

Exo7



Séries de Fourier

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 **

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et impaire telle que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x .
2. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et paire telle que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x .

Correction ▼

[005781]

Exercice 2

Développer en série de FOURIER les fonctions suivantes puis déterminer la valeur des sommes indiquées :

- 1) (**) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique paire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
- 2) (**) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique impaire telle que $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$.
- 3) (**) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2+16n+3}$.
- 4) (***) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -périodique telle que $\forall x \in]-\pi, \pi]$, $f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x)$ (λ réel strictement positif donné). En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^2+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2+n^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$.
- 5) (**) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sup(0, \sin x)$. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Correction ▼

[005782]

Exercice 3 ***

Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

1. (a) Développer en série trigonométrique la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{a - \cos t}$ (utiliser la racine de plus petit module, notée b , de l'équation $z^2 - az + 1 = 0$).
(b) La série obtenue est-elle la série de FOURIER de f ?
2. Déduire de 1) la valeur des intégrales $I_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt$, $n \in \mathbb{N}$.

Correction ▼

[005783]

Exercice 4 *** I

(un développement en série de fonctions de $\frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ et $\cotan(\pi z)$).

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , 2π -périodique telles que $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \cos(\alpha x)$.

1. Développer la fonction f en série de FOURIER.
2. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$,

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Exercice 5 **

Développer en série de FOURIER la fonction $f : x \mapsto x - E(x) - \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. • Puisque f est impaire, $f(0) = 0$. Puisque f est impaire et 2π -périodique, $-f(\pi) = f(-\pi) = f(\pi)$ et donc $f(\pi) = 0$. Puisque f est 2π -périodique, pour $k \in \mathbb{Z}$, $f(2k\pi) = f(0) = 0$ et $f((2k+1)\pi) = f(\pi) = 0$. Finalement, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $f(k\pi) = 0$.

Soit $x \in]-\pi, 0[$. Puisque f est impaire, $f(x) = -f(-x) = -\sin(-\frac{x}{2}) = \sin(\frac{x}{2})$ et donc $\forall x \in]-\pi, \pi[$, $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi < \pi$ et puisque f est 2π -périodique, $f(x) = f(x - 2k\pi) = \sin(\frac{x - 2k\pi}{2}) = (-1)^k \sin(\frac{x}{2})$. De plus, $-\pi < x - 2k\pi < \pi \Rightarrow k < \frac{x + \pi}{2\pi} < k + 1$ et $k = E(\frac{x + \pi}{2\pi})$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \pi\mathbb{Z} \\ (-1)^k \sin(\frac{x}{2}) & \text{où } k = E(\frac{x + \pi}{2\pi}) \text{ si } x \notin \pi\mathbb{Z} \end{cases}.$$

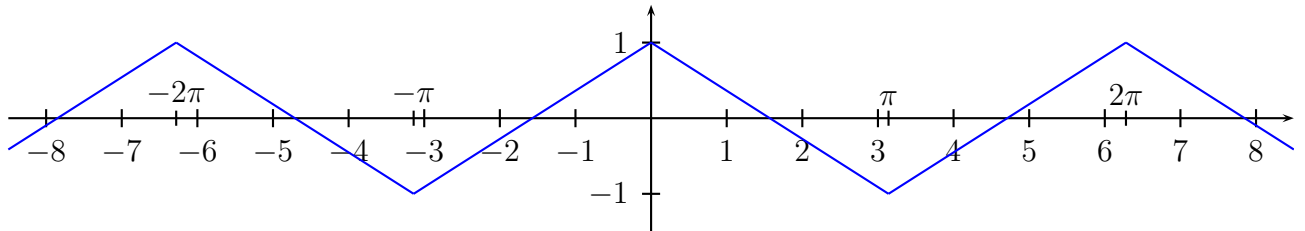
2. • Soit $x \in [-\pi, 0]$. Puisque f est paire, $f(x) = f(-x) = \sin(-\frac{x}{2}) = \sin(|\frac{x}{2}|)$ et donc $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = \sin(|\frac{x}{2}|)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi < x - 2k\pi \leq \pi$ et puisque f est 2π -périodique, $f(x) = f(x - 2k\pi) = \sin(|\frac{x - 2k\pi}{2}|)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(|\frac{x}{2} - k\pi|) \text{ où } k = E(\frac{x + \pi}{2\pi}).$$

Correction de l'exercice 2 ▲

1. La fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (1 - \frac{2x}{\pi}) \cos(nx) dx$.

Par suite, $a_0(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \left(\left[\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) = \frac{4}{n\pi^2} \left[\frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{4(1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

La fonction f est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} . Par suite, pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}.$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ensuite, si $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on a

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{S}{4},$$

et donc $S = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$.

D'autre part, puisque f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (f(x))^2 dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \left[-\frac{1}{3} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)^3\right]_0^\pi = \frac{2}{3}$$

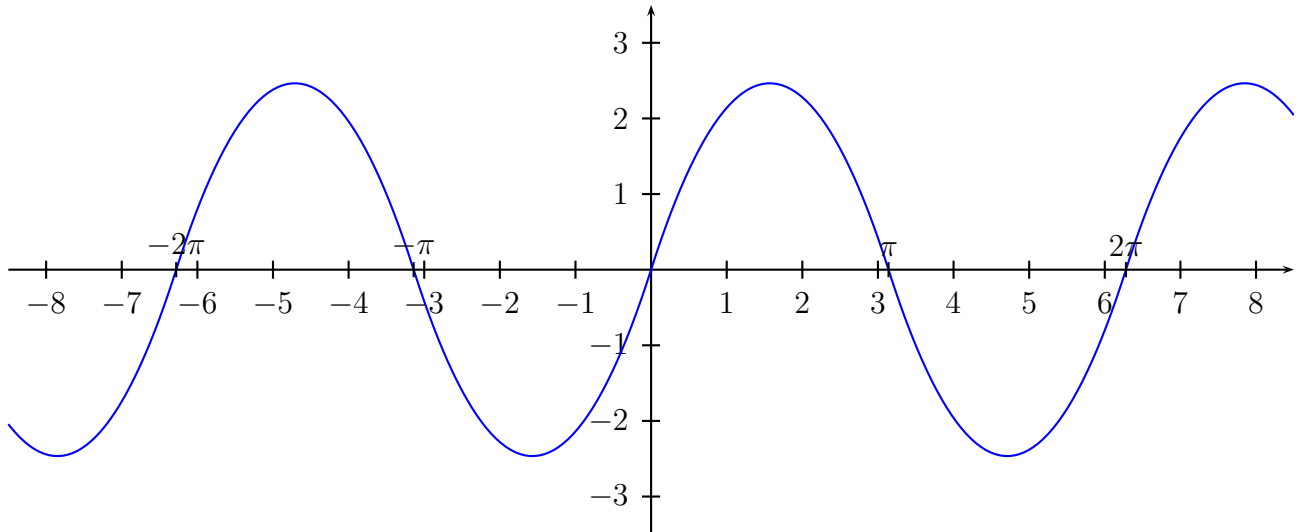
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3} \times \frac{\pi^4}{64} = \frac{\pi^4}{96}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^4}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{96} + \frac{S}{16},$$

et donc $S = \frac{16}{15} \times \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. La fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Puisque f est impaire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi-x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left(\left[x(\pi-x) \frac{-\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi (\pi-2x) \cos(nx) dx \right) \\ &= \frac{2}{n\pi} \left(\left[(\pi-2x) \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) = \frac{4}{n^2\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{4(1-(-1)^n)}{n^3\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} . Par suite, pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} \sin(nx) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin((2p+1)x)}{(2p+1)^3}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}$ fournit $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Ensuite, puisque f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique, la formule de PARSEVAL fournit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi (f(x))^2 dx$ et donc

$$\frac{64}{\pi^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 (\pi-x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\pi^2 \frac{x^3}{3} - 2\pi \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_0^\pi = 2\pi^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi^4}{15}$$

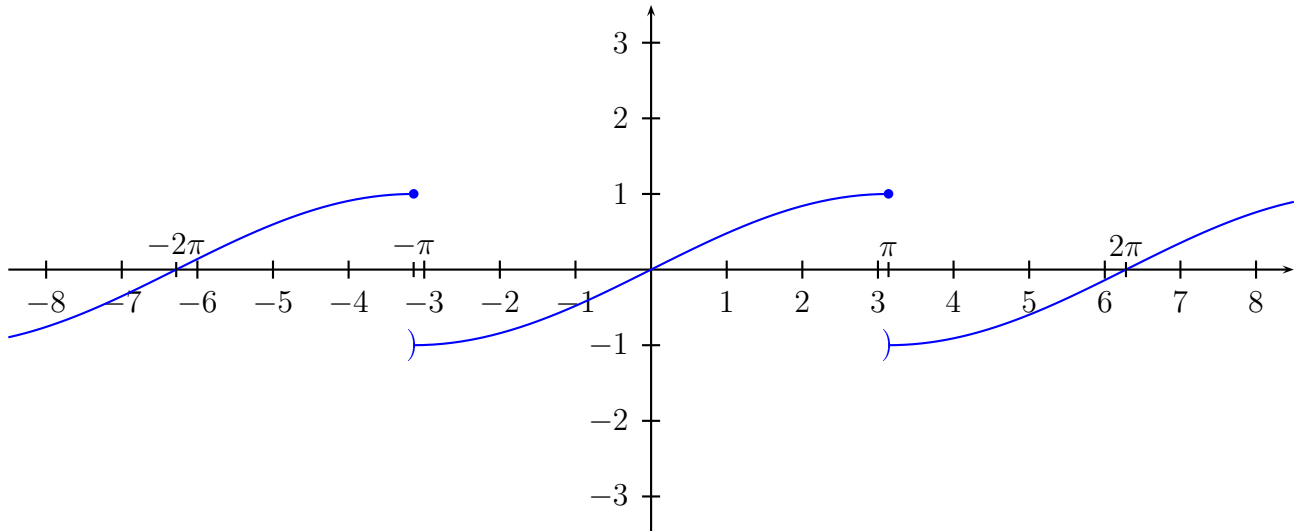
et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^2}{64} \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}$. Enfin, si on pose $S = \frac{1}{n^6}$,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^6} = \frac{\pi^6}{960} + \frac{S}{64},$$

et donc $S = \frac{64}{63} \times \frac{\pi^6}{960} = \frac{\pi^6}{945}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

3. La fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction g définie sur \mathbb{R} , impaire et 2π -périodique telle que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)x\right)}{n - \frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{n + \frac{1}{2}} \right]_0^\pi = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{(-1)^n}{n - \frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n + \frac{1}{2}} \right) \\ &= -\frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2n}{n^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{(-1)^n}{\pi} \frac{8n}{4n^2 - 1}. \end{aligned}$$

La fonction f est 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge en tout réel x et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{4n^2 - 1} \sin(nx).$$

L'égalité $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ fournit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{4n^2 - 1} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p+1}{4(2p+1)^2 - 1} \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{8}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{2p+1}{16p^2 + 16p + 3},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{16n^2 + 16n + 3} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

4. f est 2π -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} et paire. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \text{ch}(\lambda x) \cos(nx) dx$.

1ère solution. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(\lambda x) e^{inx} dx \right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\lambda+in)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-\lambda+in)x} dx \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(\lambda+in)\pi} - e^{-(\lambda+in)\pi}}{\lambda+in} + \frac{e^{(-\lambda+in)\pi} - e^{-(\lambda+in)\pi}}{-\lambda+in} \right) = \frac{(-1)^n}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda+in} + \frac{-2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{-\lambda+in} \right) \\
&= \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{\lambda-in}{\lambda^2+n^2} + \frac{\lambda+in}{\lambda^2+n^2} \right) = \frac{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}
\end{aligned}$$

2ème solution. Une double intégration par parties fournit

$$\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda x)}{\lambda} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh}(\lambda x) \sin(nx) dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh}(\lambda x) \sin(nx) dx \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} \left(\left[\frac{\operatorname{ch}(\lambda x)}{\lambda} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{\lambda} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}(\lambda x) \cos(nx) dx \right) \right) \\
&= \frac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} - \frac{n^2}{\lambda^2} a_n(f),
\end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = \frac{2(-1)^n \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} \times \frac{\lambda^2}{n^2+\lambda^2} = \frac{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$.

La fonction f est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} . On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} \cos(nx).$$

L'égalité $f(0) = 1$ fournit $1 = \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} + \frac{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2}$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)} \left(1 - \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} \right) = \frac{\pi(\operatorname{sh}(\lambda\pi) - \pi\lambda)}{2\lambda^2 \pi \operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

et l'égalité $f(\pi) = \operatorname{ch}(\lambda\pi)$ fournit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)} \left(\operatorname{ch}(\lambda\pi) - \frac{\operatorname{sh}(\lambda\pi)}{\lambda\pi} \right) = \frac{\lambda\pi \operatorname{ch}(\lambda\pi) - \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}$$

$$\forall \lambda > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\lambda^2} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{sh}(\lambda\pi)} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+\lambda^2} = \frac{\lambda\pi \operatorname{ch}(\lambda\pi) - \operatorname{sh}(\lambda\pi)}{2\lambda^2 \operatorname{sh}(\lambda\pi)}.$$

La fonction f est 2π -périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} . L'égalité de PARSEVAL s'écrit $\frac{(a_0(f))^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} ((a_n(f))^2 + (b_n(f))^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$ avec

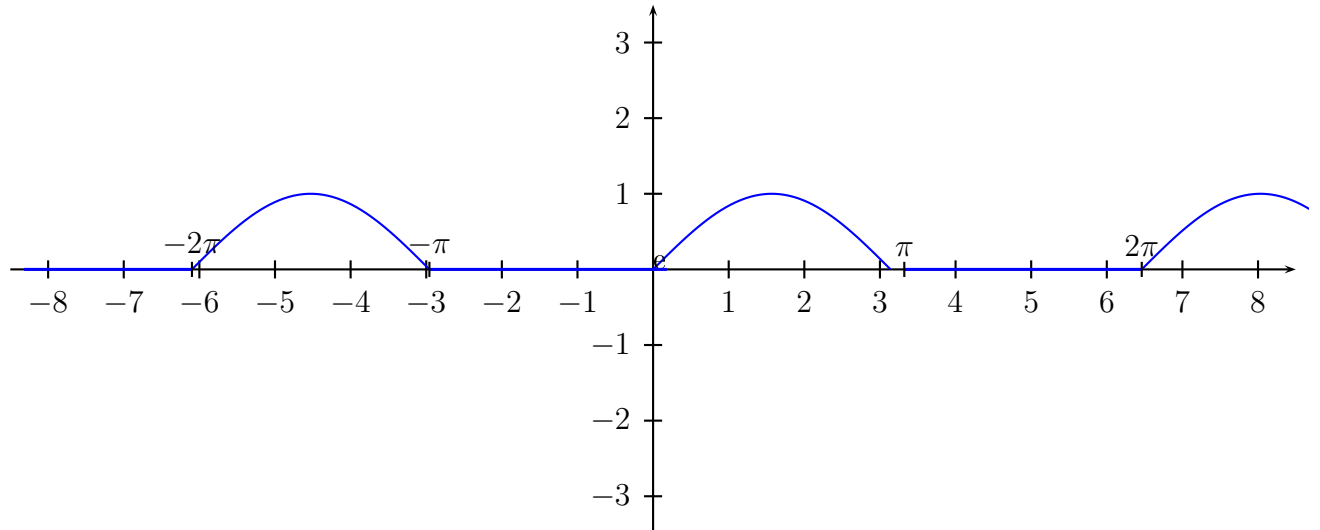
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch}^2(\lambda x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{ch}(2\lambda x) + 1}{2} dx = 1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi},$$

et donc $1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} = \frac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} + \frac{4\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2}{4\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)} \left(1 + \frac{\operatorname{sh}(2\lambda\pi)}{2\pi} - \frac{2\operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{\pi^2\lambda^2} \right) = \frac{2\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda \operatorname{sh}(2\lambda\pi) - 4\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{8\lambda^4 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

$$\forall \lambda > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\lambda^2+n^2)^2} = \frac{\pi^2\lambda^2 + \pi\lambda \operatorname{ch}(\lambda\pi) \operatorname{sh}(\lambda\pi) - 2\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}{4\lambda^2 \operatorname{sh}^2(\lambda\pi)}.$$

5. La fonction f est continue par morceaux sur \mathbb{R} et 2π -périodique. On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sup(\sin x, 0) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin((n+1)x) - \sin((n-1)x) dx \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(2x) dx & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos((n+1)x)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)x)}{n-1} \right]_0^{\pi} & \text{si } n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1} \right) & \text{si } n \neq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1 \\ -\frac{1+(-1)^n}{\pi} \frac{1}{n^2-1} & \text{si } n \neq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin(nx) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \neq 1 \end{cases}$$

La fonction f est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . D'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} . On en déduit que pour tout réel x

$$\sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos(nx) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^2-1} \cos(2px).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sup(\sin x, 0) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \cos(2nx).$$

L'égalité $f(0) = 0$ fournit $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = 0$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.$$

Remarque. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}$

Correction de l'exercice 3 ▲

1. (a) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Pour tout réel t , $a - \cos t \neq 0$ et

$$\frac{1}{a - \cos t} = \frac{2}{2a - e^{it} - e^{-it}} = \frac{-2e^{it}}{(e^{it})^2 - 2ae^{it} + 1}.$$

L'équation $z^2 - 2az + 1 = 0$ admet deux solutions non nulles inverses l'une de l'autre. On note b la solution de plus petit module de sorte que $|b| \leq 1$.

On ne peut avoir $|b| = 1$ car alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $b = e^{i\theta}$. On en déduit que $2a = b + \frac{1}{b} = 2\cos\theta \in [-2, 2]$ puis que $a \in [-1, 1]$ ce qui n'est pas. Donc $|b| \neq 1$. Plus précisément, puisque $|b| \leq |\frac{1}{b}|$, on a $|b| < 1$ et $|\frac{1}{b}|$. En particulier, $b \neq \frac{1}{b}$.

Ensuite, pour $|t| < |b|$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{a - \cos t} &= \frac{-2e^{it}}{(e^{it} - b)(e^{it} - \frac{1}{b})} = \frac{2}{\frac{1}{b} - b} \left(\frac{b}{e^{it} - b} - \frac{1/b}{e^{it} - \frac{1}{b}} \right) = \frac{2b}{1 - b^2} \left(\frac{be^{-it}}{1 - be^{-it}} + \frac{1}{1 - be^{it}} \right) \\ &= \frac{2b}{1 - b^2} \left(be^{-it} \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{-int} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int} \right) \quad (\text{car } |be^{it}| = |be^{-it}| = |b| < 1) \\ &= \frac{2b}{1 - b^2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^{n+1} e^{-i(n+1)t} + \sum_{n=0}^{+\infty} b^n e^{int} \right) = \frac{2b}{1 - b^2} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{int} + \sum_{n=1}^{+\infty} b^n e^{-int} \right) \\ &= \frac{2b}{1 - b^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt) \right). \end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \frac{1}{a - \cos t} = \frac{2b}{1 - b^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b^n \cos(nt) \right).$$

(b) Pour tout réel $t \in [-\pi, \pi]$ et tout entier naturel non nul n , on a $|b^n \cos(nt)| \leq |b|^n$. Comme la série numérique de terme général $|b|^n$ converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto b^n \cos(nt)$, $n \in \mathbb{N}$, converge normalement et donc uniformément sur le segment $[-\pi, \pi]$.

On sait alors que la série obtenue est la série de FOURIER de f .

2. Puisque la fonction f est paire, pour tout entier naturel n , $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt$. Donc, pour tout entier naturel n (y compris pour $n = 0$),

$$\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt = \frac{\pi a_n(f)}{2} = \frac{2b^{n+1}\pi}{1 - b^2}$$

Finalement,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{a - \cos t} dt = \frac{2b^{n+1}\pi}{1 - b^2}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction f est 2π -périodique, continue sur \mathbb{R} et de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} . Donc la série de FOURIER de f converge vers f sur \mathbb{R} d'après le théorème de DIRICHLET.

Puisque f est paire, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(\alpha x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n + \alpha)x) + \cos((n - \alpha)x)) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin((\alpha + n)x)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)x)}{\alpha - n} \right]_0^\pi \quad (\text{car } \alpha \notin \mathbb{Z}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((\alpha + n)\pi)}{\alpha + n} + \frac{\sin((\alpha - n)\pi)}{\alpha - n} \right) = (-1)^n \frac{2\alpha \sin(\alpha\pi)}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}, \forall x \in [-\pi, \pi], \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos(nx).$$

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

On prend $\alpha = z$ et $x = 0$ dans la formule précédente et on obtient $1 = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$ (*). Maintenant,

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) = 0 \Leftrightarrow e^{i\pi z} = e^{-i\pi z} \Leftrightarrow e^{2i\pi z} = 1 \Leftrightarrow 2i\pi z \in 2i\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}.$$

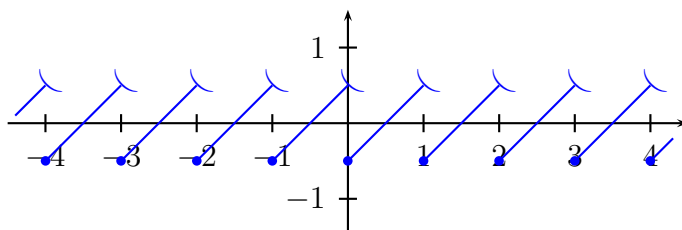
Puisque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\sin(\pi z) \neq 0$ et l'égalité (*) peut s'écrire $\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

De même, en prenant $\alpha = z$ et $x = \pi$, on obtient $\cos(\pi z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$ et donc $\pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$.

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2} \text{ et } \pi \cotan(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

La fonction f est 1-périodique, continue par morceaux sur \mathbb{R} . On peut donc calculer ses coefficients de FOURIER.



La fonction f a mêmes coefficients de FOURIER que la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ qui est impaire.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = 0$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} b_n(f) &= \frac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{1}\right) dt = \int_0^1 (2t-1) \sin(2n\pi t) dt \\ &= \left[-\frac{(2t-1) \cos(2n\pi t)}{2n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(2n\pi t) dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

La fonction f est de plus de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R} et d'après le théorème de DIRICHLET, en tout réel x , la série de FOURIER de f converge et a pour somme $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. En particulier,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, f(x) = x - E(x) - \frac{1}{2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{n\pi}.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} b_n(f_p) &= 2 \int_0^1 f(pt) \sin(2n\pi t) dt = 2 \int_0^p f(u) \sin\left(2n\pi \frac{u}{p}\right) \frac{du}{p} \\ &= \left[-\frac{(2t-1) \cos(2n\pi t)}{2n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(2n\pi t) dt = \left(-\frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{2n\pi} \right) + 0 \\ &= -\frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Remarque. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1] \setminus \left\{ \frac{k}{p}, k \in \llbracket 0, p \rrbracket \right\}$. Alors $px \notin \mathbb{Z}$ et donc

$$f_p(x) = f(px) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2np\pi x)}{n\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{k,p} \sin(2k\pi x)$$

où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $b_{k,p} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin p\mathbb{Z} \\ -\frac{1}{\frac{k}{p}\pi} & \text{si } k \in p\mathbb{Z} \end{cases}$ mais malheureusement, on ne peut pas récupérer ces coefficients car la série obtenue ne converge pas normalement.

$$\forall (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \int_0^1 f_p(x) f_q(x) dx = \frac{(\text{PGCD}(p, q))^2}{12pq}.$$
