



Espaces préhilbertiens

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Exercice 1 *** I Polynômes de LEGENDRE

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.
 - (a) Montrer que la famille $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(E, |)$.
 - (b) Déterminer $\|L_n\|$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de E .

[Correction ▼](#)

[005772]

Exercice 2 *** I

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2.
 - (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, préciser les coefficients de h_n . Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de E .
 - (b) Montrer que la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
 - (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|h_n\|$. En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien (E, φ) .

[Correction ▼](#)

[005773]

Exercice 3 ** I Polynômes de TCHEBYCHEV

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note T_n le n -ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .
2.
 - (a) Montrer que $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .
 - (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\|T_n\|$.

[Correction ▼](#)

[005774]

Exercice 4 ** I

On note E l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

1. Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
2. Pour $(u, v) \in E^2$, on pose $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E .

Exercice 5 * I

Soit Φ l'application qui à deux matrices carrées réelles A et B de format n associe $\text{Tr}(A \times B)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Est ce que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Correction ▼

[005776]

Exercice 6 ****

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼

[005777]

Exercice 7 **

Soit E un espace préhilbertien réel et (e_1, \dots, e_n) une famille de n vecteurs unitaires de E ($n \in \mathbb{N}^*$) telle que pour tout vecteur x de E , on ait $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$. Montrer que la famille (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E .

Correction ▼

[005778]

Exercice 8 ***

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, non nulle à valeurs réelles positives. Pour P et Q polynômes donnés, on pose $\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt$.

1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour Φ telle que, pour tout entier naturel n , $\deg(P_n) = n$.
3. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une telle base. Montrer que chaque polynôme P_n , $n \in \mathbb{N}^*$, a n racines réelles simples.

Correction ▼

[005779]

Exercice 9 *** I Matrices et déterminants de GRAM

Soit E un espace préhilbertien réel.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et (x_1, \dots, x_n) dans E^n , on pose $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ (matrice de GRAM) puis $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$ (déterminant de GRAM).

1. Montrer que $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.
2. Montrer que la famille (x_1, \dots, x_n) est liée si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$ et que la famille (x_1, \dots, x_n) est libre si et seulement si $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3. On suppose que la famille (x_1, \dots, x_n) est libre dans E . On pose $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Pour $x \in E$, on note $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F puis $d(x, F)$ la distance de x à F (c'est-à-dire $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$). Montrer que $d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$.

Correction ▼

[005780]

Correction de l'exercice 1 ▲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\ell_n = (X^2 - 1)^n$ de sorte que $L_n = \ell_n^{(n)}$. L_n est un polynôme de degré n car ℓ_n est de degré $2n$.

1. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in E$. Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^1 L_n(x)P(x) dx = \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n)}(x)P(x) dx = \left[(\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x) dx.$$

Maintenant, -1 et 1 sont racines d'ordre n du polynôme ℓ_n et donc, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, -1 et 1 sont racines d'ordre $n - k$ de $\ell_n^{(k)}$ et en particulier racines de $(\ell_n)^{(k)}$ pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Donc

$$(L_n|P) = - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x) dx.$$

Plus généralement, si pour un entier $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x) dx$ alors

$$\begin{aligned} (L_n|P) &= (-1)^k \left(\left[(\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k)}(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x) dx \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x) dx$. En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^1 \ell_n(x)P^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n P^{(n)}(x) dx / \text{quad}(*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour $n = 0$ et on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}[X], (L_n|P) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n P^{(n)}(x) dx.$$

Soient alors n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p < n$. Puisque $\deg(L_p) = p < n$, on a $(L_n|L_p) = 0$. On a montré que

$$\text{La famille } (L_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X], |).$$

(b) On applique maintenant la formule (*) dans le cas particulier $P = L_n$. On obtient

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n L_n^{(n)}(x) dx = 2 \times (2n)! \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2 \times (2n)! \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n (-\sin t) dt \\ &= 2 \times (2n)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = 2 \times (2n)! W_{2n+1} \text{ (intégrales de WALLIS)}. \end{aligned}$$

On « sait » que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3} W_1 = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!}$. On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n} n!^2}{(2n+1)!} \times 2 \times (2n)! = \frac{2^{2n+1} n!^2}{2n+1},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \frac{2^n n!}{2n+1}}.$$

On en déduit que la famille $\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} L_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $(\mathbb{R}[X], |)$. Pour

$n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

2. La famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de orthonormée de $\mathbb{R}[X]$. Chaque P_n , $n \in \mathbb{N}$, est de degré n et donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$ et de plus, pour $n \in \mathbb{N}$

$$P_n|X^n = \frac{1}{\text{dom}(P_n)} ((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\text{dom}(P_n)} (P_n|P_n)$$

car $P_n \in (P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = (1, X, \dots, X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Ceci montre que $P_n | X^n > 0$.

L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est la famille des polynômes de LENGENDRE

$$\left(\sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

- Soient P et Q deux polynômes. La fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et est négligeable en $+\infty$ devant $\frac{1}{t^2}$ d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et $\varphi(P, Q)$ existe dans \mathbb{R} .
 - La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P^2(t)e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Ainsi, la forme φ est définie et finalement

l'application φ est un produit scalaire sur E .

- Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$(X^n e^{-X})^{(n)} e^X = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^n)^{(n-k)} (e^{-X})^{(k)} \right) e^X = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} X^k.$$

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$ (et $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$) et on sait que

la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

- Soient $P \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A > 0$. Les deux fonctions $t \mapsto (t^n e^{-t})^{(n-1)}$ et P sont de classe C^1 sur le segment $[0, A]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t} dt = \int_0^A P(t)(t^n e^{-t})^{(n)} dt = [P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)} dt$$

Maintenant, $(t^n e^{-t})^{(n-1)}$ peut s'écrire $Q(t)e^{-t}$ où Q est un polynôme et donc $P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$ d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme Q a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction $t \mapsto P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$ s'annule en 0. En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)} dt.$$

De manière générale, pour $0 \leq k \leq n$, les remarques précédentes s'appliquent à la fonction $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}$ et par récurrence on obtient

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)} dt.$$

En particulier, pour $k = n$ on obtient $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt$. Cette égalité reste vraie quand $n = 0$ et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt.$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\deg(P) < n$, on a $P^{(n)} = 0$ et donc $\varphi(P, h_n) = 0$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(h_n) = n$, on en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\varphi(h_n, h_k) = 0$ et on a montré que

la famille $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\deg(h_n) = n$ et $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$, on a $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$. La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t) t^n e^{-t} dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \Gamma(n+1) = n!^2,$$

et donc $\|h_n\| = n!$. Par suite,

la famille $(\frac{1}{n!} h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthonormale de l'espace préhilbertien $(\mathbb{R}[X], \varphi)$.

Correction de l'exercice 3 ▲

1. • Soit $(P, Q) \in E^2$. L'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $] -1, 1[$. Ensuite, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$ est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand t tend vers 1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Puisque $\frac{1}{2} < 1$, on en déduit que l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand t tend vers -1, $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ et l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $] -1, 1[$ et $\varphi(P, Q)$ existe.
- La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $P \in E$,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) &= 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in] -1, 1[, \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in] -1, 1[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'application φ est définie et finalement

l'application φ est un produit scalaire sur E .

2. (a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. En posant $t = \cos \theta$, on obtient

$$\varphi(T_n, T_p) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{\pi}^0 \frac{T_n(\cos \theta)T_p(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta d\theta) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(p\theta) d\theta.$$

Si de plus, $n \neq p$,

$$\varphi(T_n, T_p) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (\cos((n+p)\theta) + \cos((n-p)\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p} \right]_0^{\pi} = 0.$$

Ainsi, la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. De plus, on sait que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et on a donc montré que

la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de l'espace préhilbertien (E, φ) .

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Quand $p = n$, la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\theta)) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons que E est un sous-espace de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$. La suite nulle est élément de E . Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$0 \leq (\lambda u + \mu v)^2 = \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu uv + \mu^2 v^2 \leq \lambda^2 u^2 + \lambda\mu(u^2 + v^2) + \mu^2 v^2 = (\lambda^2 + \lambda\mu)u^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général $(\lambda^2 + \lambda\mu)u_n^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v_n^2$ converge et on en déduit que la suite $\lambda u + \mu v$ est de carré sommable. On a montré que

E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$.

2. • Soient u et v deux éléments de E . Pour tout entier naturel n ,

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général $u_n v_n$ est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que $\varphi(u, v)$ existe dans \mathbb{R} .

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de φ sont claires. De plus, pour $u \in E$,

$$\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

En résumé, l'application φ est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

l'application φ est un produit scalaire sur E .

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$$\Phi(A, B) = \text{Tr}({}^t A \times B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

L'application Φ n'est autre que produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire. L'application Φ n'est pas un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par exemple, si $A = iE_{1,1} \neq 0$ alors ${}^t A A = -E_{1,1}$ puis $\text{Tr}({}^t A A) = -1 < 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

Soit N une norme sur E vérifiant $\forall (x, y) \in E^2 \quad (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$.

Il faut montrer que la norme N est associée à un produit scalaire B . Si B existe, B est nécessairement défini par

$$\forall (x, y) \in E^2, B(x, y) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Réciproquement,

• Pour tout $x \in E$, $B(x, x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))^2$ et donc $\forall x \in E$, $B(x, x) \geq 0$ puis $B(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. De plus, $\forall x \in E$, $N(x) = \sqrt{B(x, x)}$.

• $\forall (x, y) \in E^2$, $B(y, x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x, y)$.

• Vérifions alors que l'application B est bilinéaire.

1) Montrons que $\forall (x, y, z) \in E^3$, $B(x+y, z) + B(x-y, z) = 2B(x, z)$.

$$\begin{aligned} B(x+y, z) + B(x-y, z) &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2) \\ &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2 - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2)) \\ &= \frac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2 - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2)) \quad (\text{par hypothèse sur } N) \\ &= \frac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x, z). \end{aligned}$$

2) Montrons que $\forall (x, z) \in E^2, B(2x, z) = 2B(x, z)$. Tout d'abord, $B(0, z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$ puis d'après 1)

$$B(2x, z) = B(x + x, z) + B(x - x, z) = 2B(x, z).$$

3) Montrons que $\forall (x, y, z) \in E^3, B(x, z) + B(y, z) = B(x + y, z)$.

$$\begin{aligned} B(x, z) + B(y, z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\ &= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1)} \\ &= B(x + y, z) \text{ (d'après 2)}. \end{aligned}$$

4) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in E^2, B(nx, y) = nB(x, y)$.

• C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

• Soit $n \geq 0$. Supposons que $\forall (x, y) \in E^2, B(nx, y) = nB(x, y)$ et $B((n+1)x, y) = (n+1)B(x, y)$. Alors

$$B((n+2)x, y) + B(nx, y) = B((n+2)x + nx, y) = B(2(n+1)x, y) = 2B((n+1)x, y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence, $B((n+2)x, y) = 2(n+1)B(x, y) - nB(x, y) = (n+2)B(x, y)$.

5) Montrons que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall (x, y) \in E^2, B(nx, y) = nB(x, y)$. Le résultat est acquis pour $n \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B(nx, y) + B(-nx, y) = B(0, y) = 0 \text{ et donc } B(-nx, y) = -B(nx, y) = -nB(x, y),$$

6) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in E^2, B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x, y)$.

$$B(x, y) = B\left(\frac{1}{n}nx, y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x, y\right) \text{ et donc } B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x, y).$$

7) Montrons que $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall (x, y) \in E^2, B(rx, y) = rB(x, y)$. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ puis $r = \frac{p}{q}$.

$$B(rx, y) = B\left(\frac{p}{q}x, y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}B(x, y) = rB(x, y).$$

8) Montrons que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$. Soit λ un réel. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , il existe une

suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de limite λ .

Maintenant, l'application $N : (E, N) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$ est continue sur E car 1-Lipschitzienne sur E . Donc

$$x \mapsto N(x)$$

$$B(\lambda x, y) = B(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} B(r_n x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n B(x, y) = \lambda B(x, y).$$

Finalement, l'application B est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{B(x, x)}$, N est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j \geq 1} (e_i | e_j)^2 = 1 + \sum_{j \neq i} (e_i | e_j)^2$$

et donc $\sum_{j \neq i} (e_i | e_j)^2 = 0$. On en déduit que $\forall j \neq i, (e_i | e_j) = 0$. Ainsi, pour tout couple d'indices (i, j) tel que $i \neq j$, on a $e_i | e_j = 0$. Par suite

la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors $F = E$.

Soit x un vecteur de E . F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F . On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)e_i.$$

On en déduit que $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 = \|x\|^2$. D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc $x = p_F(x)$ ce qui montre que $x \in F$. Donc $F = E$ et finalement

la famille $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E .

Correction de l'exercice 8 ▲

1. L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} \Phi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t)P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], f(t)P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}. \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction f est continue, positive sur $[0, 1]$ et n'est pas nulle. Donc la fonction f est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment $[0, 1]$. Par suite, le polynôme P a une infinité de racines et finalement $P = 0$.

L'application Φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. L'orthonormalisée de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$ répond à la question.

3. Soit n un entier naturel non nul. Le polynôme $P_n \in (P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$. Soit p le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme P_n . Soient a_1, \dots, a_p ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où $p \geq 1$. Si $p \geq 1$, on pose $Q = (X - a_1) \dots (X - a_p)$ et si $p = 0$, on pose $Q = 1$.

Si $p < n$, le polynôme Q est orthogonal à P_n car de degré strictement plus petit que le degré de P_n . D'autre part, au vu de la définition de Q , la fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est continue sur $[0, 1]$, de signe constant sur $[0, 1]$, d'intégrale nulle sur $[0, 1]$. La fonction $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$ est donc nulle. On en déduit que le polynôme P_n est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc $p = n$ ce qui signifie que le polynôme P_n a n racines réelles simples.

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m = \dim F$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base orthonormée de F puis M la matrice de la famille $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans la base \mathcal{B} . M est une matrice rectangulaire de format (m, n) .

Soit $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Puisque la base \mathcal{B} est orthonormée, le coefficient ligne i , colonne j de la matrice tMM est

$$\sum_{k=1}^m m_{k,i}m_{k,j} = (x_i|x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^tMM.$$

Puisque $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}M$, il s'agit de vérifier que $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$. Pour cela, montrons que les matrices M et tMM ont même noyau.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$ et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement, $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$ et donc, d'après le théorème du rang, $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n))$.

$$\text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$$

2. D'après 1),

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) < n \Leftrightarrow \text{rg}G(x_1, x_2, \dots, x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

De plus, quand la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) libre, avec les notations de la question 1), on a $m = n$ et la matrice M est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} &\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0. \end{aligned}$$

3. **1ère solution.** Soit x un vecteur de E et $p_F(x)$ son projeté orthogonal sur F . Dans la première colonne de $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$, le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque $x - p_F(x) \in F^\perp$)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les $(x|x_i)$ par $(p_F(x)|x_i)$, on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maintenant, $p_F(x)$ est dans F et donc la famille $(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$ est liée puis d'après la question 2) $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. Il reste $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$ et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E, \gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Finalement

$$\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)}}.$$

2ème solution. Posons $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ puis $d = \|x - p_F(x)\|$ de sorte que

$$d^2 = (x - p_F(x))|(x - p_F(x)) = (x - p_F(x))|x = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x|x_i = (x - p_F(x)|x_i) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$. Par suite, les $n + 1$ réels $d^2, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont solutions du système d'équations linéaires

$$\left\{ \begin{array}{l} d^2 + \lambda_1(x|x_1) + \dots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ \lambda_1(x_1|x_1) + \dots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ \vdots \\ \lambda_1(x_n|x_1) + \dots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système vaut $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à d^2 est $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$ et les formules de CRAMER fournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}.$$
