 \\ (2x+y+z-1)^2 + (y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y+z+1=0 \\ 2x+y+z-1=0 \\ y-z+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ z=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow M=S
\end{aligned}$$

Finalement  $(\mathcal{S}') = (\mathcal{S})$ . Une équation de  $(\mathcal{S})$  est donc  $(2x+y+z-1)^2 + (y-z+1)^2 = 2(y+z+1)z$  ou encore  $4x^2 + 2y^2 + 4xy + 4xz - 2yz - 4x + 2y - 6z + 2 = 0$ .  $(\mathcal{S})$  est donc un cône du second degré.

### Correction de l'exercice 6 ▲

Notons  $(C)$  le cône de sommet  $S$  circonscrit à la surface  $(\mathcal{S})$ .

1. Ici  $(\mathcal{S})$  est la sphère de centre  $O$  et de rayon 3 et le point  $S$  est extérieur à cette sphère. Donc

$$\begin{aligned}
M(x,y,z) \in (C) &\Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } d(O, (SM)) = 3 \Leftrightarrow M = S \text{ ou } M \neq S \text{ et } \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \\
&\Leftrightarrow \|\overrightarrow{SO} \wedge \overrightarrow{SM}\| = 3\|\overrightarrow{SM}\| \Leftrightarrow \|(0, 5, 0) \wedge (x, y-5, z)\| = 3\|(x, y-5, z)\| \\
&\Leftrightarrow (5z)^2 + (5x)^2 = 9(x^2 + (y-5)^2 + z^2) \Leftrightarrow 16x^2 - 9(y-5)^2 + 16z^2 = 0.
\end{aligned}$$

2. Soit  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un point de  $(\mathcal{S})$  (c'est-à-dire tel que  $x_0^2 + x_0y_0 + z_0 - 1 = 0$ ).  $(\mathcal{S})$  est une surface du second degré. Une équation du plan tangent à  $(\mathcal{S})$  en  $M_0$  est fournie par la règle de dédoublement des termes :

$$xx_0 + \frac{1}{2}(y_0x + x_0y) + \frac{1}{2}(z + z_0) - 1 = 0.$$

Ce plan tangent contient le point  $S(0, 0, 0)$  si et seulement si  $z_0 = 2$  ce qui montre déjà que la courbe de contact admet pour système d'équations  $\begin{cases} x^2 + xy + z - 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$  ou encore  $\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ . C'est une hyperbole du plan d'équation  $z = 2$ .

Le cône de sommet  $S$  circonscrit à  $(\mathcal{S})$  est alors le cône de sommet  $S$  et de directrice  $(\mathcal{C})$  d'équations  $\begin{cases} x^2 + xy + 1 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ . On trouve la surface d'équation  $4x^2 + 4xy + z^2 = 0$ . C'est un cône du second degré.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Une équation de  $(\mathcal{S})$  est encore  $xy + yz + zx - \lambda x - \lambda y - \lambda z + \lambda = 0$ .

La matrice de la forme quadratique  $Q : (x, y, z) \mapsto xy + yz + zx$  dans la base  $(i, j, k)$  est  $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

est les valeurs propres de cette matrice sont  $-\frac{1}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}$  et  $1$ . Le rang de  $Q$  est 3 et sa signature est  $(1, 2)$ . La surface  $(\mathcal{S})$  est à priori soit un hyperboloïde, soit un cône du second degré. Donc  $(\mathcal{S})$  est un cône du second degré si et seulement si son (unique) centre de symétrie qui est aussi l'unique point critique de la fonction  $f : (x, y, z) \mapsto x(\lambda - y) + y(\lambda - z) + z(\lambda - x) - \lambda$  appartient à  $(\mathcal{S})$ .

**Point critique.**

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z = \lambda \\ z + x = \lambda \\ x + y = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{\lambda}{2}.$$

On note alors  $\Omega$  le point de coordonnées  $\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}\right)$ .

$(\mathcal{S})$  est un cône  $\Leftrightarrow \Omega \in (\mathcal{S}) \Leftrightarrow \frac{3\lambda^2}{4} - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \left\{0, \frac{4}{3}\right\}$ .

• Si  $\lambda = 0$ ,  $(\mathcal{S})$  admet pour équation  $xy + yz + zx = 0$ . Dans le repère  $(O, X, Y, Z)$  où  $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$ ,  $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y - 2z)$  et  $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z)$ ,  $(\mathcal{S})$  admet pour équation cartésienne  $-\frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \frac{1}{2}Z^2 = 0$  ou encore

$(\mathcal{S})$  est le cône de révolution de sommet  $O$  et de section droite le cercle d'équations  $\begin{cases} Z = 1 \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \end{cases}$  dans

$(O, X, Y, Z)$  ou encore  $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$  dans  $(O, x, y, z)$ .

Puisque  $(\mathcal{S})$  est un cône de révolution de sommet  $O$  et d'axe la droite d'équations  $x = y = z$ , il est plus intéressant de fournir le demi angle au sommet  $\theta$ . Le point  $A(1, 1, 1)$  est sur l'axe et le point  $M(2, 2 - 1)$  est sur

le cône. Donc  $\theta = \arccos \left( \frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OM}|} \right) = \arccos \left( \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ .

• Si  $\lambda = \frac{4}{3}$ ,  $(\mathcal{S})$  admet pour équation  $xy + yz + zx - \frac{4}{3}(x + y + z) + \frac{4}{3} = 0$  dans  $(O, i, j, k)$  ou encore  $XY + XZ + YZ = 0$  dans  $(\Omega, i, j, k)$  ce qui ramène au cas précédent.

### Correction de l'exercice 8 ▲

Pour tout réel  $t$ ,  $(x(t))^2 + (y(t))^2 = \frac{1}{4}e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\cos t + \sin t)^2) = \frac{1}{2}e^{2t} = \frac{1}{2}(z(t))^2$  et le support de l'arc considéré est contenu dans le cône de révolution d'équation  $z^2 = 2(x^2 + y^2)$ .

### Correction de l'exercice 9 ▲

1.

$$\begin{aligned}
 M(x,y,z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (C) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} x = a \cos t + \lambda \\ y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + \lambda \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} \lambda = x - a \cos t \\ y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + x - a \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ z = a \cos t \sin t + x - a \cos t \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ z - x = a \cos t (\sin t - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} / \begin{cases} y = b \sin t \\ b(z - x) = a \cos t (y - b) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2.
 \end{aligned}$$

En effet,

•  $\Rightarrow$  / s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $y = b \sin t$  et  $b(z - x) = a \cos t (y - b)$  alors

$$\begin{aligned}
 b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 &= b^2 a^2 \cos^2 t (y - b)^2 + b^2 \sin^2 t a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) \\
 &= a^2 b^2 (y - b)^2.
 \end{aligned}$$

•  $\Leftarrow$  / Réciproquement, si  $b^4(z - x)^2 + y^2 a^2 (y - b)^2 = a^2 b^2 (y - b)^2$  alors  $b^4(z - x)^2 = a^2 (y - b)^2 (b^2 - y^2)$  et donc

ou bien  $y = b$ , ou bien  $b^2 - y^2 \geq 0$ . Par suite, il existe un réel  $t$  tel que  $y = b \sin t = b \sin(\pi - t)$  puis

$$\begin{aligned}
 b^4(z - x)^2 = a^2 (y - b)^2 (b^2 - y^2) &\Rightarrow b^4(z - x)^2 = a^2 (b \sin t - b)^2 b^2 \cos^2 t \Rightarrow b(z - x) = \pm a \cos t (b \sin t - b) \\
 &\Rightarrow b(z - x) = a \cos t (y - b) \text{ ou } b(z - x) = a \cos(\pi - t)(y - b)
 \end{aligned}$$

et il existe un réel  $t'$  tel que  $y = b \sin t'$  et  $b(z - x) = a \cos t'(y - b)$ .

2.

$$\begin{aligned}
 M(x,y,z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (C) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = X \\ y = Y + \lambda \\ z = Z + \lambda \\ Y + Z = 1 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} (y - \lambda) + (z - \lambda) = 1 \\ x^2 + (y - \lambda)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}(y + z - 1)\right)^2 = 1 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 + (y - z + 1)^2 = 4.
 \end{aligned}$$

### Correction de l'exercice 10 ▲

La direction du cylindre est orthogonale au plan d'équation  $z = x$  et est donc engendrée par le vecteur  $\vec{u}(1, 0, -1)$ .

$$\begin{aligned}
 M(x,y,z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists m \in (C) / M = m + \lambda \vec{u} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = X - \lambda \\ y = Y \\ z = Z + \lambda \\ Z = X \\ 2X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \begin{cases} z - \lambda = x + \lambda \\ 2(x + \lambda)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow 2 \left(x + \frac{1}{2}(z - x)\right)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow (x + z)^2 + 2y^2 = 2.
 \end{aligned}$$

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

Un repère de  $(\mathcal{D})$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(2, 1, 0)$  et  $\vec{u}(1, 1, 1)$ .

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathcal{D})) = R \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|^2 = R^2 \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \|(x-2, y-1, z) \wedge (1, 1, 1)\|^2 = R^2 \|(1, 1, 1)\|^2 \\ &\Leftrightarrow (y-z-1)^2 + (x-z-2)^2 + (x-y-1)^2 = 3R^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 6x + 6z + 6 - 3R^2 = 0. \end{aligned}$$

La droite  $(Oz)$  est tangente à  $(\mathcal{C})$  si et seulement si  $d((Oz), (\mathcal{D})) = R$ .

$$(Oz) \text{ est tangente à } (\mathcal{C}) \Leftrightarrow \frac{[\overrightarrow{OA}, \vec{k}, \vec{u}]^2}{\|\vec{k} \wedge \vec{u}\|^2} = R^2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 = \|(-1, 1, 0)\|^2 \Leftrightarrow 1 = 2R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

En un point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  de l'ellipsoïde la règle de dédoublement des termes fournit une équation du plan tangent :  $xx_0 + 2yy_0 + 3zz_0 = 21$ .

Ce plan est parallèle au plan d'équation  $x + 4y + 6z = 0$  si et seulement si le vecteur  $(x_0, 2y_0, 3z_0)$  est colinéaire au vecteur  $(1, 4, 6)$  ou encore si et seulement si  $2x_0 = y_0 = z_0$ .

Enfin le point  $(x_0, 2x_0, 2x_0)$  est sur l'ellipsoïde si et seulement si  $x_0^2 + 8x_0^2 + 12x_0^2 = 21$  ce qui équivaut à  $x_0^2 = 1$ .

Les plans cherchés sont les deux plans d'équations respectives  $x + 4y + 6z = 21$  et  $x + 4y + 6z = -21$ .

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

Le plan tangent  $(P_0)$  en  $(x_0, y_0, z_0)$  tel que  $x_0 - 8y_0z_0 = 0$  admet pour équation  $(x + x_0) - 8(z_0y + y_0z) = 0$  ou encore  $x - 8z_0y - 8y_0z + 8y_0z_0 = 0$ .

Un repère de  $(\mathcal{D})$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(-2, 1, 0)$  et  $\vec{u}(4, 0, -1)$ .

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}) \subset (P_0) &\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, (-2 + 4\lambda) - 8z_0 + 8y_0\lambda + 8y_0z_0 = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, (8y_0 + 4)\lambda + 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y_0 + 4 = 0 \text{ et } 8y_0z_0 - 8z_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } z_0 = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

On trouve un et un seul plan tangent contenant la droite  $(\mathcal{D})$ , à savoir le plan tangent à  $(\mathcal{S})$  en  $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6})$  d'équation  $3x + 4y + 12z + 2 = 0$ .

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

1. Un repère de  $(\mathcal{D})$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(3, 3, 1)$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow d(M, (\mathcal{D})) = 3 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|^2 = 9\|\vec{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|(x, y+1, z-2) \wedge (3, 3, 1)\|^2 = 9 \times 19 \Leftrightarrow (y-3z+7)^2 + (x-3z+6)^2 + 9(x-y-1)^2 = 171. \end{aligned}$$

2. Un repère de  $(\mathcal{D})$  est  $(A, \vec{u})$  où  $A(0, -1, 2)$  et  $\vec{u}(3, 3, 1)$ . De plus,  $S = A$ .

$$\begin{aligned} M(x, y, z) \in (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow M = A \text{ ou } M \neq A \text{ et } \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{AM \times \|\vec{u}\|} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u})^2 = \frac{1}{4}AM^2\|\vec{u}\|^2 \\ &\Leftrightarrow 4(3x+3(y+1)+(z-2))^2 = 19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2) \\ &\Leftrightarrow 4(3x+3y+z+1)^2 - 19(x^2+(y+1)^2+(z-2)^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 17x^2 + 17y^2 - 15z^2 + 72xy + 24xz + 24yz + 24x - 14y + 84z - 91 = 0. \end{aligned}$$

