



Espaces euclidiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 *** I

Montrer que la matrice de HILBERT $H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.

[Correction ▼](#)

[005786]

Exercice 2 *** I

1. Soit A une matrice carrée réelle de format n et $S = {}^tAA$. Montrer que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2. Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe une matrice A carrée réelle de format n telle que $S = {}^tAA$. A-t-on l'unicité de A ?
3. Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
4. Montrer que $\text{rg}(A) = \text{rg}(S)$.
5. (Racine carrée d'une matrice symétrique positive) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

[Correction ▼](#)

[005787]

Exercice 3 **** I

Soit E un espace euclidien de dimension n non nulle. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille de p vecteurs de E ($p \geq 2$). On dit que la famille (x_1, \dots, x_p) est une famille obtusangle si et seulement si $\forall (i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$ ($i < j \Rightarrow x_i | x_j < 0$). Montrer que si la famille (x_1, \dots, x_p) est une famille obtusangle alors $p \leq n + 1$.

[Correction ▼](#)

[005788]

Exercice 4 **I Inégalité de HADAMARD

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et \mathcal{B} une base orthonormée de E .

Montrer que pour tout n -uplet de vecteurs (x_1, \dots, x_n) , on a : $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \dots \|x_n\|$. Cas d'égalité ?

[Correction ▼](#)

[005789]

Exercice 5 **

Montrer que pour toute matrice carrée A réelle de format n , on a $|\det A| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right)}$.

[Correction ▼](#)

[005790]

Exercice 6 ***

Soit A une matrice orthogonale. Montrer que la valeur absolue de la somme des coefficients de A est inférieure ou égale à n . Cas d'égalité si de plus tous les coefficients de A sont positifs ?

[Correction ▼](#)

[005791]

Exercice 7 **

On munit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.

1. Déterminer l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

2. Calculer la distance de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques.

[Correction ▼](#)

[005792]

Exercice 8 **

Soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée directe d'un espace euclidien orienté E de dimension 3. Matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ autour de $e_1 + e_2$.

[Correction ▼](#)

[005793]

Exercice 9 ***

Soit A une matrice carrée réelle symétrique positive de format n . Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.

[Correction ▼](#)

[005794]

Exercice 10 **

Déterminer $\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}))$.

[Correction ▼](#)

[005795]

Exercice 11

Soit f une application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} , \mathbb{R} -linéaire.

1. Montrer qu'il existe deux complexes a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Calculer $\text{Tr}(f)$ et $\det(f)$ en fonction de a et b .
3. C.N.S. pour que f soit autoadjoint dans \mathbb{C} muni de sa structure euclidienne canonique.

[Correction ▼](#)

[005796]

Exercice 12 ***

Trouver tous les endomorphismes de \mathbb{R}^3 vérifiant $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

[Correction ▼](#)

[005797]

Exercice 13 **

Soit A une matrice carrée réelle. Montrer que les matrices tAA et $A{}^tA$ sont orthogonalement semblables.

[Correction ▼](#)

[005798]

Exercice 14 * I**

Montrer que le produit de deux matrices symétriques réelles positives est à valeurs propres réelles positives.

[Correction ▼](#)

[005799]

Exercice 15 * I**

Soient A et B deux matrices carrées réelles symétriques positives. Montrer que $\det A + \det B \leq \det(A + B)$.

[Correction ▼](#)

[005800]

Exercice 16 **

Valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 euclidien orienté défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) = a \wedge (a \wedge x) \text{ où } a \text{ est un vecteur donné.}$$

[Correction ▼](#)

[005801]

Exercice 17 *** I

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n qui conserve l'orthogonalité. Montrer qu'il existe un réel positif k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

[Correction ▼](#)

[005802]

Exercice 18 ** I

Soit P le plan de \mathbb{R}^4 d'équations $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z - t = 0 \end{cases}$ dans une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 muni de sa structure euclidienne canonique.

1. Déterminer les matrices dans \mathcal{B} de la projection orthogonale sur P et de la symétrie orthogonale par rapport à P .
2. Calculer la distance d'un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 à P .

[Correction ▼](#)

[005803]

Exercice 19 **

La matrice $\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$ est-elle positive ? définie ?

[Correction ▼](#)

[005804]

Exercice 20 ***

$O_n(\mathbb{R})$ est-il convexe ? $O_n(\mathbb{R})$ contient-il trois points alignés ?

[Correction ▼](#)

[005805]

Correction de l'exercice 1 ▲

La matrice H_n est symétrique réelle. Soit $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^t X H_n X &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{x_i x_j}{i+j-1} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \int_0^1 \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j t^{i+j-2} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, si $X \neq 0$, le polynôme $\sum_{i=1}^n x_i Y^{i-1}$ n'est pas le polynôme nul et donc, puisqu'un polynôme non nul admet un nombre fini de racines, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$. Ainsi, la fonction $t \mapsto \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2$ est continue positive et non nulle sur $[0, 1]$ et on en déduit que $\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 dt > 0$. On a montré que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, ${}^t X H_n X > 0$ et donc que

la matrice H_n est symétrique définie positive.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. ${}^t S = {}^t ({}^t A A) = {}^t A ({}^t A) = {}^t A A = S$. Donc $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t X S X = {}^t X {}^t A A X = {}^t (A X) A X = \|A X\|_2^2 \geq 0$. Donc $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), {}^t A A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe P dans $O_n(\mathbb{R})$ et D dans $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = P D P$.

Posons $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Puisque S est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, D est dans $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et on peut poser $D' = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ de sorte que $D'^2 = D$. On peut alors écrire

$$S = P D P = P D' D' P = (D' P) D' P,$$

et la matrice $A = D' P$ convient.

$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / S = {}^t A A$.

On a aussi ${}^t (-A)(-A) = S$ et comme en général $-A \neq A$, on n'a pas l'unicité de la matrice A .

3.

$$\begin{aligned} S \text{ définie positive} &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^t X S X > 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \|A X\|_2^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, A X \neq 0 \Leftrightarrow \text{Ker} A = \{0\} \Leftrightarrow A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

4. Montrons que les matrices A et S ont même noyau. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{Ker} A \Rightarrow A X = 0 \Rightarrow {}^t A A X = 0 \Rightarrow S X = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker} S,$$

et

$$X \in \text{Ker} S \Rightarrow {}^t A A X = 0 \Rightarrow {}^t X {}^t A A X = 0 \Rightarrow {}^t (A X) A X = 0 \Rightarrow \|A X\|_2^2 = 0 \Rightarrow A X = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker} A.$$

Ainsi, $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$ et en particulier, grâce au théorème du rang, on a montré que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A).$$

5. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Existence. D'après le théorème spectral, il existe $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ et $D_0 \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $S = P_0 D_0 {}^t P_0$.

Posons $D_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où les λ_i , $1 \leq i \leq n$, sont des réels positifs puis $\Delta_0 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et enfin $R = P_0 \Delta_0 {}^t P_0$. La matrice R est orthogonalement semblable à une matrice de $\mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$ et est donc un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Puis

$$R^2 = P_0 \Delta_0^2 {}^t P_0 = P_0 D_0 {}^t P_0 = S.$$

Unicité. Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = S$.

M est diagonalisable d'après le théorème spectral et donc $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(M)} E_M(\lambda)$. Mais si λ est une valeur propre de M , $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(M^2 - \lambda^2 I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$. De plus, les valeurs propres de M étant positive, les λ^2 , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts ou encore les $\text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$, $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont deux à deux distincts.

Ceci montre que pour chaque $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\text{Ker}(M - \lambda I_n) = \text{Ker}(S - \lambda^2 I_n)$ et que les λ^2 , $\lambda \in \text{Sp}(M)$, sont toutes les valeurs propres de S .

Ainsi, nécessairement la matrice ${}^t P_0 M P_0$ est une matrice diagonale D . L'égalité $M^2 = S$ fournit $D^2 = D_0$ puis $D = \Delta_0$ (car $D \in \mathcal{D}_n^+(\mathbb{R})$) et finalement $M = R$.

$$\forall S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / R^2 = S.$$

Correction de l'exercice 3 ▲

1 ère solution. Soit $p \geq 2$. Montrons que si la famille (x_1, \dots, x_p) est obtusangle alors la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre.

Soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle. Supposons que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) soit liée.

Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k x_k = 0$.

Quitte à multiplier les deux membres de l'égalité par -1 , on peut supposer que l'un des λ_i au moins est strictement positif. On pose $I = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k > 0\}$ et $J = \{k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket / \lambda_k \leq 0\}$ (éventuellement J est vide).

Si J est vide, il reste $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$ et si J est non vide,

$$\|\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\|^2 = -(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) \cdot (\sum_{j \in J} \lambda_j x_j) = -\sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_i \lambda_j (x_i | x_j) \leq 0 \text{ (car } \forall (i,j) \in I \times J, (x_i | x_j) < 0 \text{ et } \lambda_i \lambda_j \leq 0).$$

Ainsi, dans tous les cas, $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$. Mais ceci est impossible car $(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i) | x_p = \sum_{i \in I} \lambda_i (x_i | x_p) < 0$.

On a montré que la famille (x_1, \dots, x_{p-1}) est libre et on en déduit que $p-1 \leq n$ ou encore $p \leq n+1$.

2ème solution. Montrons par récurrence sur $n = \dim E_n \geq 1$ que toute famille obtusangle de E_n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$.

- Pour $n = 1$. Soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E_1 . On peut identifier ces vecteurs à des réels. Deux des trois réels x_1, x_2 ou x_3 ont même signe et on ne peut donc avoir $x_1 x_2 < 0$ et $x_1 x_3 < 0$ et $x_2 x_3 < 0$.

Une famille obtusangle de E_1 a donc un cardinal inférieur ou égal à 2.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que toute famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n a un cardinal inférieur ou égal à $n+1$. Soit (x_1, \dots, x_p) une famille obtusangle de E_{n+1} .

Si $p = 1$ alors $p \leq n+2$. Supposons dorénavant $p \geq 2$.

On va construire à partir de cette famille une famille obtusangle de cardinal $p - 1$ d'un espace euclidien de dimension n .

Soit $F = x_p^\perp$. Puisque la famille (x_1, \dots, x_p) est obtusangle, le vecteur x_p n'est pas nul et F est un espace euclidien de dimension n .

On note y_1, y_2, \dots, y_{p-1} les projetés orthogonaux des vecteurs x_1, \dots, x_{p-1} sur F . On sait que

$$\forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, y_i = x_i - \frac{(x_i|x_p)}{\|x_p\|^2} x_p.$$

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ tel que $i \neq j$.

$$(y_i|y_j) = (x_i|x_j) - 2 \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} + \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)\|x_p\|^2}{\|x_p\|^4} = (x_i|x_j) - \frac{(x_i|x_p)(x_j|x_p)}{\|x_p\|^2} < 0.$$

Ainsi, la famille $(y_i)_{1 \leq i \leq p-1}$ est une famille obtusangle d'un espace euclidien de dimension n et par hypothèse de récurrence $p-1 \leq n+1$ et donc $p \leq n+2$. Le résultat est démontré par récurrence.

Correction de l'exercice 4 ▲

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, l'inégalité est vraie.

Si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, on peut considérer $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ l'orthonormalisée de SCHMIDT de la famille (x_1, \dots, x_n) . Les bases B_0 et B sont des bases orthonormées de E et donc

$$\begin{aligned} |\det_B(x_1, \dots, x_n)| &= |\det_{B_0}(x_1, \dots, x_n)| = \text{abs} \left(\begin{pmatrix} (x_1|e_1) & \times & \dots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & (x_n|e_n) \end{pmatrix} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n |(x_k|e_k)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \|e_k\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \prod_{k=1}^n \|x_k\|. \end{aligned}$$

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, |\det_B(x_1, \dots, x_n)| \leq \prod_{k=1}^n \|x_k\| \text{ (inégalité de HADAMARD).}$$

Ensuite,

- si la famille (x_1, \dots, x_n) est liée, on a l'égalité si et seulement si l'un des vecteurs x_k est nul

- si la famille (x_1, \dots, x_n) est libre, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, |(x_k|e_k)| = \|x_k\| \|e_k\|$. Les cas d'égalité

de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ étant connus, on a l'égalité si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k$ est colinéaire à e_k

ou encore si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est orthogonale.

En résumé, l'inégalité de HADAMARD est une égalité si et seulement si la famille (x_1, \dots, x_n) est orthogonale libre ou si l'un des vecteurs est nul.

Correction de l'exercice 5 ▲

C'est l'exercice 4.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice orthogonale. On pose $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| &= \left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} 1 \times a_{i,j} \times 1 \right| = |{}^t X A X| = |(A X | X)| \\ &\leq \|A X\| \|X\| \text{ (d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ)} \\ &= \|X\|^2 \text{ (puisque la matrice } A \text{ est orthogonale)} \\ &= n. \end{aligned}$$

On a l'égalité si et seulement si la famille (X, AX) est liée ce qui équivaut à X vecteur propre de A . On sait que les valeurs propres (réelles) de A ne peuvent être que 1 ou -1 . Donc,

$$\text{égalité} \Leftrightarrow AX = X \text{ ou } AX = -X \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} \right| = 1$$

Il paraît difficile d'améliorer ce résultat dans le cas général. Supposons de plus que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque tous les $a_{i,j}$ sont éléments de $[0, 1]$,

$$1 = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \geq \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1.$$

L'inégalité écrite est donc une égalité et on en déduit que chaque inégalité $a_{i,j} \geq a_{i,j}^2, 1 \leq j \leq n$, est une égalité. Par suite, $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \in \{0, 1\}$. Ceci montre que la matrice A est une matrice de permutation qui réciproquement convient.

Correction de l'exercice 7 ▲

Le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est défini par

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^2, (A|B) = \text{Tr}({}^t AB) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1. Déterminons l'orthogonal de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

$$(A|B) = \text{Tr}({}^t AB) = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) = -\text{Tr}({}^t BA) = -(B|A).$$

et donc $(A|B) = 0$. Donc $\mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \subset (\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp$ et comme de plus, $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \dim((\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp)$, on a montré que

$$(\mathcal{A}_3(\mathbb{R}))^\perp = \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

2. Ainsi, la projection orthogonale de M sur $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ est exactement la partie antisymétrique $p_a(M)$ de M et la distance cherchée est la norme de $M - p_a(M) = p_s(M)$ avec

$$p_s(M) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par suite,

$$d(M, \mathcal{A}_3(\mathbb{R})) = \|p_s(M)\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = 1.$$

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $k = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$. Soit $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$. On sait que

$$\begin{aligned}r(u) &= (\cos \theta)u + (1 - \cos \theta)(u|k)k + (\sin \theta)k \wedge u = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}(u|(e_1 + e_2))(e_1 + e_2) + \frac{\sqrt{6}}{4}(e_1 + e_2) \wedge u \\&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(x+y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{6}}{4} \begin{pmatrix} z \\ -z \\ -x+y \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{\sqrt{6}}{4}z \\ -\frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{\sqrt{6}}{4}y + \frac{1}{2}z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et la matrice cherchée est

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 9 ▲

La matrice A est symétrique réelle positive. Donc ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. De plus,

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = \chi_A(-1) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n).$$

L'inégalité à démontrer équivaut donc à :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, 1 + \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda_k} \leq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (1 + \lambda_k)}.$$

Soit donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Si l'un des λ_k est nul, l'inégalité est immédiate.

Supposons dorénavant tous les λ_k strictement positifs. L'inégalité à démontrer s'écrit

$$\ln \left(1 + \exp \left(\frac{1}{n} (\ln(\lambda_1) + \dots + \ln(\lambda_n)) \right) \right) \leq \frac{1}{n} (\ln(1 + \exp(\ln(\lambda_1))) + \dots + \ln(1 + \exp(\ln(\lambda_n)))) \quad (*)$$

ou encore $f \left(\frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) \right) \leq \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n))$ où $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \ln(1 + e^x)$ et $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \ln(\lambda_k)$. L'inégalité à démontrer est une inégalité de convexité. La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1} \text{ puis } f''(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0.$$

La fonction f est donc convexe sur \mathbb{R} ce qui démontre l'inégalité (*).

$$\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), 1 + \sqrt[n]{\det(A)} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}.$$

Correction de l'exercice 10 ▲

Soit A une matrice orthogonale à coefficients entiers. Puisque les colonnes ou les lignes de A sont unitaires, on trouve par ligne ou par colonne un et un seul coefficient de valeur absolue égale à 1, les autres coefficients étant nuls. A est donc obtenue en multipliant chaque coefficient d'une matrice de permutation par 1 ou -1 . Réciproquement, une telle matrice est orthogonale à coefficients entiers.

Il y a $n!$ matrices de permutation et pour chaque matrice de permutation 2^n façons d'attribuer un signe $+$ ou $-$ à chaque coefficient égal à 1. Donc

$$\text{card}(O_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})) = 2^n n!.$$

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Soit f un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Pour tout nombre complexe z

$$\begin{aligned} f(z) &= f((\text{Re}(z)).1 + (\text{Im}(z)).i) = (\text{Re}(z))f(1) + (\text{Im}(z))f(i) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})f(1) + \frac{1}{2i}(z - \bar{z})f(i) \\ &= \frac{f(1) - if(i)}{2}z + \frac{f(1) + if(i)}{2}\bar{z}, \end{aligned}$$

et on peut prendre $a = \frac{f(1) - if(i)}{2}$ et $b = \frac{f(1) + if(i)}{2}$. (Réciproquement pour a et b complexes donnés, l'application f ainsi définie est \mathbb{R} -linéaire et on a donc l'écriture générale complexe d'un endomorphisme du plan).

$$2. \text{Tr}(f) = \text{Re}(f(1)) + \text{Im}(f(i)) = \text{Re}(a + b) + \text{Im}(i(a - b)) = \text{Re}(a + b) + \text{Re}(a - b) = 2\text{Re}(a)$$

et

$$\begin{aligned} \det(f) &= \text{Re}(a + b)\text{Im}(i(a - b)) - \text{Im}(a + b)\text{Re}(i(a - b)) = \text{Re}(a + b)\text{Re}(a - b) + \text{Im}(a + b)\text{Im}(a - b) \\ &= (\text{Re}(a))^2 - (\text{Re}(b))^2 + (\text{Im}(a))^2 - (\text{Im}(b))^2 = |a|^2 - |b|^2. \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(f) = 2\text{Re}(a) \text{ et } \det(f) = |a|^2 - |b|^2.$$

3. Soient z et z' deux nombres complexes. On rappelle que

$$z|z'| = (\text{Re}z)(\text{Re}z') + (\text{Im}z)(\text{Im}z') = \frac{1}{4}(z + \bar{z})(z' + \bar{z}') - \frac{1}{4}(z - \bar{z})(z' - \bar{z}') = \frac{1}{2}(\bar{z}z' + z\bar{z}') = \text{Re}(\bar{z}z').$$

et au passage si on oriente le plan de sorte que la base orthonormée $(1, i)$ soit directe,

$$[z, z'] = (\text{Re}z)(\text{Im}z') - (\text{Im}z)(\text{Re}z') = \frac{1}{4i}(z + \bar{z})(z' - \bar{z}') - \frac{1}{4i}(z - \bar{z})(z' + \bar{z}') = \frac{1}{2i}(\bar{z}z' - z\bar{z}') = \text{Im}(\bar{z}z').$$

Notons M la matrice de f dans la base $(1, i)$. Puisque la base $(1, i)$ est orthonormée,

$$f = f^* \Leftrightarrow M = {}^t M \Leftrightarrow \text{Im}(a + b) = \text{Re}(i(a - b)) \Leftrightarrow \text{Im}(a + b) = -\text{Im}(a - b) \Leftrightarrow 2\text{Im}a = 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

$$f = f^* \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

Soit (i, j, k) une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 euclidien orienté. Posons $u = f(i)$, $v = f(j)$ et $w = f(k)$. Nécessairement, $u \wedge v = f(i) \wedge f(j) = f(i \wedge j) = f(k) = w$ et de même $v \wedge w = u$ et $w \wedge u = v$.

1er cas. Si l'un des vecteurs u ou v ou w est nul alors $u = v = w = 0$ et donc $f = 0$. Réciproquement, l'application nulle convient.

2ème cas. • Si les trois vecteurs u , v et w sont non nuls alors $u \wedge v \neq 0$ et donc la famille (u, v) est libre. Mais alors la famille (u, v, w) est une base directe de \mathbb{R}^3 .

Ensuite $w = u \wedge v$ est orthogonal à u et v et $v = w \wedge u$ est orthogonal à u . On en déduit que la famille (u, v, w) est une base orthogonale directe de \mathbb{R}^3 .

Enfin, puisque u et v sont orthogonaux, $\|w\| = \|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$ et de même $\|u\| = \|v\|\|w\|$ et $\|v\| = \|u\|\|w\|$. Puis $\|u\|\|v\|\|w\| = (\|u\|\|v\|\|w\|)^2$ et donc, puisque les vecteurs u , v et w sont non nuls, $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$. Les égalités $\|u\|\|v\|\|w\| = 1$ et $\|u\| = \|v\|\|w\|$ fournissent $\|u\|^2 = 1$ et de même $\|v\|^2 = \|w\|^2 = 1$.

Finalement, la famille (u, v, w) est une base orthonormée directe.

En résumé, l'image par f d'une certaine base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 et on sait que f est un automorphisme orthogonal positif de \mathbb{R}^3 c'est-à-dire une rotation de \mathbb{R}^3 .

• Réciproquement, si f est la rotation d'angle θ autour du vecteur unitaire e_3 . On considère e_1 et e_2 deux vecteurs de \mathbb{R}^3 tels que la famille (e_1, e_2, e_3) soit une base orthonormée directe.

Pour vérifier que f est solution, par linéarité, il suffit de vérifier les 9 égalités : $\forall (i, j) \in \{1, 2, 3\}^2, f(e_i \wedge e_j) = f(e_i) \wedge f(e_j)$. Pour vérifier ces 9 égalités, il suffit se réduisent en fin de compte d'en vérifier 2 :

$$f(e_1) \wedge f(e_2) = e_3 = f(e_3) = f(e_1 \wedge e_2) \text{ et } f(e_3) \wedge f(e_1) = e_3 \wedge f(e_1) = f(e_2) = f(e_3 \wedge e_1).$$

Les endomorphismes cherchés sont donc l'application nulle et les rotations de \mathbb{R}^3 .

Correction de l'exercice 13 ▲

Puisque les matrices $S_1 = {}^tAA$ et $S_2 = A^tA$ sont symétriques réelles, ces deux matrices sont à valeurs propres réelles. On sait d'autre part que si M et N sont deux matrices quelconques alors les matrices MN et NM ont même polynôme caractéristique.

Notons alors $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ la famille des valeurs propres des matrices S_1 et S_2 et posons $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'après le théorème spectral, il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que $S_1 = P_1 D^t P_1$ et $S_2 = P_2 D^t P_2$. Mais alors

$$S_2 = P_2 ({}^t P_1 S_1 P_1)^t P_2 = (P_2^t P_1) S_1^t (P_2^t P_1).$$

Comme la matrice $P_2^t P_1$ est orthogonale, on a montré que les matrices S_1 et S_2 sont orthogonalement semblables.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ les matrices } {}^tAA \text{ et } A^tA \text{ sont orthogonalement semblables.}$

Correction de l'exercice 14 ▲

Remarque. Il faut prendre garde au fait que le produit de deux matrices symétriques n'est pas nécessairement symétrique. Plus précisément, si A et B sont deux matrices symétriques alors

$$AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB \Leftrightarrow {}^t B^t A = AB \Leftrightarrow BA = AB$$

et le produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent. Donc au départ, rien n'impose que les valeurs propres de AB soient toutes réelles.

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après l'exercice 2, il existe deux matrices carrées M et N telles que $A = {}^tMM$ et $B = {}^tNN$. On a alors $AB = {}^tMM^tNN$. La matrice AB a même polynôme caractéristique que la matrice $N({}^tMM^tN = {}^t(M^tN)M^tN$. D'après l'exercice 2, cette dernière matrice est symétrique positive et a donc des valeurs propres réelles positives. On a montré que les valeurs propres de la matrice AB sont réelles et positives.

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives.

1er cas. Supposons qu'aucune des deux matrices A ou B n'est inversible, alors $\det A + \det B = 0$.

D'autre part, la matrice $A + B$ est symétrique car $(\mathcal{S}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel et ses valeurs propres sont donc réelles. De plus, pour X vecteur colonne donné, ${}^tX(A + B)X = {}^tXAX + {}^tXBX \geq 0$.

La matrice $A + B$ est donc symétrique réelle positive. Par suite, les valeurs propres de la matrice $A + B$ sont des réels positifs et puisque $\det(A + B)$ est le produit de ces valeurs propres, on a $\det(A + B) \geq 0 = \det A + \det B$.

2ème cas. Sinon, une des deux matrices A ou B est inversible (et donc automatiquement définie positive). Supposons par exemple A définie positive.

D'après l'exercice 2, il existe une matrice inversible M telle que $A = {}^tMM$. On peut alors écrire $A + B = {}^tMM + B = {}^tM(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1}))M$ et donc

$$\det(A + B) = (\det M)^2 \det(I_n + {}^t(M^{-1}BM^{-1})) = (\det M)^2 \det(I_n + C)$$

où $C = {}^tM^{-1}BM^{-1}$. La matrice C est symétrique, positive car pour tout vecteur colonne X ,

$${}^tXCX = {}^tX{}^t(M^{-1}BM^{-1})X = {}^t(M^{-1}X)B(M^{-1}X) \geq 0$$

et ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels positifs. Les valeurs propres de la matrice $I_n + C$ sont les réels $1 + \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$ et donc

$$\det(I_n + C) = (1 + \lambda_1) \dots (1 + \lambda_n) \geq 1 + \lambda_1 \dots \lambda_n = 1 + \det C.$$

Maintenant, $\det A = (\det M)^2$ puis $\det B = (\det M)^2 \det C$ et donc

$$\det A + \det B = (\det M)^2 (1 + \det C) \leq (\det M)^2 \det(I_n + C) = \det(A + B).$$

On a montré que

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \det A + \det B \leq \det(A + B).$$

Correction de l'exercice 16 ▲

Si $a = 0$, $f = 0$ et il n'y a plus rien à dire.

Si $a \neq 0$, puisque $f(a) = 0$, 0 est valeur propre de f et $\text{Vect}(a) \subset E_0(f)$. D'autre part, si x est orthogonal à a , d'après la formule du double produit vectoriel

$$f(x) = (a \cdot x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2 x.$$

Donc le réel non nul $-\|a\|^2$ est valeur propre de f et $a^\perp \subset E_{-\|a\|^2}$. Maintenant, $\dim \text{Vect}(a) + \dim a^\perp = 3$ et donc $\text{Sp}(f) = (0, -\|a\|^2, -\|a\|^2)$ puis $E_0(f) = \text{Vect}(a)$ et $E_{-\|a\|^2} = a^\perp$. On en déduit aussi que f est diagonalisable. On peut noter que, puisque f est diagonalisable et que les sous-espaces propres sont orthogonaux, f est un endomorphisme symétrique.

Correction de l'exercice 17 ▲

Il s'agit de montrer qu'un endomorphisme d'un espace euclidien E qui conserve l'orthogonalité est une similitude.

On peut raisonner sur une base orthonormée de E que l'on note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. Par hypothèse, la famille $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale. De plus, pour $i \neq j$, $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j) = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 0$ et donc $f(e_i + e_j) \perp f(e_i - e_j) = 0$ ce qui fournit $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$. Soit k la valeur commune des normes des $f(e_i)$, $1 \leq i \leq n$.

Si $k = 0$, tous les $f(e_i)$ sont nuls et donc f est nulle.

Si $k \neq 0$, l'image par l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ de la base orthonormée \mathcal{B} est une base orthonormée. Donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ est un automorphisme orthogonal de E et donc l'endomorphisme $\frac{1}{k}f$ conserve la norme. Dans tous les cas, on a trouvé un réel positif k tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| = k\|x\|$.

Correction de l'exercice 18 ▲

Les deux formes linéaires considérées sont indépendantes et donc P est un plan. Une base de P est par exemple $(i, j) = ((1, -1, 0, 0)(1, 0, 2, -3))$. On orthonormalise la base (i, j) .

On prend $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ puis $e'_2 = j - (j|e_1)e_1 = (1, 0, 2, -3) - \frac{1}{2}(1, -1, 0, 0) = \frac{1}{2}(1, 1, 4, -6)$ puis $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

Une base orthonormée de P est (e_1, e_2) où $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0)$ et $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}}(1, 1, 4, -6)$.

1. Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z, t)$ sur P est

$$\begin{aligned} p_P(u) &= (u|e_1)e_1 + (u|e_2)e_2 = \frac{1}{2}(x-y)(1, -1, 0, 0) + \frac{1}{54}(x+y+4z-6t)(1, 1, 4, -6) \\ &= \frac{1}{27}(14x-13y+2z-3t, -13x+14y+2z-3t, 2x+2y+8z-12t, -3x-3y-12z+18t). \end{aligned}$$

La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P est

$$M = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 14 & -13 & 2 & -3 \\ -13 & 14 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 8 & -12 \\ -3 & -3 & -12 & 18 \end{pmatrix}.$$

La matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P est

$$S = 2M - I_4 = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 1 & -26 & 4 & -6 \\ -26 & 1 & 4 & -6 \\ 4 & 4 & -11 & -24 \\ -6 & -6 & -24 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. La distance de $u = (x, y, z, t)$ à P est

$$\begin{aligned} \|u - p_P(u)\| &= \frac{1}{27} \|(14x+13y-2z+3t, 13x+14y-2z+3t, -2x-2y+19z+12t, 3x+3y+12z+9t)\| \\ &= \frac{1}{27} \sqrt{(14x+13y-2z+3t)^2 + (13x+14y-2z+3t)^2 + (-2x-2y+19z+12t)^2 + (3x+3y+12z+9t)^2} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19 ▲

1ère solution. (n'utilisant pas les valeurs propres) Soient A la matrice de l'énoncé puis $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} {}^tXAX &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i \neq j} x_i x_j = \sum_{i \neq j} (x_i^2 - x_i x_j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i \neq j} x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

et donc la matrice A est positive. De plus, si $X = (1)_{1 \leq i \leq n} \neq 0$, ${}^tXAX = 0$ et donc la matrice A n'est pas définie.

2ème solution. La matrice A est symétrique réelle. Donc ses valeurs propres sont réelles et A est diagonalisable. Par suite, la dimension de chacun de des sous-espaces propres de A est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.

On note alors que $\text{rg}(A - nI_n) = 1$ et donc n est valeur propre de A d'ordre $n - 1$. Soit λ la valeur propre manquante.

$$(n - 1)n + \lambda = \text{Tr}A = n(n - 1).$$

Donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et donc la matrice A est positive mais 0 est valeur propre de A et donc la matrice A n'est pas définie.

La matrice A est positive et non définie.

Correction de l'exercice 20 ▲

Pour la première question, une simple observation suffit : les matrices I et $-I$ sont dans $O_n(\mathbb{R})$, mais pas la matrice nulle qui est leur milieu.

Soient A et B deux matrices orthogonales distinctes. Montrons que pour tout réel $\lambda \in]0, 1[$, la matrice $(1 - \lambda)A + \lambda B$ n'est pas orthogonale.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que la matrice $(1 - \lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note respectivement A_j , B_j et C_j la j -ème colonne de matrice A , de la matrice B et de la matrice $(1 - \lambda)A + \lambda B$. Ces trois matrices étant orthogonales, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$1 = \|C_j\| \leq (1 - \lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\| = (1 - \lambda) + \lambda = 1,$$

et donc $\|C_j\| = (1 - \lambda)\|A_j\| + \lambda\|B_j\|$. On est dans un cas d'égalité de l'inégalité de MINKOWSKI. Puisque $\lambda \in]0, 1[$, les colonnes $(-\lambda)A_j$ et λB_j ne sont pas nulles et donc sont colinéaires et de même sens. Puisque les réels $1 - \lambda$ et λ sont strictement positifs, il en est de même des colonnes A_j et B_j et puisque ces colonnes sont des vecteurs unitaires, ces colonnes sont en fin de compte égales. En résumé, si il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que la matrice $(1 - \lambda)A + \lambda B$ soit orthogonale, alors $A = B$. Ceci est une contradiction et on a montré que

$O_n(\mathbb{R})$ n'est pas convexe.