



## Espaces préhilbertiens

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile   \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable

### Exercice 1 \*\*\* I Polynômes de LEGENDRE

---

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . On munit  $E$  du produit scalaire  $P|Q = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ .

- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .
  - Montrer que la famille  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de l'espace préhilbertien  $(E, |)$ .
  - Déterminer  $\|L_n\|$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .
- Déterminer l'orthonormalisée de SCHMIDT de la base canonique de  $E$ .

[Correction ▼](#)

[005772]

### Exercice 2 \*\*\* I

---

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $h_n = (X^n e^{-X})^{(n)} e^X$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , préciser les coefficients de  $h_n$ . Montrer que la famille  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $E$ .
  - Montrer que la famille  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de l'espace préhilbertien  $(E, \varphi)$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $\|h_n\|$ . En déduire une base orthonormée de l'espace préhilbertien  $(E, \varphi)$ .

[Correction ▼](#)

[005773]

### Exercice 3 \*\* I Polynômes de TCHEBYCHEV

---

Soit  $E = \mathbb{R}[X]$ . Pour  $(P, Q) \in E^2$ , on pose  $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $T_n$  le  $n$ -ème polynôme de TCHEBYCHEV de première espèce c'est-à-dire l'unique polynôme tel que  $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

- Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- Montrer que  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de l'espace préhilbertien  $(E, \varphi)$ .
  - Pour  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer  $\|T_n\|$ .

[Correction ▼](#)

[005774]

### Exercice 4 \*\* I

---

On note  $E$  l'ensemble des suites réelles de carrés sommables c'est-dire les suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty.$$

- Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2. Pour  $(u, v) \in E^2$ , on pose  $\varphi(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ . Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Correction ▼

[005775]

### Exercice 5 \* I

Soit  $\Phi$  l'application qui à deux matrices carrées réelles  $A$  et  $B$  de format  $n$  associe  $\text{Tr}(A \times B)$ . Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Est ce que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

Correction ▼

[005776]

### Exercice 6 \*\*\*\*

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une norme, notée  $\| \cdot \|$ , vérifiant l'identité du parallélogramme. Montrer que cette norme est hilbertienne.

Correction ▼

[005777]

### Exercice 7 \*\*

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille de  $n$  vecteurs unitaires de  $E$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) telle que pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , on ait  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n (x|e_k)^2$ . Montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

Correction ▼

[005778]

### Exercice 8 \*\*\*

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , non nulle à valeurs réelles positives. Pour  $P$  et  $Q$  polynômes donnés, on pose  $\Phi(P, Q) = \int_0^1 f(t)P(t)Q(t) dt$ .

1. Montrer que  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .
2. Montrer qu'il existe une base orthonormale  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour  $\Phi$  telle que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\deg(P_n) = n$ .
3. Soit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une telle base. Montrer que chaque polynôme  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , a  $n$  racines réelles simples.

Correction ▼

[005779]

### Exercice 9 \*\*\* I Matrices et déterminants de GRAM

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $E^n$ , on pose  $G(x_1, \dots, x_n) = (x_i|x_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  (matrice de GRAM) puis  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n))$  (déterminant de GRAM).

1. Montrer que  $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n)$ .
2. Montrer que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est liée si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) = 0$  et que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre si et seulement si  $\gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$ .
3. On suppose que la famille  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre dans  $E$ . On pose  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ . Pour  $x \in E$ , on note  $p_F(x)$  la projection orthogonale de  $x$  sur  $F$  puis  $d(x, F)$  la distance de  $x$  à  $F$  (c'est-à-dire  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|^2$ ). Montrer que  $d(x, F) = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}}$ .

Correction ▼

[005780]

## Correction de l'exercice 1 ▲

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Posons  $\ell_n = (X^2 - 1)^n$  de sorte que  $L_n = \ell_n^{(n)}$ .  $L_n$  est un polynôme de degré  $n$  car  $\ell_n$  est de degré  $2n$ .

1. (a) Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $P \in E$ . Une intégration par parties fournit

$$(L_n|P) = \int_{-1}^1 L_n(x)P(x) dx = \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n)}(x)P(x) dx = \left[ (\ell_n)^{(n-1)}(x)P(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x) dx.$$

Maintenant,  $-1$  et  $1$  sont racines d'ordre  $n$  du polynôme  $\ell_n$  et donc, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $-1$  et  $1$  sont racines d'ordre  $n - k$  de  $\ell_n^{(k)}$  et en particulier racines de  $(\ell_n)^{(k)}$  pour  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ . Donc

$$(L_n|P) = - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-1)}(x)P'(x) dx.$$

Plus généralement, si pour un entier  $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ ,  $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x) dx$  alors

$$\begin{aligned} (L_n|P) &= (-1)^k \left( \left[ (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k)}(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x) dx \right) \\ &= (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k-1)}(x)P^{(k+1)}(x) dx. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $(L_n|P) = (-1)^k \int_{-1}^1 (\ell_n)^{(n-k)}(x)P^{(k)}(x) dx$ . En particulier

$$(L_n|P) = (-1)^n \int_{-1}^1 \ell_n(x)P^{(n)}(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n P^{(n)}(x) dx / \text{quad}(*).$$

Cette dernière égalité reste vraie pour  $n = 0$  et on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \mathbb{R}[X], (L_n|P) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n P^{(n)}(x) dx.$$

Soient alors  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $0 \leq p < n$ . Puisque  $\deg(L_p) = p < n$ , on a  $(L_n|L_p) = 0$ . On a montré que

$$\text{La famille } (L_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base orthogonale de l'espace } (\mathbb{R}[X], |).$$

(b) On applique maintenant la formule (\*) dans le cas particulier  $P = L_n$ . On obtient

$$\begin{aligned} \|L_n\|^2 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n L_n^{(n)}(x) dx = 2 \times (2n)! \int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2 \times (2n)! \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n (-\sin t) dt \\ &= 2 \times (2n)! \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t dt = 2 \times (2n)! W_{2n+1} \text{ (intégrales de WALLIS)}. \end{aligned}$$

On sait que  $\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \dots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \dots \times 3} W_1 = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!}$ . On obtient alors

$$\|L_n\|^2 = \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} \times 2 \times (2n)! = \frac{2^{2n+1} n!}{2n+1},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1} \frac{2^n n!}{2n+1}}.$$

On en déduit que la famille  $\left( \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} L_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de  $(\mathbb{R}[X], |)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $P_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$ .

2. La famille  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de orthonormée de  $\mathbb{R}[X]$ . Chaque  $P_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est de degré  $n$  et donc,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Vect}(P_0, \dots, P_n) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$  et de plus, pour  $n \in \mathbb{N}$

$$P_n|X^n = \frac{1}{\text{dom}}((P_n)|\text{dom}(P_n)X^n) = \frac{1}{\text{dom}(P_n)}(P_n|P_n)$$

car  $P_n \in (P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = (1, X, \dots, X^{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ . Ceci montre que  $P_n|X^n > 0$ .

L'orthonormalisée de la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$  est la famille des polynômes de LENGENDRE

$$\left( \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

## Correction de l'exercice 2 ▲

1. • Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes. La fonction  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et est négligeable en  $+\infty$  devant  $\frac{1}{t^2}$  d'après un théorème de croissances comparées. Donc la fonction  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et  $\varphi(P, Q)$  existe dans  $\mathbb{R}$ .
- La symétrie, la bilinéarité et la positivité de l'application  $\varphi$  sont claires. De plus, pour  $P \in E$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P^2(t)e^{-t} = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, +\infty[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines)}. \end{aligned}$$

Ainsi, la forme  $\varphi$  est définie et finalement

l'application  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La formule de LEIBNIZ permet d'écrire

$$(X^n e^{-X})^{(n)} e^X = \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X^n)^{(n-k)} (e^{-X})^{(k)} \right) e^X = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} X^k.$$

En particulier,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{deg}(h_n) = n$  (et  $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$ ) et on sait que

la famille  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{R}[X]$ .

- (b) Soient  $P \in E$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A > 0$ . Les deux fonctions  $t \mapsto (t^n e^{-t})^{(n-1)}$  et  $P$  sont de classe  $C^1$  sur le segment  $[0, A]$ . On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^A P(t)h_n(t)e^{-t} dt = \int_0^A P(t)(t^n e^{-t})^{(n)} dt = [P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}]_0^A - \int_0^A P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)} dt$$

Maintenant,  $(t^n e^{-t})^{(n-1)}$  peut s'écrire  $Q(t)e^{-t}$  où  $Q$  est un polynôme et donc  $P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  d'après un théorème de croissances comparées. D'autre part, la formule de LEIBNIZ montre que le polynôme  $Q$  a une valuation au moins égale à 1. On en déduit que la fonction  $t \mapsto P(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)}(t)$  s'annule en 0. En faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = - \int_0^{+\infty} P'(t)(t^n e^{-t})^{(n-1)} dt.$$

De manière générale, pour  $0 \leq k \leq n$ , les remarques précédentes s'appliquent à la fonction  $t \mapsto P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)}$  et par récurrence on obtient

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^k \int_0^{+\infty} P^{(k)}(t)(t^n e^{-t})^{(n-k)} dt.$$

En particulier, pour  $k = n$  on obtient  $\int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt$ . Cette égalité reste vraie quand  $n = 0$  et on a montré que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall n \in \mathbb{N}, \varphi(P, h_n) = \int_0^{+\infty} P(t)h_n(t)e^{-t} dt = (-1)^n \int_0^{+\infty} P^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt.$$

En particulier, si  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\deg(P) < n$ , on a  $P^{(n)} = 0$  et donc  $\varphi(P, h_n) = 0$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $h_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ . Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(h_n) = n$ , on en déduit en particulier que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\varphi(h_n, h_k) = 0$  et on a montré que

la famille  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de l'espace préhilbertien  $(\mathbb{R}[X], \varphi)$ .

(c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $\deg(h_n) = n$  et  $\text{dom}(h_n) = (-1)^n$ , on a  $h_n^{(n)} = (-1)^n n!$ . La question précédente fournit alors

$$\|h_n\|^2 = (-1)^n \int_0^{+\infty} h_n^{(n)}(t)t^n e^{-t} dt = n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n! \Gamma(n+1) = n!^2,$$

et donc  $\|h_n\| = n!$ . Par suite,

la famille  $(\frac{1}{n!}h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthonormale de l'espace préhilbertien  $(\mathbb{R}[X], \varphi)$ .

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. • Soit  $(P, Q) \in E^2$ . L'application  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est continue sur  $] -1, 1[$ . Ensuite, l'application  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}}$  est bornée au voisinage de 1 car continue en 1 et donc quand  $t$  tend vers 1,  $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1+t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-t}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ . Puisque  $\frac{1}{2} < 1$ , on en déduit que l'application  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur un voisinage de 1 à gauche. De même, quand  $t$  tend vers -1,  $\frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$  et l'application  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur un voisinage de -1 à droite. Finalement, l'application  $t \mapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$  et  $\varphi(P, Q)$  existe.

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de  $\varphi$  sont claires. De plus, pour  $P \in E$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in ] -1, 1[, \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \text{ (fonction continue, positive, d'intégrale nulle)} \\ &\Rightarrow \forall t \in ] -1, 1[, P(t) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ (polynôme ayant une infinité de racines).} \end{aligned}$$

Ainsi, l'application  $\varphi$  est définie et finalement

l'application  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

2. (a) Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . En posant  $t = \cos \theta$ , on obtient

$$\varphi(T_n, T_p) = \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)T_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_\pi^0 \frac{T_n(\cos \theta)T_p(\cos \theta)}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} (-\sin \theta d\theta) = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(p\theta) d\theta.$$

Si de plus,  $n \neq p$ ,

$$\varphi(T_n, T_p) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\cos((n+p)\theta) + \cos((n-p)\theta)) d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p} + \frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p} \right]_0^\pi = 0.$$

Ainsi, la famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale. De plus, on sait que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg(T_n) = n$  et on a donc montré que

la famille  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base orthogonale de l'espace préhilbertien  $(E, \varphi)$ .

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Quand  $p = n$ , la formule précédente fournit

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2n\theta)) d\theta = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases},$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}.$$

### Correction de l'exercice 4 ▲

1. Montrons que  $E$  est un sous-espace de  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ . La suite nulle est élément de  $E$ . Soient  $(u, v) \in E^2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

$$0 \leq (\lambda u + \mu v)^2 = \lambda^2 u^2 + 2\lambda\mu uv + \mu^2 v^2 \leq \lambda^2 u^2 + \lambda\mu(u^2 + v^2) + \mu^2 v^2 = (\lambda^2 + \lambda\mu)u^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v^2.$$

Par hypothèse, la série de terme général  $(\lambda^2 + \lambda\mu)u_n^2 + (\lambda\mu + \mu^2)v_n^2$  converge et on en déduit que la suite  $\lambda u + \mu v$  est de carré sommable. On a montré que

$E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ .

2. • Soient  $u$  et  $v$  deux éléments de  $E$ . Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Ainsi, la série de terme général  $u_n v_n$  est absolument convergente et donc convergente. Ceci montre que  $\varphi(u, v)$  existe dans  $\mathbb{R}$ .

• La symétrie, la bilinéarité et la positivité de  $\varphi$  sont claires. De plus, pour  $u \in E$ ,

$$\varphi(u, u) = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = 0 \Rightarrow u = 0.$$

En résumé, l'application  $\varphi$  est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive et donc

l'application  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $E$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$ .

$$\Phi(A, B) = \text{Tr}({}^t A \times B) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

L'application  $\Phi$  n'est autre que produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et en particulier est un produit scalaire. La base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (constituée des matrices élémentaires) est orthonormée pour ce produit scalaire. L'application  $\Phi$  n'est pas un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Par exemple, si  $A = iE_{1,1} \neq 0$  alors  ${}^tAA = -E_{1,1}$  puis  $\text{Tr}({}^tAA) = -1 < 0$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

Soit  $N$  une norme sur  $E$  vérifiant  $\forall(x,y) \in E^2, (N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2((N(x))^2 + (N(y))^2)$ .

Il faut montrer que la norme  $N$  est associée à un produit scalaire  $B$ . Si  $B$  existe,  $B$  est nécessairement défini par

$$\forall(x,y) \in E^2, B(x,y) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2).$$

Réciproquement,

• Pour tout  $x \in E, B(x,x) = \frac{1}{4}((N(2x))^2 - (N(0))^2) = \frac{1}{4}(4(N(x))^2 - 0) = (N(x))^2$  et donc  $\forall x \in E, B(x,x) \geq 0$  puis  $B(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . De plus,  $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{B(x,x)}$ .

•  $\forall(x,y) \in E^2, B(y,x) = \frac{1}{4}((N(y+x))^2 - (N(y-x))^2) = \frac{1}{4}((N(x+y))^2 - (N(x-y))^2) = B(x,y)$ .

• Vérifions alors que l'application  $B$  est bilinéaire.

1) Montrons que  $\forall(x,y,z) \in E^3, B(x+y,z) + B(x-y,z) = 2B(x,z)$ .

$$\begin{aligned} B(x+y,z) + B(x-y,z) &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 - (N(x+y-z))^2 + (N(x-y+z))^2 - (N(x-y-z))^2) \\ &= \frac{1}{4}((N(x+y+z))^2 + (N(x-y+z))^2 - ((N(x+y-z))^2 + (N(x-y-z))^2)) \\ &= \frac{1}{4}(2(N(x+z))^2 + (N(y))^2 - 2((N(x-z))^2 + (N(y))^2)) \text{ (par hypothèse sur } N) \\ &= \frac{2}{4}((N(x+z))^2 - (N(x-z))^2) = 2B(x,z). \end{aligned}$$

2) Montrons que  $\forall(x,z) \in E^2, B(2x,z) = 2B(x,z)$ . Tout d'abord,  $B(0,z) = \frac{1}{4}((N(z))^2 - (N(-z))^2) = 0$  puis d'après 1)

$$B(2x,z) = B(x+x,z) + B(x-x,z) = 2B(x,z).$$

3) Montrons que  $\forall(x,y,z) \in E^3, B(x,z) + B(y,z) = B(x+y,z)$ .

$$\begin{aligned} B(x,z) + B(y,z) &= B\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, z\right) + B\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}, z\right) \\ &= 2B\left(\frac{x+y}{2}, z\right) \text{ (d'après 1))} \\ &= B(x+y,z) \text{ (d'après 2)).} \end{aligned}$$

4) Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall(x,y) \in E^2, B(nx,y) = nB(x,y)$ .

• C'est vrai pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

• Soit  $n \geq 0$ . Supposons que  $\forall(x,y) \in E^2, B(nx,y) = nB(x,y)$  et  $B((n+1)x,y) = (n+1)B(x,y)$ . Alors

$$B((n+2)x,y) + B(nx,y) = B((n+2)x+nx,y) = B(2(n+1)x,y) = 2B((n+1)x,y),$$

et donc, par hypothèse de récurrence,  $B((n+2)x,y) = 2(n+1)B(x,y) - nB(x,y) = (n+2)B(x,y)$ .

5) Montrons que  $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall(x,y) \in E^2, B(nx,y) = nB(x,y)$ . Le résultat est acquis pour  $n \geq 0$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$B(nx,y) + B(-nx,y) = B(0,y) = 0 \text{ et donc } B(-nx,y) = -B(nx,y) = -nB(x,y),$$

6) Montrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall(x,y) \in E^2, B\left(\frac{1}{n}x,y\right) = \frac{1}{n}B(x,y)$ .

$$B(x, y) = B\left(\frac{1}{n}nx, y\right) = nB\left(\frac{1}{n}x, y\right) \text{ et donc } B\left(\frac{1}{n}x, y\right) = \frac{1}{n}B(x, y).$$

7) Montrons que  $\forall r \in \mathbb{Q}, \forall (x, y) \in E^2, B(rx, y) = rB(x, y)$ . Soient  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  puis  $r = \frac{p}{q}$ .

$$B(rx, y) = B\left(\frac{p}{q}x, y\right) = pB\left(\frac{1}{q}x, y\right) = \frac{p}{q}B(x, y) = rB(x, y).$$

8) Montrons que  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, B(\lambda x, y) = \lambda B(x, y)$ . Soit  $\lambda$  un réel. Puisque  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ , il existe une

suite de rationnels  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente de limite  $\lambda$ .

Maintenant, l'application  $N : (E, N) \rightarrow (\mathbb{R}, | \cdot |)$  est continue sur  $E$  car 1-Lipschitzienne sur  $E$ . Donc

$$x \mapsto N(x)$$

$$B(\lambda x, y) = B(\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} B(r_n x, y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n B(x, y) = \lambda B(x, y).$$

Finalement, l'application  $B$  est une forme bilinéaire symétrique définie positive et donc un produit scalaire. Puisque  $\forall x \in E, N(x) = \sqrt{B(x, x)}$ ,  $N$  est la norme associée à ce produit scalaire. On a montré que

toute norme vérifiant l'identité du parallélogramme est une norme hilbertienne.

### Correction de l'exercice 7 ▲

Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

$$1 = \|e_i\|^2 = \sum_{j \geq 1} (e_i | e_j)^2 = 1 + \sum_{j \neq i} (e_i | e_j)^2$$

et donc  $\sum_{j \neq i} (e_i | e_j)^2 = 0$ . On en déduit que  $\forall j \neq i, (e_i | e_j) = 0$ . Ainsi, pour tout couple d'indices  $(i, j)$  tel que  $i \neq j$ , on a  $e_i | e_j = 0$ . Par suite

la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille orthonormale.

Il reste à vérifier que si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  alors  $F = E$ .

Soit  $x$  un vecteur de  $E$ .  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie. On peut donc définir le projeté orthogonal  $p_F(x)$  de  $x$  sur  $F$ . On sait que

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n (x | e_i) e_i.$$

On en déduit que  $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2 = \|x\|^2$ . D'après le théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0,$$

et donc  $x = p_F(x)$  ce qui montre que  $x \in F$ . Donc  $F = E$  et finalement

la famille  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est une base orthonormée de  $E$ .

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. L'existence, la bilinéarité, la symétrie et la positivité sont immédiates. Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ .

$$\begin{aligned} \Phi(P, P) = 0 &\Rightarrow \int_0^1 f(t) P^2(t) dt = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in [0, 1], f(t) P^2(t) = 0 \text{ (fonction continue positive d'intégrale nulle)}. \end{aligned}$$

Maintenant, la fonction  $f$  est continue, positive sur  $[0, 1]$  et n'est pas nulle. Donc la fonction  $f$  est strictement positive sur un intervalle ouvert non vide inclus dans le segment  $[0, 1]$ . Par suite, le polynôme  $P$  a une infinité de racines et finalement  $P = 0$ .



L'application  $\Phi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

2. L'orthonormalisée de la base canonique de  $\mathbb{R}[X]$  répond à la question.
3. Soit  $n$  un entier naturel non nul. Le polynôme  $P_n \in (P_0, \dots, P_{n-1})^\perp = (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ . Soit  $p$  le nombre de racines réelles d'ordre impair du polynôme  $P_n$ . Soient  $a_1, \dots, a_p$  ces racines (deux à deux distinctes, réelles et d'ordre impair) dans le cas où  $p \geq 1$ . Si  $p \geq 1$ , on pose  $Q = (X - a_1) \dots (X - a_p)$  et si  $p = 0$ , on pose  $Q = 1$ .

Si  $p < n$ , le polynôme  $Q$  est orthogonal à  $P_n$  car de degré strictement plus petit que le degré de  $P_n$ . D'autre part, au vu de la définition de  $Q$ , la fonction  $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$  est continue sur  $[0, 1]$ , de signe constant sur  $[0, 1]$ , d'intégrale nulle sur  $[0, 1]$ . La fonction  $t \mapsto f(t)P_n(t)Q(t)$  est donc nulle. On en déduit que le polynôme  $P_n$  est le polynôme nul ce qui n'est pas. Donc  $p = n$  ce qui signifie que le polynôme  $P_n$  a  $n$  racines réelles simples.

### Correction de l'exercice 9 ▲

1. Soit  $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  et  $m = \dim F$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq m}$  une base orthonormée de  $F$  puis  $M$  la matrice de la famille  $(x_j)_{1 \leq j \leq n}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .  $M$  est une matrice rectangulaire de format  $(m, n)$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . Puisque la base  $\mathcal{B}$  est orthonormée, le coefficient ligne  $i$ , colonne  $j$  de la matrice  ${}^tMM$  est

$$\sum_{k=1}^m m_{k,i} m_{k,j} = (x_i | x_j),$$

et on a donc

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = {}^tMM.$$

Puisque  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}M$ , il s'agit de vérifier que  $\text{rg}({}^tMM) = \text{rg}M$ . Pour cela, montrons que les matrices  $M$  et  ${}^tMM$  ont même noyau.

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .  $X \in \text{Ker}M \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}({}^tMM)$  et aussi

$$X \in \text{Ker}({}^tMM) \Rightarrow {}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^tX{}^tMMX = 0 \Rightarrow {}^t(MX)MX = 0 \Rightarrow \|MX\|_2^2 = 0 \Rightarrow MX = 0 \Rightarrow X \in \text{Ker}M.$$

Finalement,  $\text{Ker}({}^tMM) = \text{Ker}M$  et donc, d'après le théorème du rang,  $\text{rg}(x_1, \dots, x_n) = \text{rg}M = \text{rg}({}^tMM) = \text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n))$ .

$\text{rg}(G(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_n).$

2. D'après 1),

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_n) < \Leftrightarrow \text{rg}G(x_1, x_2, \dots, x_n) < n \Leftrightarrow G(x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

De plus, quand la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  libre, avec les notations de la question 1), on a  $m = n$  et la matrice  $M$  est une matrice carrée. On peut donc écrire

$$\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det({}^tMM) = \det({}^tM) \times \det(M) = (\det M)^2 > 0.$$

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_n) \text{ liée} &\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ (x_1, \dots, x_n) \text{ libre} &\Leftrightarrow \gamma(x_1, \dots, x_n) > 0. \end{aligned}$$

3. **1ère solution.** Soit  $x$  un vecteur de  $E$  et  $p_F(x)$  son projeté orthogonal sur  $F$ . Dans la première colonne de  $\gamma(x, x_1, \dots, x_n)$ , le théorème de PYTHAGORE permet d'écrire (puisque  $x - p_F(x) \in F^\perp$ )

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} (x|x) \\ (x|x_1) \\ \vdots \\ (x|x_n) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (x - p_F(x) + p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \|x - p_F(x)\|^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (p_F(x)|p_F(x)) \\ (p_F(x)|x_1) \\ \vdots \\ (p_F(x)|x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après avoir remplacé aussi en première ligne les  $(x|x_i)$  par  $(p_F(x)|x_i)$ , on obtient par linéarité par rapport à la première colonne

$$\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) + \gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Maintenant,  $p_F(x)$  est dans  $F$  et donc la famille  $(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée puis d'après la question 2)  $\gamma(p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Il reste  $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n)$  et en développant suivant la première colonne, on obtient

$$\forall x \in E, \gamma(x, x_1, \dots, x_n) = \gamma(x - p_F(x), x_1, x_2, \dots, x_n) = \|x - p_F(x)\|^2 \gamma(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Finalement

$$\|x - p_F(x)\| = \sqrt{\frac{\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n)}}.$$

**2ème solution.** Posons  $p_F(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  puis  $d = \|x - p_F(x)\|$  de sorte que

$$d^2 = (x - p_F(x)|(x - p_F(x))) = (x - p_F(x)|x) = \|x\|^2 - (x|p_F(x)).$$

D'autre part, pour chaque  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(x|x_i) = (x - p_F(x)|x_i) + (p_F(x)|x_i) = (p_F(x)|x_i)$ . Par suite, les  $n + 1$  réels  $d^2, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} d^2 + \lambda_1(x|x_1) + \dots + \lambda_n(x|x_n) = \|x\|^2 \\ \lambda_1(x_1|x_1) + \dots + \lambda_n(x_1|x_n) = (x|x_1) \\ \vdots \\ \lambda_1(x_n|x_1) + \dots + \lambda_n(x_n|x_n) = (x|x_n) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut  $\gamma(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$  et le système est de CRAMER. Le déterminant associé à  $d^2$  est  $\gamma(x, x_1, x_2, \dots, x_n)$  et les formules de CRAMER fournissent

$$d^2 = \frac{\gamma(x, x_1, \dots, x_n)}{\gamma(x_1, \dots, x_n)}.$$