Coniques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Etudier les courbes dont une équation en repère orthonormé est :

1. $2x^2+6xy+5y^2+4x+6y+1=0$.
2. $x^2+2xy+y^2+3x-2y+1=0$.
3. $2x^2-4xy-3x+3y+1=0$.
4. $-5x^2+6\sqrt{3}xy+y^2-4=0$.
5. $4x^2+12xy+9y^2-2x+1=0$.
6. $(x-y+1)^2+(x+y-1)^2=0$.
7. $x^2+y^2-3x-y+2=0$.
8. $x(x-1)+(y-2)(y-3)=0$.
9. $(x+2y-4)(x-y-1)=3$.
10. $(2x+y-1)^2-3(x+y)=0$.

Correction ▼ [005815]

Exercice 2 **

Etudier les courbes dont une équation polaire (en repère orthonormé direct) est

1. $r=\frac{2}{1-2\cos\theta}$,
2. $r=\frac{6}{2+\cos\theta}$,
3. $r=\frac{2}{1-\sin\theta}$.

Correction ▼ [005816]

Exercice 3 ***

1. Montrer que toute courbe de degré inférieur ou égal à 2 admet une représentation paramétrique de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} x(t)=\frac{P(t)}{R(t)}\\ y(t)=\frac{Q(t)}{R(t)}\end{array}\right.$$

où P, Q et R sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et montrer réciproquement que toute courbe paramétrée du type précédent est une courbe de degré inférieur ou égal à 2.

2. Etudier la courbe $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2t+1}{t^2+2t-1} \\ y = \frac{t^2-1}{t^2+2t-1} \end{array}\right.$.

Correction ▼ [005817]

Exercice 4 **

Déterminer l'orthoptique d'une parabole, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan par lesquels il passe deux tangentes à la parabole qui soient perpendiculaires.

Correction ▼ [005818]

Exercice 5 ***

1. (Droite de SIMSON) Soient ABC un triangle et M un point du plan.

   Montrer que les projetés orthogonaux P, Q et R du point M sur les côtés (BC), (CA) et (AB) du triangle ABC sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC. La droite passant par les points P, Q et R s'appelle la droite de SIMSON du point M relativement au cercle (ABC).

2. (Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle) Lieu des foyers des paraboles tangentes à trois droites deux à deux non parallèles. Fournir en particulier la construction des points de contacts.

Correction ▼ [005819]

Exercice 6 ***

$(\mathscr{C})$ est le cercle de diamètre $[AB]$. $(\mathscr{D})$ est la tangente en A au cercle $(\mathscr{C})$. P est un point variable sur le cercle $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{T})$ la tangente en P au cercle $(\mathscr{C})$. $(\mathscr{T})$ recoupe $(\mathscr{D})$ en S. La perpendiculaire à la droite (AB) passant par P coupe la droite (BS) en M. Ensemble des points M ?

Correction ▼ [005820]

Exercice 7 **

L'espace de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé (O, i, j, k). On note (Γ) la courbe d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} y = x^2 + x + 1 \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right. .$$

Montrer que (Γ) est une parabole dont on déterminera le sommet, l'axe, le foyer et la directrice.

Correction ▼ [005821]

Exercice 8 **

Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Montrer que la courbe d'équation $P(x) = P(y)$ dans un certain repère orthonormé, est en général la réunion d'une droite et d'une ellipse d'excentricité fixe.

Correction ▼ [005822]

Exercice 9 ***

Soit $(\mathscr{H})$ une hyperbole équilatère de centre O et P et Q deux points de $(\mathscr{H})$ symétriques par rapport à O. Montrer que le cercle de centre P et de rayon PQ recoupe $(\mathscr{H})$ en trois points formant un triangle équilatéral de centre P.

Correction ▼ [005823]

Exercice 10 **

Equation cartésienne de la parabole $(\mathscr{P})$ tangente à (Ox) en $(1,0)$ et à (Oy) en $(0,2)$.

Correction ▼ [005824]

Correction de l'exercice 1 ▲

Dans tout l'exercice, on pose $\mathscr{R} = (O, i, j)$ et (Γ) l'ensemble considéré, d'équation $f(x, y) = 0$.

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 6y + 1$ et $Q((x, y)) = 2x^2 + 6xy + 5y^2$.

   Le discriminant de cette conique est $\Delta = 2 \times 5 - 3^2 = 1 > 0$ et la courbe (Γ) est du genre ellipse c'est-à-dire soit une ellipse, éventuellement un cercle, soit un point, soit l'ensemble vide.

   Point critique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 6y + 4 = 0 \\ 6x + 10y + 6 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = -1 \text{ et } y = 0.$$

   On note Ω le point de coordonnées $(-1, 0)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

   Réduction de Q en base orthonormée. La matrice de Q dans la base (i, j) est $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 - 7X + 1$ et les valeurs propres de A sont $\alpha = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$.

   $\text{Ker}(A - \alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1 + \sqrt{5})x + 2y = 0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_1 = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}(2, 1 + \sqrt{5})$. Puis $\text{Ker}(A - \alpha I_2)$ est la droite d'équation $-(1 - \sqrt{5})x + 2y = 0$ et est engendrée par le vecteur unitaire $e_2 = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2, 1 - \sqrt{5})$.

   Equation réduite de (Γ) dans $\mathscr{R}' = (\Omega, e_1, e_2)$.

   Les termes de degré 1 disparaissent car Ω est l'origine de $\mathscr{R}'$ et d'autre part, $Q(xi + yj) = Q(Xe_1 + Ye_2) = \alpha X^2 + \beta Y^2$.

   Il manque simplement la constante mais si on effectue le changement de variables $x = x_0 + aX + bY$ et $y = y_0 + cX + dY$, la constante est bien sûr $f((x_0, y_0))$. Donc une équation cartésienne de (Γ) dans $\mathscr{R}'$ est $\alpha X^2 + \beta Y^2 + f((-1, 0)) = 0$ ce qui s'écrit encore

$$\frac{7+3\sqrt{5}}{2} X^2 + \frac{7-3\sqrt{5}}{2} Y^2 = 1.$$

   Eléménts caractéristiques de la courbe (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$.

   (Γ) est une ellipse de centre Ω, d'axe focal (ΩY) car $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}} = b$ et d'axe non focal (ΩX).

   - *Centre* $\Omega(0, 0)_{\mathscr{R}'}$.

   - *Excentricité* $c^2 = b^2 - a^2 = \frac{2}{7-3\sqrt{5}} - \frac{2}{7+3\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$ puis $e^2 = \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{3\sqrt{5}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{-45+21\sqrt{5}}{4}$ et $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45 + 21\sqrt{5}} = 0,69...$

   - *Sommets* $A\left(\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}, 0\right)_{\mathscr{R}'}$ $A'\left(-\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}, 0\right)_{\mathscr{R}'}$ $B\left(0, \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ $B'\left(0, -\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$

   - *Foyers* $\Omega F = \Omega F' = c = \sqrt{3\sqrt{5}}$ et puisque (ΩY) est l'axe focal, $F(0, \sqrt{3\sqrt{5}})$ et $F'(0, -\sqrt{3\sqrt{5}})$.

   - *Directrices* $\Omega K = \Omega K' = \frac{b}{e} = 2\sqrt{\frac{2}{(7-3\sqrt{5})(-45+21\sqrt{5})}} = \frac{2}{7-3\sqrt{5}}\sqrt{\frac{2}{3\sqrt{5}}} = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et donc $(D) : Y = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et $(D') : Y = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.

   Eléménts caractéristiques de (Γ) dans $\mathscr{R}$.

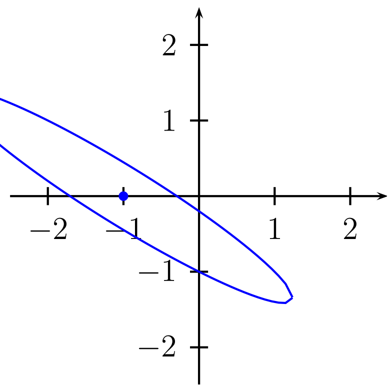
   Les formules de changement de repère s'écrivent $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   - *Centre* $\Omega(-1, 0)_{\mathscr{R}}$ et excentricité $e = \frac{1}{2}\sqrt{-45 + 21\sqrt{5}} = 0,69...$

- *Sommets* $A\left(-1+\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $A'\left(-1-\sqrt{\frac{25-11\sqrt{5}}{10}}, -\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ puis $B\left(-1+\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $B'\left(-1-\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}, \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}\right)_{\mathscr{R}}$

- *Foyers* $F\left(-1+\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, \sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$ et $F'\left(-1-\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}, -\sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}}\right)_{\mathscr{R}}$

-*Directrices* (D) : $\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = \frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$ et (D') : $\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}(2(x+1)+(1-\sqrt{5})y) = -\frac{7+3\sqrt{5}}{\sqrt{6\sqrt{5}}}$.



2. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = x^2+2xy+y^2+3x-2y+1$ puis $Q((x,y)) = x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$. Q est de rang 1 et donc (Γ) est du genre parabole c'est-à-dire soit une parabole, soit une réunion de deux droites parallèles éventuellement confondues, soit l'ensemble vide.

   Si (Γ) est non vide, (Γ) est une conique est de direction asymptotique d'équation $y=-x$ (fournie par $Q(x,y)=0$).

   1ère étude. On étudie l'intersection de (Γ) avec une perpendiculaire quelconque à sa direction. Soit (D_k) la droite d'équation $y = x+k$, $k\in\mathbb{R}$.

   L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_k) est $x^2+2x(x+k)+(x+k)^2+3x-2(x+k)+1=0$ ou encore

$$4x^2+(4k+1)x+k^2-2k+1=0.$$

   Le discriminant de cette équation est $\Delta = (4k+1)^2-16(k^2-2k+1) = 40k-15$. Puisque ce discriminant change de signe, (Γ) est une parabole.

   Le discriminant est nul pour $k=\frac{3}{8}$ ce qui founit la tangente au sommet (T) : $y = x+\frac{3}{8}$ et aussi le sommet :

$$x_S = -\frac{4\times\frac{3}{8}+1}{2\times 4} = -\frac{5}{16} \text{ et } y_S = x_S+\frac{3}{8} = \frac{1}{16}.$$

   Le sommet de la parabole (Γ) est le point $S\left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)$.

   L'axe focal est la perpendiculaire à la droite (T) en S. Une équation de l'axe focal (Δ) est $y+\frac{5}{16} = -\left(x-\frac{1}{16}\right)$ ou encore $y=-x-\frac{1}{4}$.

   Pour obtenir le paramètre, le foyer et la directrice, on constate tout d'abord au vu du signe du discriminant calculé plus haut que $F = S+\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $K = S-\frac{p}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

   Il ne manque plus que le paramètre p. Soit M l'un des deux points de (Γ) situé sur la parallèle à la tangente au sommet passant par F. La construction usuelle d'une parabole point par point montre que le quadrilatère (M,F,K,H) est un carré. Le paramètre p cherché est alors $p = FK = FM$.

Dans ce cas, la droite (MK) est la tangente à (Γ) en M et la bissectrice de l'angle des droites (D) et (Δ). Cette tangente est donc parallèle à l'un des axes de coordonnées.

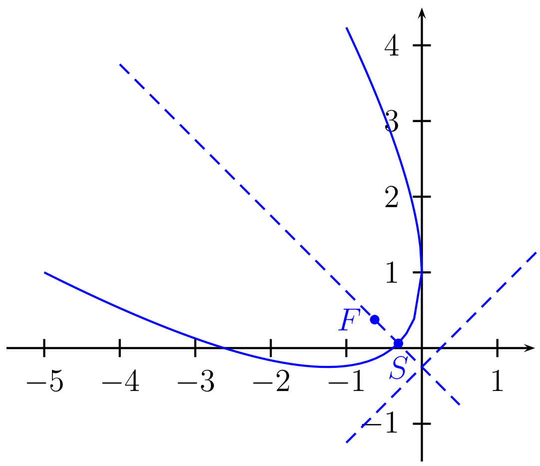
L'équation générale de la tangente en un point (x_0,y_0) de (Γ) est fournie par la règle de dédoublement des termes : $xx_0+xy_0+x_0y+yy_0+\frac{3}{2}(x+x_0)-(y+y_0)+1=0$ ou encore $x\left(x_0+y_0+\frac{3}{2}\right)+y(x_0+y_0-1)+x_0-y_0+1=0$. Cette tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées si et seulement si $x_0+y_0+\frac{3}{2}=0$ ou $x_0+y_0-1=0$.

M est donc sur l'une des deux droites (Δ_1) : $x+y+\frac{3}{2}=0$ ou (Δ_2) : $x+y-1=0$ qui sont toutes deux parallèles à l'axe focal (Δ) : $x+y+\frac{1}{4}=0$.

p est donc aussi la distance de (Δ) à l'une quelconque de ces deux droites ou la distance d'un point quelconque de (Δ) à la droite (Δ_1). Comme le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4},0\right)$ est sur (Δ),

$$p=\frac{\left|-\frac{1}{4}+0+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$$

puis $F=S+\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}-\frac{5}{16},\frac{1}{16}+\frac{5}{16}\right)=\left(-\frac{5}{8},\frac{3}{8}\right)$ et $K=S-\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{5}{16}+\frac{5}{16},\frac{1}{16}-\frac{5}{16}\right)=\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ de sorte que la directrice (D) a pour équation $y=x-\frac{1}{4}$.



2ème étude. On pose $X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ et $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$ ou encore $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ ce qui correspond au changement de bases orthonormées de matrice $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$. On note (e_1,e_2) la famille de matrice P dans la base (i,j). Déterminons une équation de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'=(O,e_1,e_2)$.

$$\begin{aligned}(x+y)^2+3x-2y+1=0 &\Leftrightarrow 2X^2+\frac{3}{\sqrt{2}}(X-Y)-\frac{2}{\sqrt{2}}(X+Y)+1=0\Leftrightarrow 2X^2+\frac{1}{\sqrt{2}}X-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0\\ &\Leftrightarrow 2\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{5}{\sqrt{2}}Y+1=0\Leftrightarrow\left(X+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)^2=\frac{5}{2\sqrt{2}}\left(Y-\frac{3}{8\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Eléments de (Γ) dans $\mathscr{R}'$.

- (Γ) est une parabole de *sommet* $S\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{3}{8\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.

- *Paramètre* $p=\frac{5}{4\sqrt{2}}$. L'axe focal de (Γ) est l'axe (SY) et le foyer a une ordonnée strictement supérieure à Y_S.

- *Foyer* $F=S+\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$.

- *Directrice* $K=S-\frac{5}{8\sqrt{2}}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et donc (D) : $Y=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

Eléments de la parabole (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.

- *Paramètre* $p = \frac{5}{4\sqrt{2}}$. *Sommet* $S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_S - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_S, \frac{1}{\sqrt{2}}X_S + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_S\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{16}, \frac{1}{16}\right)_{\mathscr{R}}$.
- Le *foyer* F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}X_F - \frac{1}{\sqrt{2}}Y_F, \frac{1}{\sqrt{2}}X_F + \frac{1}{\sqrt{2}}Y_F\right)_{\mathscr{R}} = \left(-\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)_{\mathscr{R}}$.
- La *directrice* (D) a pour équation $\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = -\frac{1}{4\sqrt{2}}$ et donc $y = x - \frac{1}{4}$.

3. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x,y) = 2x^2 - 4xy - 3x + 3y + 1$ puis $Q((x,y)) = 2x^2 - 4xy = 0$.

Le discriminant de cette conique est $\Delta = 2 \times 0 - (-2)^2 = -4 < 0$ et la courbe est du genre hyperbole c'est-à-dire soit une hyperbole, soit une réunion de deux droites sécantes. Dans les deux cas, les deux directions asymptotiques admettent pour équation respective $x = 0$ et $x = 2y$ (fourni par $Q(x,y) = 0$)

Point critique.

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x - 4y - 3 = 0 \\ -4x + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{3}{4} \text{ et } y = 0.$$

On note Ω le point de coordonnées $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ dans le repère $\mathscr{R}$.

Asymptotes. Ce sont les droites passant par Ω de directions d'équations $x = 0$ et $x = 2y$. Les asymptotes sont les droites (D_1) : $x = \frac{3}{4}$ et (D_2) : $x - \frac{3}{4} = 2y$. La réunion de ces deux droites a pour équation $\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4} - 2y\right) = 0$ ou encore $2x^2 - 4xy - 3x + 3y + \frac{9}{2} = 0$. (Γ) n'est pas $(D_1) \cup (D_2)$ et donc (Γ) est une hyperbole.

Axe focal et axe transverse.

Ce sont les deux bissectrices de la paire de droites $((D_1),(D_2))$ ou encore l'ensemble des points à égale distance de ces deux droites ou encore l'ensemble des points de coordonnées (x,y) dans $\mathscr{R}$ tels que $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right)^2$.

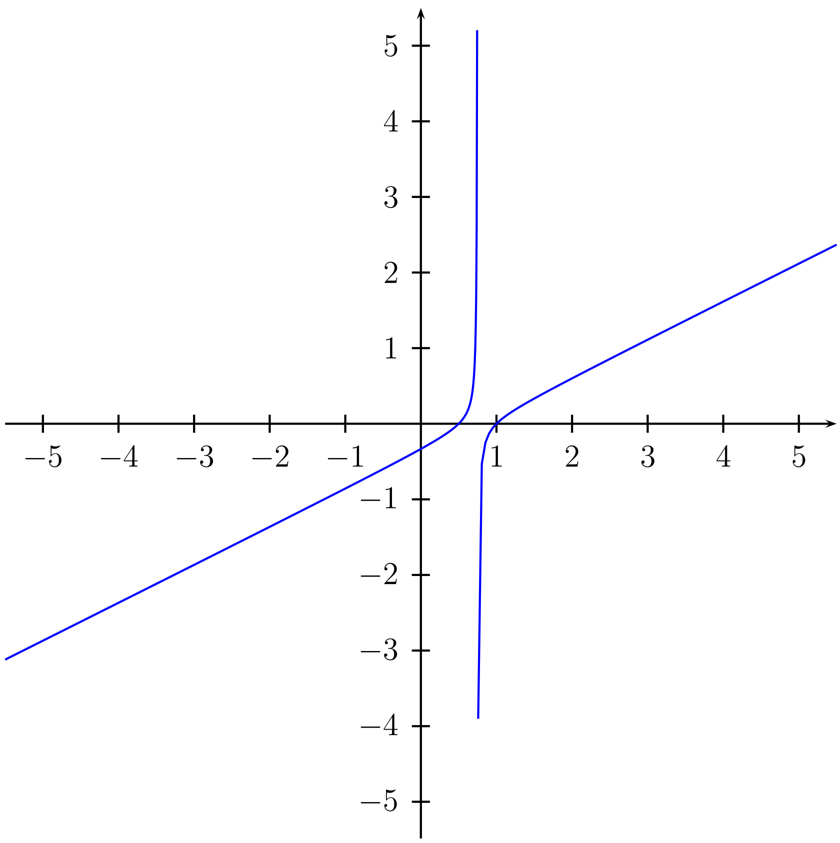
Ce sont donc les droites d'équations respectives $\left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right) = 0$ et $\left(x - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x - 2y - \frac{3}{4}\right) = 0$ ou encore $y = -\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$ et $y = \frac{\sqrt{5}+1}{8}(4x-3)$. Seule l'une de ses deux droites a une intersection non vide avec (Γ), à savoir l'axe focal et les deux points d'intersection sont les sommets de l'hyperbole.

L'équation aux abscisses des points d'intersection de (Γ) et (D_1) est

$$2x^2 - 4x\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right) - 3x + 3\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)\right) + 1 = 0$$

ou encore $2\sqrt{5}x^2 - 3\sqrt{5}x + \frac{9\sqrt{5}-1}{8} = 0$ ou enfin $x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} - \frac{1}{16\sqrt{5}} = 0$ dont le discriminant vaut $\frac{1}{4\sqrt{5}} > 0$.

L'axe focal est donc la droite d'équation $y = -\frac{\sqrt{5}-1}{8}(4x-3)$. Les solutions de l'équation précédente fournissent les abscisses des sommets.



4. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons $Q(x,y) = -5x^2 + 6\sqrt{3}xy + y^2$. Le discriminant de (Γ) vaut $-5-27 = -32 < 0$. La conique est du genre hyperbole et de centre O. Comme $O \notin (\Gamma)$, (Γ) est plus précisément une hyperbole de centre O. Les asymptotes sont fournies par l'égalité $Q(x,y) = 0$ et sont donc les droites d'équations $y = (-3\sqrt{3} \pm 4\sqrt{2})x$.

   La matrice de Q dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} -5 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_M = X^2 + 4X - 32 = (X-4)(X+8)$. Ensuite, $M = PD^tP$ où $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(-8,4)$.

   Les formules de changement de repère s'écrivent $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X + Y) \\ y = \frac{1}{2}(-X + \sqrt{3}Y) \end{array}\right.$ ou aussi $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x - y) \\ Y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{3}y) \end{array}\right.$.

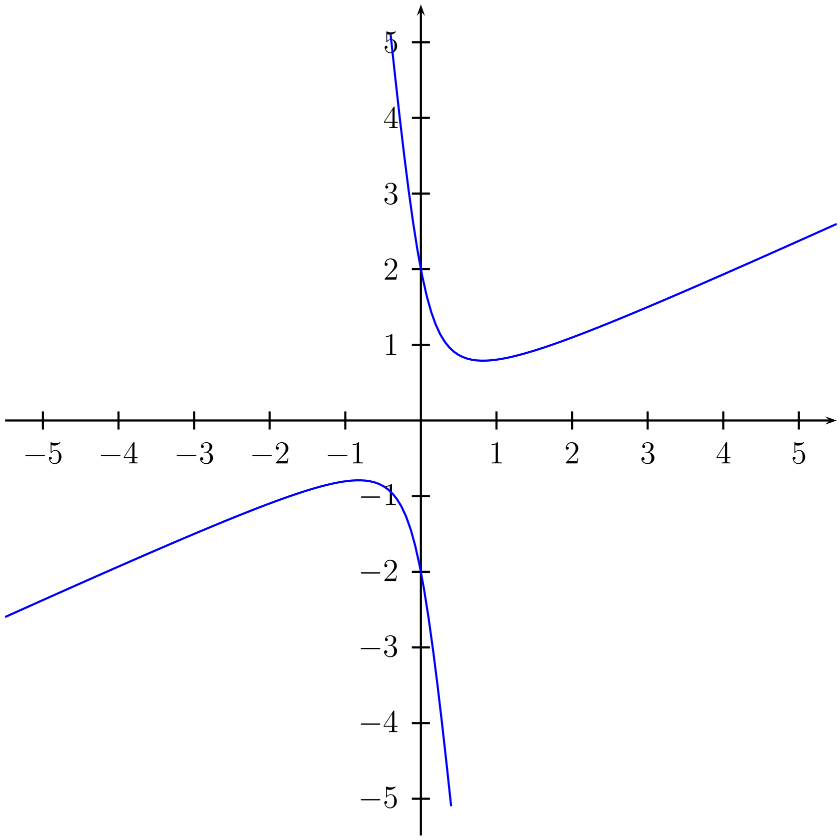
   Dans $\mathscr{R}'(O, e_1, e_2)$, (Γ) a pour équation $-8X^2 + 4Y^2 - 4 = 0$ ou encore $-\frac{X^2}{(1/\sqrt{2})^2} + Y^2 = 1$. Donc $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = 1$ et $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

   Eléments de l'hyperbole dans $\mathscr{R}'$ puis $\mathscr{R}$. L'axe focal est (O, e_2) c'est-à-dire la droite d'équation $X = 0$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore $y = \sqrt{3}x$ dans $\mathscr{R}$.

   - Les *sommets* sont les points B et B' de coordonées $(1,0)$ et $(-1,0)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

   - *Excentricité, foyers, directrices.* $c = \sqrt{\frac{3}{2}}$ puis $e = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Les foyers F et F' ont pour coordonnées $\left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ et $\left(0, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}'$ et donc $\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ dans $\mathscr{R}$.

   En ce qui concerne les directrices, $K = O + \frac{1}{e}\overrightarrow{OB} = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)_{\mathscr{R}'}$. Les directrices sont les droites d'équations respectives $Y = \sqrt{\frac{2}{3}}$ et $Y = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ dans $\mathscr{R}'$ ou encore d'équations respectives $x + \sqrt{3}y = \frac{4}{\sqrt{6}}$ et $x + \sqrt{3}y = -\frac{4}{\sqrt{6}}$.



5. L'équation proposée s'écrit $(2x+3y)^2-2x+1=0$. Il s'agit d'une conique du genre parabole de direction asymptotique éventuelle $2x+3y=0$.

   Posons $X=\frac{1}{\sqrt{13}}(2x+3y)$ et $Y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3x-2y)$ ou encore $x=\frac{1}{\sqrt{13}}(2X+3Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{13}}(3X-2Y)$.

   Dans $\mathscr{R}'=(O,X,Y)$, (Γ) admet pour équation cartésienne :

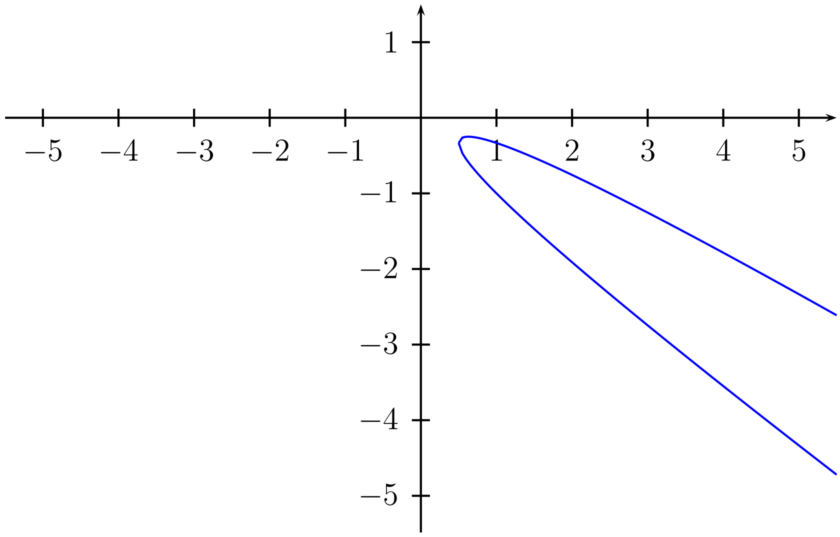
$$13X^2-\frac{2}{\sqrt{13}}(2X+3Y)+1=0\Leftrightarrow 13\left(X-\frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2-\frac{6}{\sqrt{13}}Y+\frac{165}{169}=0$$
$$\Leftrightarrow \left(X-\frac{2}{13\sqrt{13}}\right)^2=\frac{6}{13\sqrt{13}}\left(Y-\frac{55}{26\sqrt{13}}\right)$$

   Ceci montre que (Γ) est une parabole, fournit le paramètre $p=\frac{6}{13\sqrt{13}}$ puis les éléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}'$:

   $S=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{55}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ puis $F=S+\frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{61}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et $K=S-\frac{p}{2}(0,1)_{\mathscr{R}'}=\left(\frac{2}{13\sqrt{13}},\frac{49}{26\sqrt{13}}\right)_{\mathscr{R}'}$ et donc (D) : $Y=\frac{49}{26\sqrt{13}}$.

   Eléments de (Γ) dans le repère $\mathscr{R}$.

   $S\left(\frac{173}{338},-\frac{49}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ puis $F\left(\frac{191}{338},-\frac{55}{169}\right)_{\mathscr{R}}$ et (D) : $3x-2y=\frac{49}{26}$.



6. (Γ) est le point d'intersection des droites d'équations respectives $x-y+1=0$ et $x+y-1=0$ à savoir le point de coordonnées $(0,1)$.

7. L'équation s'écrit $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$. (Γ) est le cercle de centre $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. On reconnait une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(0,2)$ et $B(1,3)$.

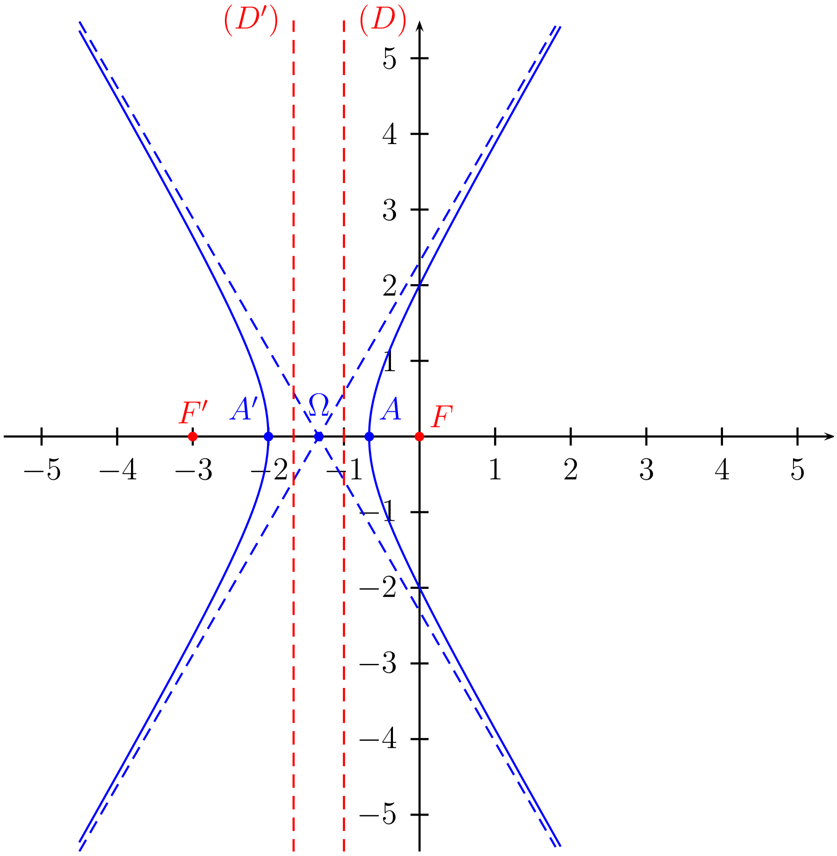
9. Si on pose $X=x+2y-4$ et $Y=x-y-1$, l'équation s'écrit $XY=3$ ce qui montre immédiatement que la courbe est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites d'équations respectives $x+2y-4=0$ et $x-y-1=0$ et donc de centre le point d'intersection de ces deux droites $\Omega(2,1)$. Ce changement de repère non orthonormé ne peut pas fournir davantage et si on veut les éléments métriques de l'hyperbole, il faut revenir aux méthodes de 3) ou 4).

10. De nouveau, si on pose $X=2x+y-1$ et $Y=x+y$ (ou même $Y=3(x+y)$) , l'équation s'écrit $X^2=3Y$. Le nouveau repère est quelconque mais on peut tout de même affirmer que la courbe est une parabole de direction asymptotique $2x+y=0$. Avec cette équation, on ne lit cependant aucun des éléments métriques de celle-ci.

Correction de l'exercice 2 ▲

Les trois courbes proposées sont des coniques propres (équation polaire d'une conique propre dans un repère dont l'axe des abscisses est l'axe focal d'origine un foyer : $r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ où $p=ed=eFK$).

1. $e=2$. Il s'agit une hyperbole dont l'un des foyers est l'origine.



L'axe focal est (Ox) et donc les sommets de l'hyperbole sont les points d'intersection de la courbe avec l'axe (Ox). Ce sont les points A et A' de coordonnées cartésiennes $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ et $(-2, 0)$ obtenus pour $\theta = \pi$ et $\theta = 0$ respectivement.

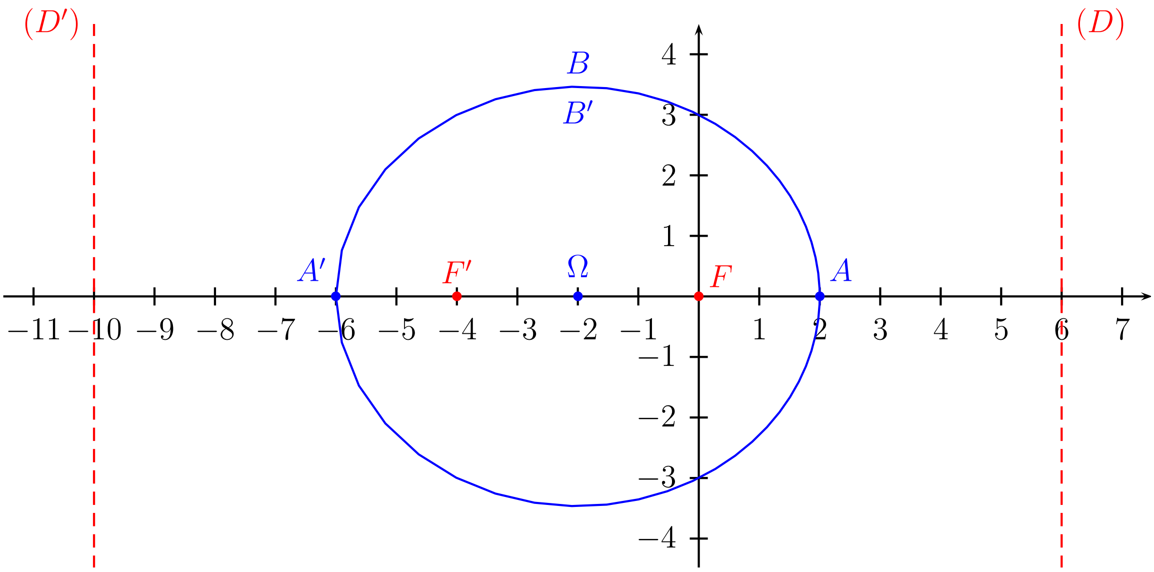
Le centre est le milieu du segment $[AA']$ à savoir le point $\Omega\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$.

les directions asymptotiques sont fournies par : $2\cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z}$. Les asymptotes sont les droites d'angle polaire $\pm\frac{\pi}{3}$ passant par Ω. Ce sont les droites d'équations respectives $y = \sqrt{3}\left(x + \frac{4}{3}\right)$ et $y = -\sqrt{3}\left(x + \frac{4}{3}\right)$.

L'un des foyers F est l'origine. L'autre est le symétrique de F par rapport à Ω à savoir le point F' de coordonnées $(-3, 0)$.

Les directrices sont fournies par les points $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-1, 0)$ et $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{5}{3}, 0\right)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x = -1$ et $x = -\frac{5}{3}$.

2. L'équation s'écrit $r = \frac{3}{\frac{1}{2} + \cos\theta}$. Donc $e = \frac{1}{2}$ et la courbe est une ellipse.



Les sommets du grand axe sont les points $A(2,0)$ et $A'(-6,0)$ obtenus pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Le centre est le milieu Ω de $[AA']$ de coordonnées $(-2,0)$.

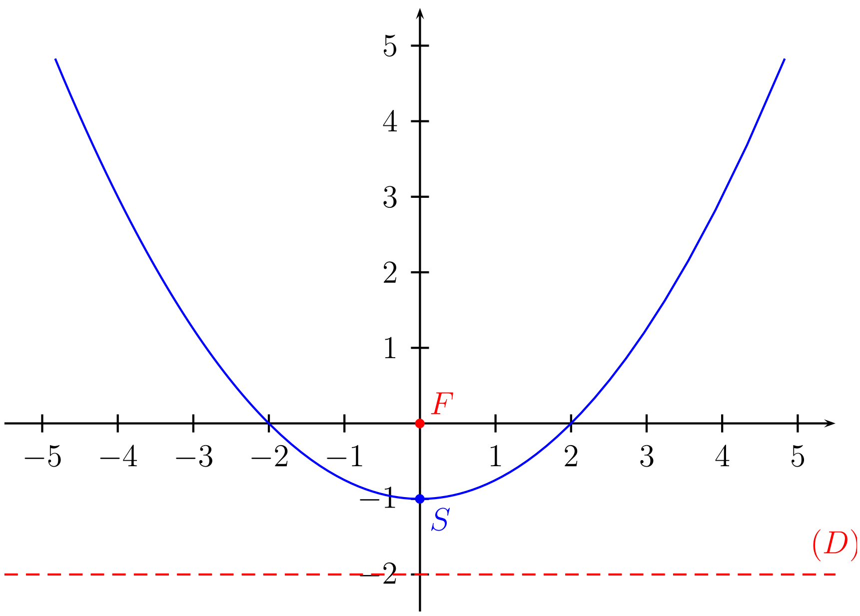
Le premier foyer F est l'origine et le deuxième est le symétrique du point F par rapport à Ω à savoir le point $F'(-4,0)$.

Les points K et K' sont définis par : $K = \Omega + \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (6,0)$ et $K' = \Omega - \frac{1}{e}\overrightarrow{OA} = (-10,0)$. Les directrices sont les droites (D) et (D') d'équations respectives $x = 6$ et $x = -10$.

Les sommets du petit axe sont déterminés par $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ puis $B = \Omega + b\overrightarrow{j} = \left(-2, 2\sqrt{3}\right)$ et $B = \Omega - b\overrightarrow{j} = \left(-2, -2\sqrt{3}\right)$

3. L'équation $r = \frac{2}{1+\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$. On reconnait une parabole dans une présentation non traditionnelle.

   Le foyer est toujours l'origine et comme la direction asymptotique est obtenue pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ (et a donc pour angle polaire $\frac{\pi}{2}$), l'axe focal est donc la droite passant par l'origine F et d'angle polaire $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées. Le sommet est l'intersection de la courbe avec l'axe (Oy) obtenue pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Pour $\theta = -\frac{\pi}{2}$, on obtient $r = 1$ et donc $S(-1,0)$. Puis $K = s_S(F) = (-2,0)$ et la directrice (D) est la droite d'équation $y = -2$. Enfin, $p = FK = 2$.



Remarque. Si on n'est pas à l'aise en polaires, on peut toujours repasser en cartésien mais c'est une très grosse perte de temps :

En 1), $r(1-2\cos\theta)=2$ s'écrit $r-2x=2$ puis $x^2+y^2=(2x+2)^2$.

En 2), $r(2+\cos\theta)=6$ s'écrit $2r+x=6$ et donc $4(x^2+y^2)=(-x+6)^2$.

En 3), $r(1-\sin\theta)=2$ s'écrit $r-y=2$ puis $x^2+y^2=(y+2)^2$ et donc $y=\frac{x^2}{4}-1$.

Correction de l'exercice 3 ▲

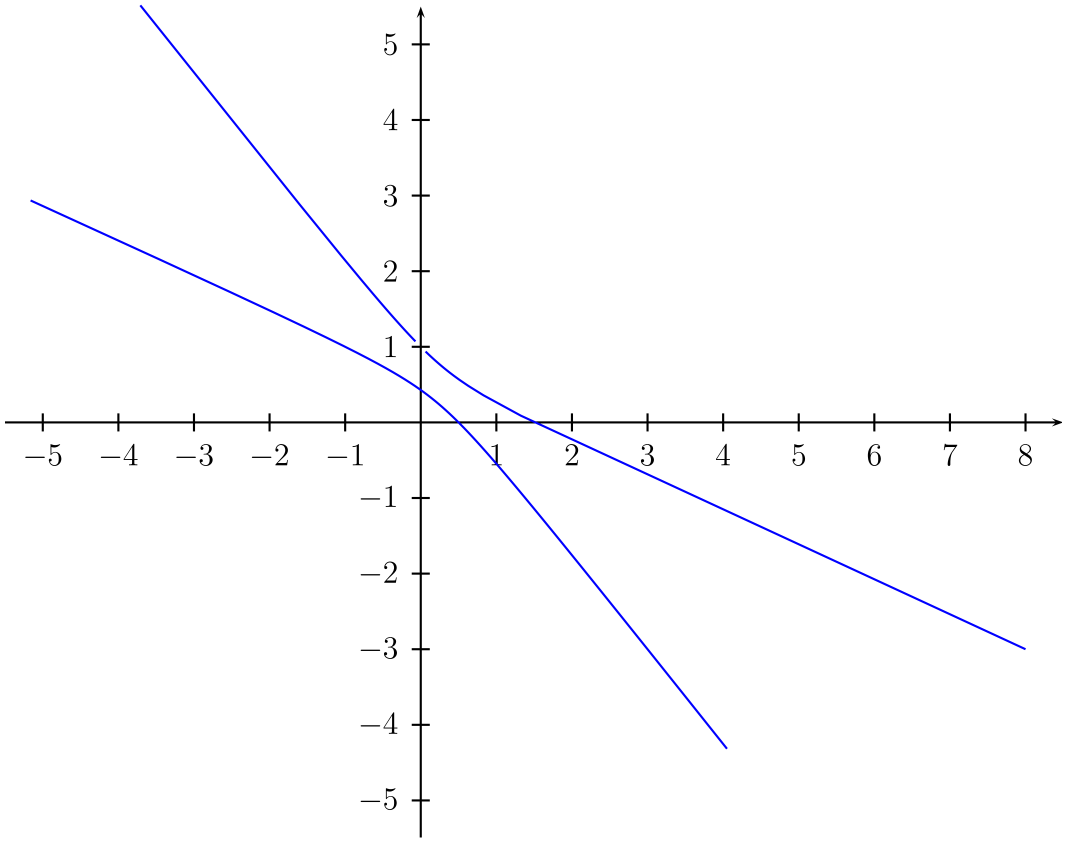
1. Une ellipse (privée d'un point) admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l}a\frac{1-t^2}{1+t^2}\\ b\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$, dans un repère adapté. Une branche d'hyperbole admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l}a\frac{1+t^2}{1-t^2}\\ b\frac{2t}{1-t^2}\end{array}\right.$, $t\in]-1,1[$, dans un repère adapté. Une parabole admet une représentation paramétrique de la forme $\left\{\begin{array}{l}\frac{t^2}{2p}\\ t\end{array}\right.$, dans un repère adapté ...

   Réciproquement, si la courbe admet une paramétrisation du type de l'énoncé, les six polynômes P^2, PQ, Q^2, PR, QR et R^2 sont dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui est de dimension 5 et donc sont linéairement dépendants. On en déduit qu'il existe $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$ tel que $aP^2+2bPQ+cQ^2+2dPR+2eQR+fR^2=0$ ou encore tel que pour tout réel t tel que $R(t)\neq 0$,

$$a\left(\frac{P(t)}{R(t)}\right)^2+2b\frac{P(t)}{R(t)}\times\frac{Q(t)}{R(t)}+c\left(\frac{Q(t)}{R(t)}\right)^2+2d\frac{P(t)}{R(t)}+2e\frac{Q(t)}{R(t)}+f=0.$$

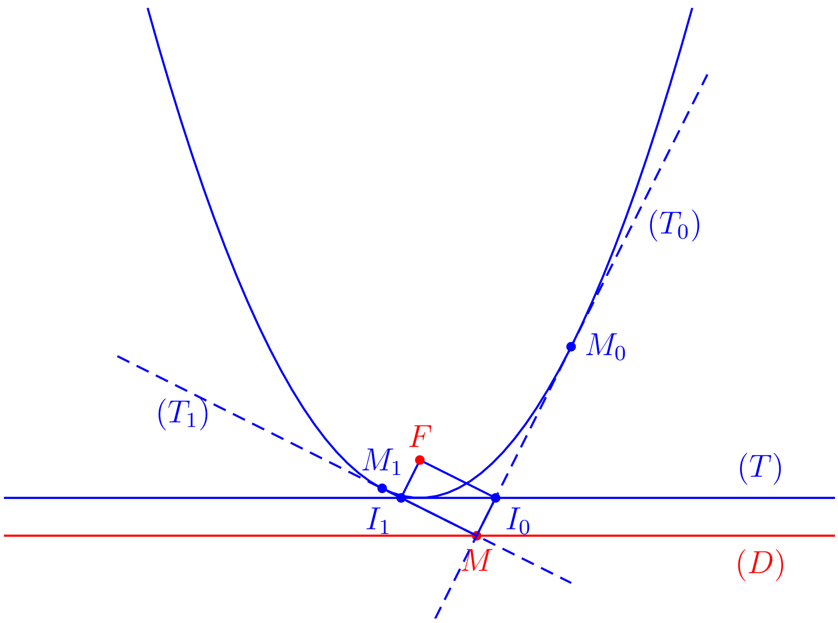
   Le support de l'arc est donc contenu dans la courbe d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0$ où $(a,b,c,d,e,f)\neq(0,0,0,0,0,0)$).

2. Construction de la courbe $\left\{\begin{array}{l}x=\frac{2t+1}{t^2+2t-1}\\ y=\frac{t^2-1}{t^2+2t-1}\end{array}\right.$.



Correction de l'exercice 4 ▲

Solution géométrique.



Soit M un point de l'othoptique. M est sur les tangentes (T_0) et (T_1) à la parabole en deux points distincts M_0 et M_1 et clairement distinct du sommet S. Soient I_0 et I_1 les points d'intersection des droites (T_0) et (T_1) respectivement avec la tangente (T) au sommet de la parabole. On sait (construction usuelle de la parabole par points et tangentes) que les droites (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires aux droites (FI_0) et (FI_1) respectivement. Donc le quadrilatère FI_0MI_1 est un rectangle (3 angles droits connus). Par suite, le milieu de $[FM]$ qui est aussi le milieu de $[I_0I_1]$ est sur la tangente au sommet (T) et M est l'image d'un point de la tangente (T) par l'homothétie de centre F et de rapport 2. Finalement, le point M est sur la directrice de la parabole.

Réciproquement, soit M un point de la directrice et I le milieu de $[FM]$. On reconstruit le rectangle précédent en plaçant d'abord sur la tangente au sommet (T) les points I_0 et I_1 tels que I soit le milieu de $[I_0I_1]$ et tels que $I_0I_1 = MI$. Les droites (MI_0) et (MI_1) sont effectivement des tangentes à la parabole qui sont perpendiculaires l'une à l'autre.

$$\boxed{\text{L'orthoptique d'une parabole est sa directrice.}}$$

Solution analytique. On choisit un repère orthonormé dans lequel la parabole a pour équation cartésienne $y^2 = 2px$. Une équation de la tangente (T_0) à la parabole en un point $M_0 = (x_0, y_0) = \left(\frac{y_0^2}{2p}, y_0\right)$ est $-px_0 + yy_0 = px_0$. Deux tangentes (T_0) et (T_1) sont perpendiculaires si et seulement si $p^2 + y_0y_1 = 0$ (en particulier $y_0y_1 \neq 0$). Le point d'intersection des tangentes (T_0) et (T1) en deux points distincts est la solution du système $\left\{\begin{array}{l} -px + yy_0 = px_0 \\ -px + yy_1 = px_1 \end{array}\right.$ et a donc pour coordonnées $\left(\frac{p(x_0y_1 - y_0x_1)}{p(y_0 - y_1)}, \frac{p^2(x_0 - x_1)}{p(y_0 - y_1)}\right) = \left(-\frac{y_0y_1}{2p}, \frac{y_0 + y_1}{2}\right) = \left(-\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)\right)$.

En résumé, un point $M(x, y)$ est sur l'orthoptique si et seulement si il existe $y_0 \neq 0$ tel que $\left\{\begin{array}{l} x = -\frac{p}{2} \\ y = \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right) \end{array}\right.$ ce qui montre déjà qu'un point de l'orthoptique est sur la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$ c'est-à-dire sur la directrice de la parabole. Réciproquement, la fonction $y_0 \mapsto \frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$, tend vers $-\infty$ quand y_0 tend vers 0 par valeurs supérieures et tend vers $+\infty$ quand y_0 tend vers $+\infty$. Donc $\frac{1}{2}\left(y_0 - \frac{p^2}{y_0}\right)$ décrit $\mathbb{R}$ quand y_0 décrit $]0, +\infty[$, ce qui montre que l'on obtient la totalité de la directrice.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Soit M un point du plan.

   1er cas. Supposons que $M \notin (AB) \cup (AC) \cup (BC)$.

$$P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}\right) = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right)\ [\pi].$$

   Maintenant, puisque les triangles MPC et MQC sont rectangles en P et Q respectivement, les points P et Q sont sur le cercle de diamètre $[MC]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right)\ [\pi]$. De même, $\left(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$. Par suite,

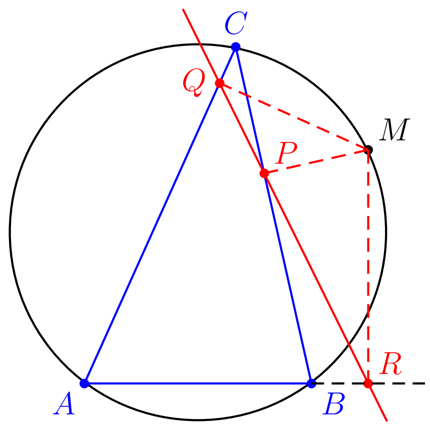
$$\begin{aligned} P,\ Q \text{ et } R \text{ alignés} &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BR}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}\right) = \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}\right)\ [\pi] \\ &\Leftrightarrow M \text{ appartient au cercle circonscrit au triangle } ABC \text{ (privé des points } A,\ B \text{ et } C). \end{aligned}$$

   2ème cas. Supposons par exemple que $M \in (AB)$. Dans ce cas, $M = R$. Si de plus M n'est ni A, ni B, alors $M \neq P$ et $M \neq Q$ puis les droites (MP) et (MQ) sont perpendiculaires aux droites (BC) et (AC) respectivement. Si par l'absurde, les points P, Q et R sont alignés, on a $(MP) = (MQ)$ et donc $(AB)//(AC)$. Ceci est une contradiction.

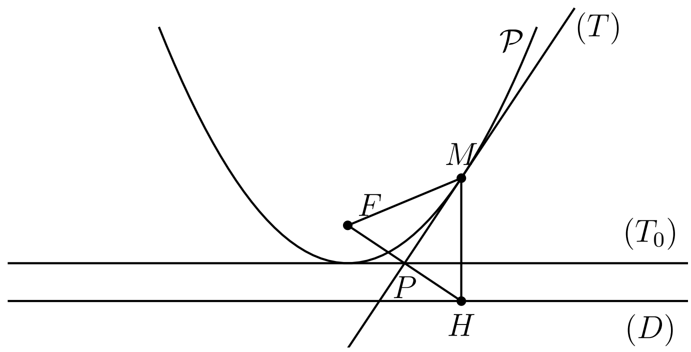
   Donc, si les points P, Q et R sont alignés, M est l'un des trois points A, B ou C. La réciproque est immédiate.

   En résumant les deux cas,

$$\boxed{P,\ Q \text{ et } R \text{ sont alignés si et seulement si } M \text{ est sur le cercle circonscrit au triangle } ABC.}$$



2. **Parabole tangente aux trois côtés d'un triangle.** Commençons par rappeler une construction usuelle de la tangente en un point d'une parabole : le triangle FMH est isocèle en M et la tangente en M à $\mathscr{P}$ est la médiatrice du segment $[FH]$. Par suite, le projeté orthogonal P de F sur la tangente (T) est sur $5T_0$) la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$.

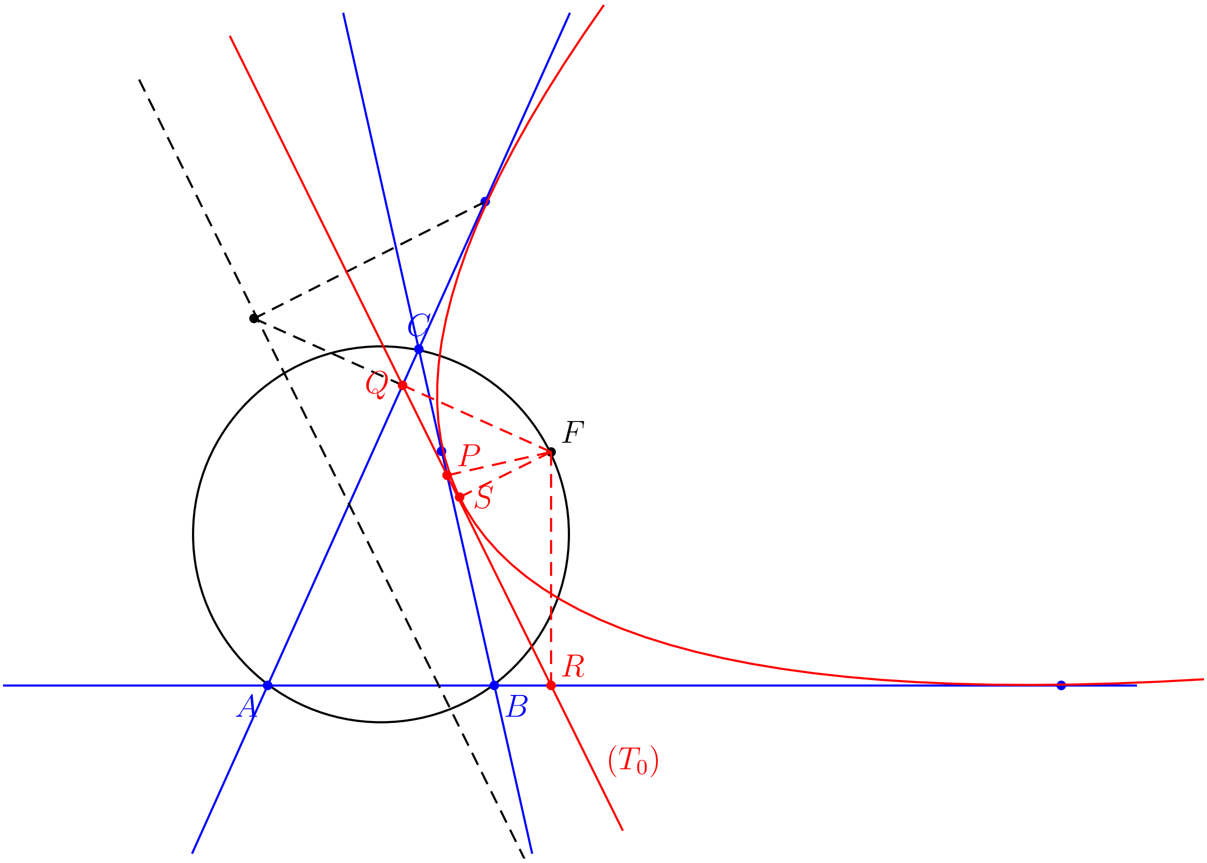


Soient A, B et C trois points non alignés. Si $\mathscr{P}$ est une parabole tangente aux droites (BC), (CA) et (AB), les projetés orthogonaux P, Q et R de son foyer F sur les droites (BC), (CA) et (AB) sont alignés sur la tangente au sommet de la parabole $\mathscr{P}$. D'après 1), le point F est nécessairement sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Réciproquement, si F est l'un des trois points A, B ou C, F n'est pas solution car une tangente à une parabole ne passe jamais par son foyer.

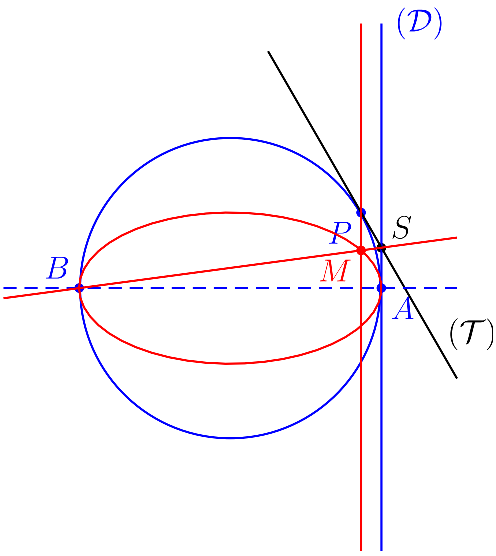
Soit donc F un point du cercle circonscrit au triangle ABC et distinct des points A, B et C. Montrons alors qu'il existe une parabole de foyer F, tangente aux droites (BC), (CA) et (AB).

On construit les projetés orthogonaux P, Q et R de F sur les droites (BC), (CA) et (AB). Ils sont alignés sur la droite de Simson (T_0) de F relativement au triangle ABC. La parabole de foyer F et de tangente au sommet (T_0) est solution du problème posé. La construction des points de contact est fournie par le graphique de la page précédente : on construit les symétriques de F par rapport aux points P, Q et R (ces symétriques sont sur la directrice) puis on remonte perpendiculairement à (T_0) jusqu'à la parabole.



Correction de **l'exercice 6 ▲**

On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}$ dans lequel le point A a pour coordonnées $(1,0)$ et le point B a pour coordonnées $(-1,0)$. Dans le repère $\mathscr{R}$, la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation $x=1$. Ensuite, il existe un réel θ tel que le point P ait pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. La tangente $(\mathscr{T})$ a pour équation $x\cos\theta + y\sin\theta = 1$. Pour $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, le point S a pour coordonnées $\left(1, \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ ou encore $\left(1, \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$.



La perpendiculaire à la droite (AB) passant P admet pour équation $x=\cos\theta$. La droite (BS) admet pour équation $-\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(x+1)+2y=0$. Ces deux droites se coupent en le point M de coordonnées $\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)(1+\cos\theta)\right)$ ou encore $\left(\cos\theta, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$ ou enfin $\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$.
L'ensemble des points M est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\cos\theta, \frac{1}{2}\sin\theta\right)$ quand θ décrit $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ ou encore l'ellipse d'équation $x^2+4y^2=1$ privée des points A et B.

Correction de l'exercice 7 ▲

(Γ) est l'intersection d'un cylindre parabolique de direction (Oz) et d'un plan non perpendiculaire à la direction de ce cylindre. On choisit un repère orthonormé $\mathscr{R}' = (\Omega, X, Y, Z)$ dans lequel le plan d'équation $x+y+z-1 = 0$ dans le repère $\mathscr{R} = (O, x, y, z)$ soit le plan (Ω, X, Y) ou encore le plan d'équation $Z = 0$ dans le repère $\mathscr{R}'$. On pose donc $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1)$ puis par exemple $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ et $Y = \frac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z)$ ce qui s?écrit

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dans le repère $\mathscr{R}'$, la courbe (Γ) admet pour système d'équations

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{\sqrt{3}}Z + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ Z = 0 \end{array}\right. .$$

Continuons à deux coordonnées X et Y dans le plan (Ω, X, Y).

$$\begin{aligned} M(X,Y) \in (\Gamma) &\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}X + \frac{1}{\sqrt{6}}Y + \frac{1}{3}\right) + 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X+Y)^2 + \frac{2}{3\sqrt{6}}(\sqrt{3}X+Y) + \frac{1}{9} + \sqrt{2}X + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}X+Y)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}X + \frac{2}{3\sqrt{6}}Y + \frac{10}{9} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3}X+Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0. \end{aligned}$$

On trouve déjà une conique du genre parabole. On pose maintenant $x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y)$ et $y' = \frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y)$ correspondant aux formules de changement de repère $\left\{\begin{array}{l} x' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}X+Y) \\ y' = \frac{1}{2}(-X+\sqrt{3}Y) \end{array}\right.$ ou encore $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x'-y') \\ Y = \frac{1}{2}(x'+\sqrt{3}y') \end{array}\right.$. Dans le repère (Ω, x', y'), une équation de la courbe (Γ) est

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}X+Y)^2 + 8\sqrt{2}X + \frac{2\sqrt{6}}{3}Y + \frac{20}{3} = 0 &\Leftrightarrow 4x'^2 + 4\sqrt{2}(\sqrt{3}x'-y') + \frac{\sqrt{6}}{3}(x'+\sqrt{3}y') + \frac{20}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow x'^2 + \frac{13}{2\sqrt{6}}x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 - \frac{3}{2\sqrt{2}}y' + \frac{5}{3} - \frac{169}{96} = 0 \Leftrightarrow \left(x' + \frac{13}{4\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(y' + \frac{1}{8\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

(Γ) est la parabole de paramètre $p=\frac{3}{4\sqrt{2}}$ et dont les éléments caractéristiques dans le repère (Ω,x',y') sont $S\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)$, $F=S+\frac{p}{2}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)+\frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$ puis $K=S-\frac{p}{2}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{8\sqrt{2}}\right)-\frac{3}{8\sqrt{2}}(0,1)=\left(-\frac{13}{4\sqrt{6}},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ et donc $(D):y'=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

On repasse maintenant dans le repère (Ω,X,Y). S a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4\sqrt{6}}\\-\frac{1}{8\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{16\sqrt{2}}\\-\frac{29}{16\sqrt{6}}\end{pmatrix}$, F a pour coordonnées $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&-1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{13}{4\sqrt{6}}\\\frac{1}{4\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{4\sqrt{2}}\\-\frac{5}{4\sqrt{6}}\end{pmatrix}$ puis (D) a pour équation $-X+\sqrt{3}Y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On revient enfin au repère (O,x,y,z).

Le point S a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{25}{16\sqrt{2}}\\-\frac{29}{16\sqrt{6}}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\\frac{13}{16}\\\frac{15}{16}\end{pmatrix}$ puis le point F a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{7}{4\sqrt{2}}\\-\frac{5}{4\sqrt{6}}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{4}\\1\\\frac{3}{4}\end{pmatrix}$ et enfin

$(D):\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}(x+y-2z)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\x+y+z-1=0\end{array}\right.$

(Γ) est la parabole de paramètre $p=\frac{3}{4\sqrt{2}}$, de sommet $S\left(-\frac{3}{4},\frac{13}{16},\frac{15}{16}\right)$, de foyer $F\left(-\frac{3}{4},1,\frac{3}{4}\right)$ et de directrice $(D):\left\{\begin{array}{l}-y+z=\frac{1}{2}\\x+y+z-1=0\end{array}\right.$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $P=X^3+\alpha X^2+\beta X+\gamma$.

$$\begin{aligned}P(x)=P(y)&\Leftrightarrow(y^3-x^3)+\alpha(y^2-x^2)+\beta(y-x)=0\Leftrightarrow(y-x)(x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta)=0\\&\Leftrightarrow y-x=0\text{ ou }x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0.\end{aligned}$$

L'ensemble cherché est la réunion de la droite (D) d'équation $y=x$ et de la courbe (Γ) d'équation $x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0$. Pour étudier la courbe (Γ) qui est du genre ellipse, posons $x=\frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y=\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$ puis notons $\mathscr{R}'$ le repère (OXY).

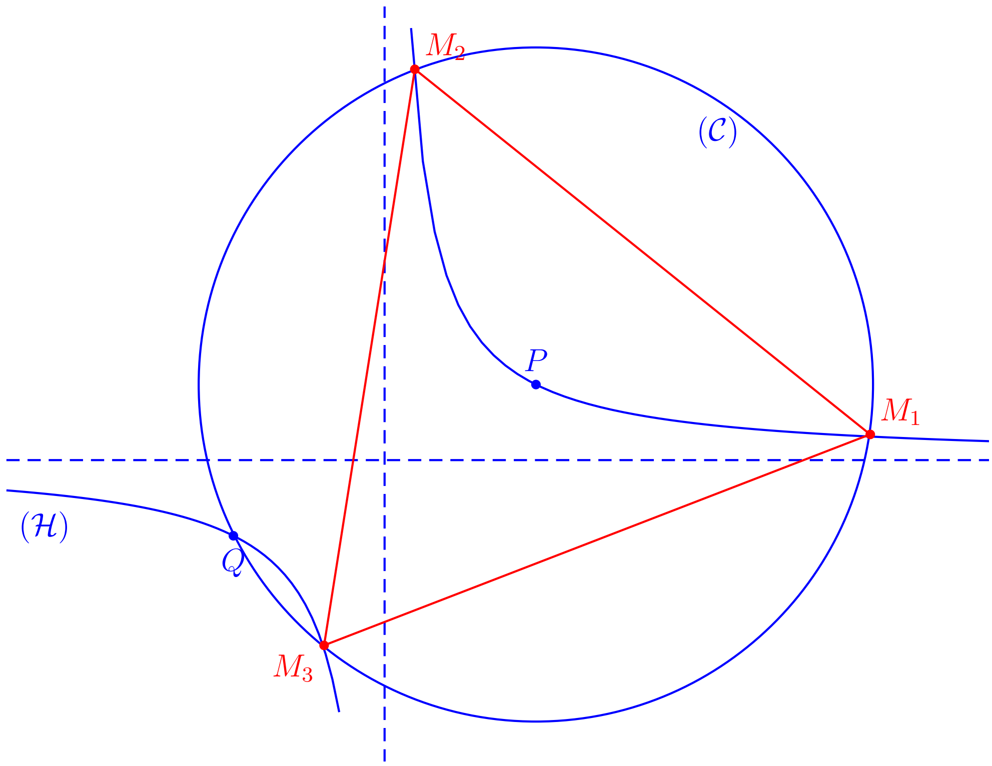
$$\begin{aligned}x^2+xy+y^2+\alpha(x+y)+\beta=0&\Leftrightarrow\frac{1}{2}((X+Y)^2+(X+Y)(X-Y)+(X-Y)^2)+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(X+Y+X-Y)+\beta=0\\&\Leftrightarrow\frac{1}{2}(3X^2+Y^2)+\alpha\sqrt{2}X+\beta=0\Leftrightarrow3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta).\end{aligned}$$

(Γ) est une ellipse si et seulement si $\alpha^2-3\beta>0$ (sinon (Γ) est un point ou est vide). Dans ce cas, $3\left(X+\frac{\alpha\sqrt{2}}{3}\right)^2+Y^2=\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)\Leftrightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ où $a^2=\frac{2}{9}(\alpha^2-3\beta)<\frac{2}{3}(\alpha^2-3\beta)=b^2$. Par suite,

$$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

On peut choisir un repère orthonormé dans lequel $(\mathscr{H})$ admet pour équation équation cartésienne $xy = ab$ et P a pour coordonnées (a,b) où a et b sont deux réels strictement positifs.



Le cercle $(\mathscr{C})$ de centre P et de rayon $PQ = 2OP$ admet la paramétrisation $\begin{cases} x = a + 2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta \\ y = b + 2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta \end{cases}$.

Soit $M(a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta, b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, un point du cercle $\mathscr{C}$.

$$\begin{aligned}
M(x,y) \in (\mathscr{H}) &\Leftrightarrow (a+2\sqrt{a^2+b^2}\cos\theta)(b+2\sqrt{a^2+b^2}\sin\theta) = ab \\
&\Leftrightarrow (a^2+b^2)\cos\theta\sin\theta + 2\sqrt{a^2+b^2}(b\cos\theta + a\sin\theta) = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta = 0 \\
&\Leftrightarrow \sin(2\theta) + \sin(\theta+\theta_0) = 0 \text{ où } \theta_0 = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\theta+\theta_0}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-\theta_0}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi) \text{ ou } \theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right).
\end{aligned}$$

Les égalités $\theta = \theta_0 + \pi\ (2\pi)$ fournissent le point Q.
Les égalités $\theta = -\frac{\theta_0}{3}\ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$ fournissent trois valeurs deux à deux distinctes de θ modulo 2π et donc trois points deux à deux distincts M_1, M_2 et M_3 de l'hyperbole tels que les trois angles au centre P du triangle $M_1M_2M_3$ soient égaux à $\frac{2\pi}{3}$. Puisque P est le centre du cercle circonscrit à ce triangle, ce triangle est équilatéral de centre P.

Correction de l'exercice 10 ▲

On cherche une équation sous la forme $(ax+by)^2 + 2cx + 2dy + e = 0$ avec $a^2+b^2 = 1$ et $a > 0$.

• $(1,0) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow a^2 + 2c + e = 0$ et $(0,2) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow 4b^2 + 4d + e = 0$.

• D'après la règle de dédoublement des termes, la tangente en $(1,0)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $a^2x + aby + c(x+1) + dy + e = 0$ ou encore $(a^2+c)x + (ab+d)y + c + e = 0$. Cette tangente est l'axe (Ox) si et seulement si $a^2 + c = 0$ et $c + e = 0$ et $ab + d \neq 0$.

• La tangente en $(0,2)$ à $(\mathscr{P})$ admet pour équation cartésienne $2abx+2b^2y+cx+d(y+2)+e=0$ ou encore $(2ab+c)x+(2b^2+d)y+2d+e=0$. Cette tangente est l'axe (Oy) si et seulement si $2b^2+d=0$ et $2d+e=0$ et $2ab+c\neq 0$.
En résumé, $(\mathscr{P})$ est solution si et seulement si $c=-a^2$, $d=-2b^2$, $e=a^2=4b^2$, $a^2+b^2=1$, $ab+d\neq 0$, $2ab+c\neq 0$ et $a>0$.
$a>0$, $a^2=4b^2$ et $a^2+b^2=1 \Leftrightarrow a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Les égalités $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $b=\frac{1}{\sqrt{5}}$ fournissent $ab+d=\frac{2}{5}-\frac{2}{5}=0$ ce qui ne convient pas.
Il reste $a=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $b=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $c=-\frac{4}{5}$, $d=-\frac{2}{5}$ et $e=\frac{4}{5}$ qui fournit bien une solution. On trouve une et une seule parabole.

$$\boxed{\text{La parabole } (\mathscr{P}) \text{ admet pour équation cartésienne } (2x-y)^2-8x-4y+4=0.}$$