Suites et séries d'intégrales

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile
I : Incontournable

Exercice 1 ** I

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0, \sqrt{n}] \\ 0 \text{ si } x > \sqrt{n} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$.
2. A l'aide de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, calculer l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Correction ▼ [005738]

Exercice 2 **

Montrer que $\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\int_0^1 x^x\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$.

Correction ▼ [005739]

Exercice 3 **

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\, dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005740]

Exercice 4 **

Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\, dx$ en écrivant cette intégrale comme somme d'une série.

Correction ▼ [005741]

Exercice 5 **

Calculer $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$.

Correction ▼ [005742]

Exercice 6 **

1. Montrer que pour x réel de $[0, 1[$, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.
2. Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Correction ▼ [005743]

Exercice 7 *** I

Montrer que pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\, dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$

Correction ▼ [005744]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $x \in [0,+\infty[$. Pour $n > x^2$, $f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)\right)$ et donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} \exp(-x^2+o(1))$. Donc la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f\ :\ x \mapsto e^{-x^2}$.
2. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$ et nulle au voisinage de $+\infty$. Donc chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $[0,+\infty[$.
La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. Donc la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par convexité de la fonction exponentielle, $\forall u \in \mathbb{R}$, $1+u \leqslant e^u$. Par suite, $\forall x \in [0,\sqrt{n}]$, $0 \leqslant 1-\frac{x^2}{n} \leqslant e^{-x^2/n}$ puis par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur $\mathbb{R}^+$, $0 \leqslant f_n(x) = \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} = f(x)$.
D'autre part, pour $x > \sqrt{n}$, $f_n(x) = 0 \leqslant f(x)$. Finalement
$$.\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ |f_n(x)| \leqslant f(x).$$
En résumé,
• chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$,
• la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f sur $[0,+\infty[$ et la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$.
• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n| \leqslant f$, la fonction f étant intégrable sur $[0,+\infty[$.
D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. Ainsi,
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx.$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$ et donc $\frac{x^2}{n} = \cos^2 t$ et $dx = -\sqrt{n}\sin t\,dt$, on obtient
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n\,dx = \int_{\pi/2}^0 (1-\cos^2 t)^n \times (-\sqrt{n}\sin t)\,dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \sqrt{n}W_{2n+1},$$
où W_n est la n-ème intégrale de Wallis. Classiquement, $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ (voir Exercices Maths Sup) et donc
$$\frac{W_{2n+1}}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$
On a montré que
$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ et donc $\lim_{x\to0^+} x^{-x} = 1$. Donc si on pose $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \begin{cases} x^{-x} \text{ si } x \in]0,1] \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$, f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et donc intégrable sur le segment $[0,1]$.
Pour $x \in]0,1]$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!}$. Posons alors $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$, $f_n(x) = \begin{cases} \frac{(-x\ln(x))^n}{n!} \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction f_0 est continue sur $[0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, puisque $-x\ln(x) \underset{x\to0^+}{\to} 0$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$. En résumé, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$, est continue sur $[0,1]$. De plus,
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$
Vérifions alors que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$. Pour $x \in [0,1]$, posons $g(x) = \begin{cases} -x\ln x \text{ si } x \in]0,1] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$ et admet donc un maximum M sur ce segment. Pour $x \in [0,1]$, on a $0 \leqslant g(x) \leqslant M$ (on peut montrer

que $M = g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$). Mais alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{(g(x))^n}{n!} \leqslant \frac{M^n}{n!}$ ce qui reste vrai pour $x = 0$. Comme la série numérique de terme général $\frac{M^n}{n!}$ converge, on a montré que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement et donc uniformément vers f sur le segment $[0,1]$.
D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, converge et

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (*).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $u = -\ln(x)$ puis $v = (n+1)u$, on obtient

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (-x\ln x)^n\,dx = \frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0 (ue^{-u})^n \times (-e^{-u}\,du) = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}\,du$$
$$= \frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} v^n e^{-v}\,dv = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}.$$

L'égalité $(*)$ s'écrit alors $\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.
Remarque. Pour calculer $I_n = \int_0^1 \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,dx$, on peut aussi s'intéresser plus généralement à $J_{n,p} = \int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)^p}{n!}\,dx$ que l'on calcule par récurrence grâce à une intégration par parties.
Le travail qui précède permet encore d'écrire

$$\int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{(x\ln x)^n}{n!}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.$$

$$\boxed{\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \text{ et } \int_0^1 x^x\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}.}$$

Correction de l'exercice 3 ▲

Pour $x > 0$, posons $f(x) = \frac{x^2}{e^x-1}$. f est continue sur $]0,+\infty[$.
Ensuite, pour tout réel strictement positif x, on a $0 < e^{-x} < 1$ et donc

$$\frac{x^2}{e^x-1} = \frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}} = x^2e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^2e^{-(n+1)x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^2e^{-nx}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, posons $f_n(x) = x^2e^{-nx}$. Chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ car négligeable devant $\frac{1}{x^2}$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty} x^2e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n^3}\int_0^{+\infty} u^2e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(3)}{n^3} = \frac{2}{n^3},$$

qui est le terme général d'une série numérique convergente.
En résumé,
• chaque fonction f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$,
• la série de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,+\infty[$ et la fonction f
est continue sur $]0,+\infty[$.
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme, f est intégrable sur $]0,+\infty[$, la série numérique de terme général $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge et

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}.$$

On a montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

C'est presque le même exercice que l'exercice 3. Pour tout réel $x>0$,

$$\frac{x}{\operatorname{sh} x}=\frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}=2xe^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-2nx}=\sum_{n=0}^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x},$$

puis avec la même démarche que dans l'exercice précédent

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx&=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}2xe^{-(2n+1)x}\,dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2}\int_0^{+\infty}ue^{-u}\,du=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\Gamma(2)}{(2n+1)^2}\\&=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right)=2\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{x}{\operatorname{sh} x}\,dx=\frac{\pi^2}{4}.}$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Ici, le plus simple est peut-être de ne pas utiliser de théorème d'intégration terme à terme. La fonction $f\ :\ x\mapsto\frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue sur $]0,1]$. De plus, quand x tend vers 0, $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\ln x\underset{x\to 0^+}{=}o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. On en déduit que f est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\frac{\ln x}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^kx^{2k}\ln x+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}.$$

Maintenant, chacune des fonctions $f_k\ :\ x\mapsto(-1)^kx^{2k}\ln x$, $0\leqslant k\leqslant n$, est intégrable sur $]0,1]$ car continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 0. On en déduit encore que la fonction $g_n\ :\ x\mapsto\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $g_n=f-\sum_{k=0}^{n}f_k$. On a donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx+\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx.$$

La fonction $h\ :\ x\mapsto\frac{x\ln x}{1+x^2}\,dx$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0. On en déduit que la fonction h est bornée sur $]0,1]$. Soit M un majorant de la fonction $|h|$ sur $]0,1]$. Pour tout entier naturel n, on a alors

$$\left|\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx\right|\leqslant\int_0^1x^{2n}\left|\frac{x\ln x}{1+x^2}\right|\,dx\leqslant M\int_0^1x^{2n}\,dx=\frac{M}{2n+1}.$$

En particulier, $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}\ln x}{1+x^2}\,dx=0$. Ceci montre que la série numérique de terme général $(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx$, $k\in\mathbb{N}$, converge et que

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\int_0^1x^{2k}\ln x\,dx.$$

Soient $n\in\mathbb{N}$ et $\varepsilon\in]0,1[$. Les deux fonctions $x\mapsto\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et $x\mapsto\ln x$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_\varepsilon^1x^{2n}\ln x\,dx=\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ln x\right]_\varepsilon^1-\frac{1}{2n+1}\int_\varepsilon^1x^{2n}\,dx=-\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon-\frac{1}{(2n+1)^2}(1-\varepsilon^{2n+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $\int_0^1x^{2n}\ln x\,dx=-\frac{1}{(2n+1)^2}$. Par suite,

$$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\,dx=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=-\frac{\pi}{4}.$$

Vérifions maintenant l'intégrabilité de la fonction f sur $]0,+\infty[$. La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$ et on sait déjà que f est intégrable sur $]0,1]$. De plus, $x^{3/2}f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ et donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$. Ceci montre que la fonction f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et finalement sur $]0,+\infty[$.
Pour calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$, la méthode précédente ne marche plus du tout car pour $x > 1$, x^n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. C'est une toute autre idée qui permet d'aller au bout. On pose $u = \frac{1}{x}$ et on obtient

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = \int_{+\infty}^{0} \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{1+\frac{1}{u^2}} \times \frac{-du}{u^2} = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du = -I,$$

et donc $I = 0$.

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx = 0.}$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $x \in [0,1[$. Pour tout réel t de $[0,x]$, on a $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$. Maintenant, pour tout réel $t \in [0,x]$ et tout entier naturel n, on a $|t|^n \leqslant x^n$. Puisque la série numérique de terme général x^n converge, on en déduit que la série de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ converge normalement et donc uniformément sur le segment $[0,x]$. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut affirmer que

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

$$\boxed{\forall t \in [0,1[,\ -\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}.}$$

2. Par suite, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}\ln t}{n}.$$

Pour $t \in]0,1[$, posons $f(t) = \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ puis pour $t \in]0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(t) = -\frac{t^{n-1}\ln t}{n}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue sur $]0,1]$ et négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0. La fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1]$. En particulier, la fonction f_n est donc intégrable sur $]0,1[$. Calculons alors $\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Soit $a \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \frac{t^n}{n}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur le segment $[a,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties et on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1}(-\ln t)\,dt = \left[-\frac{t^n \ln t}{n}\right]_a^1 + \frac{1}{n}\int_a^1 t^{n-1}\,dt = \frac{a^n \ln a}{n} + \frac{1}{n^2}(1-a^n).$$

Quand a tend vers 0, on obtient $\int_0^1 -t^{n-1}\ln t\,dt = \frac{1}{n^2}$ et donc $\int_0^1 f_n(t)\,dt = \frac{1}{n^3}$. Puisque la fonction f_n est positive sur $]0,1[$, on a encore $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \frac{1}{n^3}$. On en déduit que la série numérique de terme général $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt$ converge.
En résumé,
• chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$,
• la séries de fonctions de terme général f_n, $n \in \mathbb{N}^*$, converge simplement vers la fonction f sur $]0,1[$ et la fonction f
est continue sur $]0,1[$,
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 |f_n(t)|\,dt < +\infty$.
D'après un théorème d'intégration terme à terme,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n-1}\ln t}{n}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

Correction de l'exercice 7 ▲

Existence de l'intégrale. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \mapsto \frac{\cos(xt)}{\text{ch}\, t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus, pour tout réel positif t, $|f(t)| \leqslant \frac{1}{\text{ch}\, t}$ et donc $|f(t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{2}{e^t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Pour tout réel x, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}\, t}\, dt$ existe.

Convergence de la série. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n(x) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}u_n(x) - u_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2} - \frac{2n+3}{(2n+3)^2+x^2} = \frac{(2n+1)((2n+3)^2+x^2)-(2n+3)((2n+1)^2+x^2)}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}\\ &= \frac{2(2n+1)(2n+3)-2x^2}{((2n+1)^2+x^2)((2n+3)^2+x^2)}.\end{aligned}$$

Puisque le numérateur de cette dernière expression tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, cette expression est positive pour n grand. On en déduit que la suite $(u_n(x))$ décroît à partir d'un certain rang. D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.
On en déduit que la série de terme général $(-1)^n u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées.

Pour tout réel x, la série de terme général $(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}$ converge.

Egalité de l'intégrale et de la somme de la série. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $t \in]0,+\infty[$, on a $e^{-t} \in]0,1[$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{\cos(xt)}{\text{ch}\, t} &= \frac{2\cos(xt)e^{-t}}{1+e^{-2t}} = 2\cos(xt)e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-2kt} + (-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\\ &= 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos(xt)e^{-(2k+1)t} + (-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}.\end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)e^{-(2k+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car continue sur $[0,+\infty[$ et négligeable devant $\frac{1}{t^2}$ quand t tend vers $+\infty$. On en déduit encore que la fonction $t \mapsto (-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}\, t}\, dt = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-(2k+1)t}\, dt + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\, dt.$$

Ensuite, $\left|\int_0^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\, dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\, dt = \frac{1}{2n+3}$, et donc $\lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos(xt)e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\, dt = 0$ puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\text{ch}\, t}\, dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-(2n+1)t}\, dt.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-(2n+1)t}\, dt &= \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{ixt}e^{-(2n+1)t}\, dt\right) = \text{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(-(2n+1)+ix)t}\, dt\right)\\ &= \text{Re}\left(\left[\frac{e^{(-(2n+1)+ix)t}}{-(2n+1)+ix}\right]_0^{+\infty}\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\left(1-\lim_{t\to+\infty} e^{(-(2n+1)+ix)t}\right)\right)\\ &= \text{Re}\left(\frac{1}{(2n+1)-ix}\right) \text{ (car } \left|e^{(-(2n+1)+ix)t}\right| = e^{-(2n+1)t} \underset{n\to+\infty}{\to} 0)\\ &= \text{Re}\left(\frac{2n+1+ix}{(2n+1)^2+x^2}\right) = \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.\end{aligned}$$

On a enfin montré que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch} t}\, dt = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2+x^2}.}$$
