Formes quadratiques

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

Rang et signature des formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y,z)) = 2x^2 - 2y^2 - 6z^2 + 3xy - 4xz + 7yz$.
2. $Q((x,y,z)) = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$
3. $Q((x,y,z,t)) = xy + yz + zt + tx$.
4. $Q((x,y,z,t)) = x^2 + (4+\lambda)y^2 + (1+4\lambda)z^2 + \lambda t^2 + 4xy + 2xz + 4(1-\lambda)yz + 2\lambda yt + (1-4\lambda)zt$.
5. $Q((x_1,\dots,x_5)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.
6. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ijx_i x_j$.
7. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{i} x_i x_j$.
8. $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{Inf}(i,j) x_i x_j$.

Correction ▼ [005806]

Exercice 2 **

Soit $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\forall f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2),\ Q(f) = \lambda \mathrm{Tr}(f^2) + \mu \det(f).$$

1. Vérifier que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer en fonction de λ et μ le rang et la signature de Q. Analyser en particulier les cas $(\lambda,\mu) = (1,0)$ et $(\lambda,\mu) = (0,1)$.

Correction ▼ [005807]

Exercice 3 **

Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note φ sa forme polaire.
On suppose que φ est non dégénérée mais non définie. Montrer que Q n'est pas de signe constant.

Correction ▼ [005808]

Exercice 4 *** I

Soient f_1, f_2,..., f_n n fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on pose $b_{i,j} = \int_a^b f_i(t) f_j(t)\, dt$ puis pour $(x_1,\dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{i,j} x_i x_j$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique positive.
2. Montrer que Q est définie positive si et seulement si la famille $(f_1,\dots,f_n)$ est libre.
3. Ecrire la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ dans le cas particulier : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall t \in [a,b]$, $f_i(t) = t^{i-1}$.

Correction ▼ [005809]

Exercice 5 ***

Soit S une matrice symétrique réelle, définie positive. Pour $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on pose

$$Q((x_1,\ldots,x_n)) = -\det\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que Q est une forme quadratique définie positive.

Correction ▼ [005810]

Exercice 6 **

Sur $E=\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle, réduire en base orthonormée les formes quadratiques suivantes :

1. $Q((x,y)) = x^2+10xy+y^2$.
2. $Q((x,y)) = 6x2+4xy+9y2$.
3. $Q((x,y,z)) = 4x^2+9y^2-z^2+2\sqrt{6}xy+10\sqrt{2}xz+2\sqrt{3}yz$.

Correction ▼ [005811]

Exercice 7 ***

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P\in E$, on pose $Q(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(k)P(-k)e^{-k}$.

1. Montrer que Q est une forme quadratique sur E.
2. Déterminer sa signature.

Correction ▼ [005812]

Exercice 8 ** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inversible T telle que $A={}^tTT$.

Correction ▼ [005813]

Exercice 9 *** I

Soit A une matrice carrée réelle symétrique définie positive. Montrer que le déterminant de A est inférieur ou égal au produit de ses coefficients diagonaux (utiliser l'exercice 8).

Correction ▼ [005814]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6 \end{pmatrix}$.

   Le polynôme caractéristique de A est

$$\begin{aligned}\chi_A &= \begin{vmatrix} 2-X & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2-X & \frac{7}{2} \\ -2 & \frac{7}{2} & -6-X \end{vmatrix} = (2-X)\left(X^2+8X-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{2}X-2\right)-2\left(-2X+\frac{5}{4}\right) \\ &= -X^3-6X^2+\frac{45}{2}X = -X\left(X^2+6X-\frac{45}{2}\right).\end{aligned}$$

   Puisque A est symétrique réelle, on sait que les valeurs propres de A sont réelles. χ_A admet pour racines 0 et deux réels non nuls de signes contraires (puisque leur produit vaut $-\frac{45}{2}$). Par suite, le rang et la signature de Q sont

$$\boxed{r=2 \text{ et } s=(1,1).}$$

   2ème solution. On effectue une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z)) &= 2x^2-2y^2-6z^2+3xy-4xz+7yz = 2x^2+x(3y-4z)-2y^2+7yz-6z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-2\left(\frac{3}{4}y-z\right)^2-2y^2+7yz-6z^2 = 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-\frac{25}{8}y^2+10yz-8z^2 \\ &= 2\left(x+\frac{3}{4}y-z\right)^2-\frac{25}{8}\left(y-\frac{8}{5}z\right)^2.\end{aligned}$$

   Les formes linéaires $(x,y,z)\mapsto x+\frac{3}{4}y-z$ et $(x,y,z)\mapsto y-\frac{8}{5}z$ étant linéairement indépendantes, on retrouve le fait que Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$. La forme quadratique Q est dégénérée et n'est ni positive ni négative.

2. La matrice de Q dans la base canonique (i,j,k) est $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Le nombre 4 est valeur propre de A et puisque A est diagonalisable, 4 est valeur propre d'ordre $\dim(\text{Ker}(A-4I_3))=3-\text{rg}(A-4I_3)=2$. La dernière valeur propre λ est fournie par $4+4+\lambda=\text{Tr}(A)=9$ et $?=1$. Ainsi, $\text{Sp}(A)=(1,4,4)$.
   Les trois valeurs propres de A sont strictement positives et donc la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(3,0)$.

$$\boxed{Q \text{ est définie positive.}}$$

3. Effectuons une réduction de GAUSS.

$$Q((x,y,z,t))=xy+yz+zt+tx=(x+z)(y+t)=\tfrac{1}{4}(x+y+z+t)^2-\tfrac{1}{4}(x-y+z-t)^2.$$

   Puisque les deux formes linéaires $(x,y,z,t)\mapsto x+y+z+t$ et $(x,y,z,t)\mapsto x-y+z-t$ sont linéairement indépendantes, la forme quadratique Q est de rang $r=2$ et de signature $s=(1,1)$.

4. Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned}Q((x,y,z,t)) &= x^2+(4+\lambda)y^2+(1+4\lambda)z^2+\lambda t^2+4xy+2xz+4(1-\lambda)yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda y^2+4\lambda z^2+\lambda t^2-4\lambda yz+2\lambda yt+(1-4\lambda)zt \\ &= (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+zt = (x+2y+z)^2+\lambda(y-2z+t)^2+\frac{1}{4}(z+t)^2-\frac{1}{4}(z-t)^2.\end{aligned}$$

Si $\lambda < 0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(2,2)$.
Si $\lambda = 0$, la forme quadratique Q est de rang 3 et de signature $(2,1)$.
Si $\lambda > 0$, la forme quadratique Q est de rang 4 et de signature $(3,1)$.

5. **1ère solution.** La matrice de la forme quadratique Q dans la base canonique est $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Les valeurs propres de A sont $-\frac{1}{2}$ qui est d'ordre 4 et 2 qui est valeur propre simple.Donc, la signature de la forme quadratique Q est

$$\boxed{s = (1,4).}$$

   2ème solution. Effectuons une réduction de GAUSS.

$$\begin{aligned} Q((x_1,...,x_5)) &= x_1x_2 + x_1(x_3+x_4+x_5) + x_2(x_3+x_4+x_5) + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\ &= (x_1+x_3+x_4+x_5)(x_2+x_3+x_4+x_5) - (x_3+x_4+x_5)^2 + x_3x_4 + x_3x_5 + x_4x_5 \\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_3x_4 - x_3x_5 - x_4x_5 \\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}x_4^2 - \frac{1}{2}x_4x_5 - \frac{3}{4}x_5^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5)^2 - \frac{1}{4}(x_1-x_2)^2 - \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4 + \frac{1}{2}x_5\right)^2 - \frac{3}{4}\left(x_4 - \frac{1}{3}x_5\right)^2 - \frac{5}{6}x_5^2, \end{aligned}$$

   et on retrouve $s = (1,4)$.

6. $Q(x_1,...,x_n) = (x_1 + ... + x_n)^2$ et donc

$$\boxed{r = 1 \text{ et } s = (1,0).}$$

7. Pour $n \geqslant 2$, $Q((x_1,...,x_n)) = \left(\sum_{i=1}^n ix_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j\right) = \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i+1)x_i\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^n (i-1)x_i\right)^2$. Donc

$$\boxed{r = 2 \text{ et } s = (1,1)}$$

   car les deux formes linéaires $(x_1,...,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i+1)x_i$ et $(x_1,...,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n (i-1)x_i$ sont indépendantes pour $n \geqslant 2$.

8. Puisque la matrice de Q dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} Q((x1,...,xn)) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + ... + \sum_{n-1 \leqslant i,j \leqslant n} x_ix_j + x_n^2 \\ &= (x_1+...+x_n)^2 + (x_2+...+x_n)^2 + ... + (x_{n-1}+x_n)^2 + x_n^2. \end{aligned}$$

$$\boxed{Q \text{ est donc définie positive.}}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. Si la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$,

$$Q(f) = \lambda(a^2 + 2bc + d^2) + \mu(ad - bc).$$

Q est un polynôme homogène de degré 2 en les coordonnées de f dans la base canonique de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et donc Q est une forme quadratique sur $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

2. • Si $\lambda = \mu = 0$, $r = 0$ et $s = (0,0)$. Si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$,

$$Q(f) = \frac{\mu}{4}(a+d)^2 - \frac{\mu}{4}(a-d)^2 - \frac{mu}{4}(b+c)^2 + \frac{\mu}{4}(b-c)^2,$$

et donc $r = 4$ et $s = (2,2)$.

• Si $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} Q(f) = \lambda a^2 + \mu ad + (2\lambda - \mu)bc + \lambda d^2 &= \lambda\left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + (2\lambda - \mu)bc + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 \\ &= \lambda\left(a + \frac{\mu}{2\lambda}d\right)^2 + \left(\lambda - \frac{\mu^2}{4\lambda}\right)d^2 + \frac{2\lambda - \mu}{4}(b+c)^2 - \frac{2\lambda - \mu}{4}(b-c)^2. \end{aligned}$$

Maintenant, les quatre formes linéaires $(a,b,c,d) \mapsto a + \frac{\mu}{2\lambda}d$, $(a,b,c,d) \mapsto d$, $(a,b,c,d) \mapsto b+c$ et $(a,b,c,d) \mapsto b-c$ sont linéairement indépendantes. Donc

- si $\mu = 2\lambda$ $(\neq 0)$, $r = 1$,
- si $\mu = -2\lambda$ $(\neq 2\lambda)$, $r = 3$,
- si $|\mu| \neq 2|\lambda|$ $(\neq 0)$, $r = 4$.

En particulier, si $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, alors $r = 4$ et $s = (3,1)$ et si $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, $r = 4$ et $s = (2,2)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

Dans le cas où E est de dimension finie, la signature de Q permet de conclure immédiatement. Supposons donc que E n'est pas de dimension fine.

Par hypothèse, il existe un vecteur non nul x_0 tel que $Q(x_0) = 0$. Supposons Q de signe constant. Quite à remplacer Q par $-Q$, on supposera que Q est positive. D ?après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (valable pour les formes quadratiques positives)

$$\forall y \in E,\ |\varphi(x_0, y)| \leqslant \sqrt{Q(x_0)}\sqrt{Q(y)} = 0.$$

Donc $\forall y \in E$, $\varphi(x_0, y) = 0$ et x_0 est dans le noyau de φ. Puisque $x_0 \neq 0$, on en déduit que φ est dégénérée. En résumé, si Q est de signe constant, φ est dégénérée ou encore si φ est non dégénérée, Q n'est pas de signe constant.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(x_1, ..., x_n) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\left(\int_a^b f_i(t)f_j(t)\,dt\right)x_i x_j = \int_a^b \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_i x_j f_i(t) f_j(t)\right)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t)\right)^2\,dt \geqslant 0.$$

Donc Q est une forme quadratique positive.

2. De plus, pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q((x_1, ..., x_n)) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$ (fonction continue positive d'intégrale nulle). Donc

$$\begin{aligned} Q \text{ définie} &\Leftrightarrow \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ [Q((x_1, ..., x_n)) = 0 \Rightarrow (x_1, ..., x_n) = 0] \\ &\Leftrightarrow \forall (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ [\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0 \Rightarrow (x_1, ..., x_n) = 0] \\ &(f_1, ..., f_n) \text{ libre}. \end{aligned}$$

3. Dans le cas particulier envisagé, la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & S & \\ x_n & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs fournit $\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}$ puis

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ X & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & {}^tXS^{-1} \\ X & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tXS^{-1}X & {}^tXS^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\det(A)\times\det(S^{-1})\times(-1) = {}^tXS^{-1}X$ puis que $Q(X) = -\det(A) = {}^tX((\det(S))S^{-1})X = {}^tXS'X$ où $S' = (\det(S))S^{-1}$.

Maintenant, la matrice S est définie positive et donc ses valeurs propres sont des réels strictement positifs. Les valeurs propres de la matrice S' sont les $\frac{\det(S)}{\lambda}$ où λ décrit le spectre de S et donc la matrice S' est aussi une matrice symétrique définie positive. Q est donc une forme quadratique définie positive.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. (Quand x^2 et y^2 ont les mêmes coefficients, penser à faire une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$) En posant $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)$, on obtient
$$x^2+10xy+y^2 = \tfrac{1}{2}(X+Y)^2+5(X+Y)(X-Y)+\tfrac{1}{2}(X-Y)^2 = 6X^2-4Y^2.$$
Ainsi, si on note (i,j) la base canonique de $\mathbb{R}^2$ puis $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i+j)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-j)$, on a
$$x^2+10xy+y^2 = Q(xi+yj) = Q(Xe_1+Ye_2) = 6X^2-4Y^2.$$

2. La matrice de Q dans la base canonique (i,j) de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. Les deux nombres 5 et 10 ont une somme égale à $15 = \mathrm{Tr}(A)$ et un produit égal à $50 = \det(A)$ et sont donc les valeurs propres de A. On sait alors que dans une base orthonormée (e_1,e_2) de vecteurs propres de A associée à la famille de valeurs propres $(5,10)$, on a $Q(Xe_1+Ye_2) = 5X^2+10Y^2$. Déterminons une telle base.
$(A-5I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+2y = 0$ et donc $\mathrm{Ker}(A-5I_2) = \mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$ puis $\mathrm{Ker}(A-10I_2) = (\mathrm{Ker}(A-5I_2))^\perp = \mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
Donc, si $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ et $u = xi+yj = Xe_1+Ye_2$, alors $q(u) = 6x2+4xy+9y2 = 5X^2+10Y^2$. De plus, $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2X+Y)$ et $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-X+2Y)$.

3. La matrice de Q dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9 & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

$$\chi_A = \begin{vmatrix} 4-X & \sqrt{6} & 5\sqrt{2} \\ \sqrt{6} & 9-X & \sqrt{3} \\ 5\sqrt{2} & \sqrt{3} & -1-X \end{vmatrix} = (4-X)(X^2-8X-12)-\sqrt{6}(-\sqrt{6}X-6\sqrt{6})+5\sqrt{2}(5\sqrt{2}X-42\sqrt{2})$$
$$= -X^3+12X^2+36X-432 = -(X-6)(X+6)(X-12).$$

Ensuite,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-6I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z=0 \\ \sqrt{6}x+3y+\sqrt{3}z=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -2x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y-7(-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ -12x-4\sqrt{6}y=0 \\ 12\sqrt{2}x+8\sqrt{3}y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}(-\sqrt{\frac{3}{2}}x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-\sqrt{\frac{3}{2}}x \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x= \\ y=- \end{array}\right.$$

et $\mathrm{Ker}(A-6I_3)=\mathrm{Vect}(e_1)$ où $e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(\sqrt{2},-\sqrt{3},1)$. De même,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+6I_3) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}z=0 \\ \sqrt{6}x+15y+\sqrt{3}z=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y \\ 10x+\sqrt{6}y+5\sqrt{2}(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y)=0 \\ 5\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+5(-\sqrt{2}x-5\sqrt{3}y)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z=-\sqrt{2}x-\sqrt{3}y \\ y=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=-\sqrt{2}x \end{array}\right.$$

et $\mathrm{Ker}(A+6I_3)=\mathrm{Vect}(e_2)$ où $e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,0,-\sqrt{2})$.
Enfin $\mathrm{Ker}(A-12I_3)=\mathrm{Vect}(e_3)$ où

$$e_3=e_1\wedge e_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, si on pose $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ alors $PA^tP=\mathrm{diag}(6,-6,12)$ ou encore

$$Q(Xe_1+Ye_2+Ze_3)=6X^2-6Y^2+12Z^2 \text{ où } \mathrm{Mat}_{(i,j,k)}(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 7 ▲

1. Soit P un élément de E. D'après un théorème de croissances comparées, $P(k)P(-k)e^{-k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et donc $Q(P)$ existe.
   Pour tout élément P de E, $Q(P)=B(P,P)$ où B est la forme bilinéaire symétrique définie sur E par
   $$\forall (P_1,P_2)\in E^2,\ B(P_1,P_2)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}(P_1(k)P_2(-k)+P_1(-k)P_2(k))e^{-k}\right)$$
   et donc Q est une forme quadratique sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes pairs et G le sous-espace vectoriel de E dont les éléments sont les polynômes impairs. F et G sont supplémentaires dans E.
   Soit P est un polynôme pair et non nul. Tout d'abord , $Q(P)\sum_{k=0}^{+\infty}(P(k))^2e^{-k}\geqslant 0$. De plus, comme P ne peut admettre tout entier naturel pour racine, on a plus précisément $Q(P)>0$. De même, si P est impair et non nul, $Q(P)<0$.
   Ainsi, la restriction de Q à F (resp. G) est définie positive (resp.négative). Enfin, si P_1 est pair et P_2 est impair, on a
   $$B(P_1,P_2)=\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(k)P_2(-k)e^{-k}=-\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(k)P_2(k)e^{-k}=-\sum_{k=0}^{+\infty}P_1(-k)P_2(k)e^{-k}=-B(P_2,P_1)=-B(P_1,P_2),$$

et donc $B(P_1,P_2)=0$ (F et G sont orthogonaux pour B).
Il existe un base de F dans laquelle $Q_{/F}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(F)$ et de même il existe un base de G dans laquelle $Q_{/G}$ est combinaison linéaire à coefficients strictement négatifs de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes en nombre égal à $\dim(G)$. Maintenant, si P est un polynôme quelconque de parties paire et impaire P_1 et P_2 respectivement,

$$Q(P)=Q(P_1+P_2)=Q(P_1)+2B(P_1,P_2)+Q(P_2)=Q_{/F}(P_1)+Q_{/G}(P_2).$$

Donc la réunion des deux bases ci-dessus est une base de E dans laquelle Q est combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes dans laquelle $\dim(F)=E\left(\frac{n}{2}\right)+1$ coefficients sont strictement positifs et $\dim(G)=E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sont strictement négatifs. Finalement,

$$\boxed{Q \text{ est donc non dégénérée de signature } s=\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1, E\left(\frac{n+1}{2}\right)\right).}$$

Correction de l'exercice 8 ▲

A est la matrice d'un produit scalaire φ dans une certaine base $\mathscr{B}$ fixée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathscr{B}'$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base $\mathscr{B}$ pour le produit scalaire φ et T la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$. La matrice T est triangulaire de même que la matrice ${}^tT$.
Puisque la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée pour le produit scalaire φ, la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}'$ est I_n. D'après les formules de changement de base, $A={}^tT(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}\varphi)T={}^tTT$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Puisque la matrice A est définie positive, il existe d'après le l'exercice 8 une matrice triangulaire supèrieure inversible T telle que $A={}^tTT$. Posons alors $T=(t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$$\det(A)=(\det(T))^2=t_{1,1}^2\dots t_{n,n}^2$$

Mais pour $i\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,i}=\sum_{k=1}^n t_{k,i}^2\geqslant t_{i,i}^2$ et donc $\det(A)\leqslant\prod_{i=1}^n a_{i,i}$.
Remarque. On a montré au passage que les coefficients diagonaux $a_{i,i}$ de A étaient des réels strictement positifs.
