



Dualité

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

Exercice 1 **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E, \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E, \varphi_a \in E^*$.
2. Soient a_0, a_1, \dots, a_n $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

[Correction ▼](#)

[005629]

Exercice 2 **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E, \varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de E^* et trouver la base dont elle est la duale.

[Correction ▼](#)

[005630]

Exercice 3 **

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et φ et ψ deux formes linéaires sur E . On suppose que pour tout x de E , on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

[Correction ▼](#)

[005631]

Exercice 4 ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ et φ $n+1$ formes linéaires sur un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que : $\left(\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / \varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_n \varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi \right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans \mathbb{R}^3 , équation d'un plan P contenant $D : \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{cases}$ et le vecteur $u = (1, 1, 1)$?

[Correction ▼](#)

[005632]

Exercice 5 ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ n formes linéaires sur un \mathbb{K} -espace E de dimension n .

Montrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0$.

[Correction ▼](#)

[005633]

Exercice 6 **

Rang du système de formes linéaires sur \mathbb{R}^4

$$f_1 = x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4$$

$$f_2 = x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \quad ?$$

$$f_3 = x_1 + x_3 + (m+4)x_4$$

$$f_4 = x_2 - 3x_3 - mx_4$$

[Correction ▼](#)

[005634]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E .

2. On a déjà $\text{card}(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n} = n + 1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est libre.

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $P_k = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall (j, k) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \neq k \\ 0 & \text{si } j = k \end{cases} \quad (*).$$

Soit alors $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j = 0 &\Rightarrow \forall P \in E, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta_{j,k} = 0 \\ &\Rightarrow \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est libre et donc une base de E^* . Les égalités (*) montrent alors que la préduale de la base $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

3. Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$. φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $(\varphi_{a_j})_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E^* , il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^n \lambda_j \varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in E$, $\int_0^1 P(t) dt = \lambda_0 P(a_0) + \dots + \lambda_n P(a_n)$ (les λ_j étant indépendants de P).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme P_k , $0 \leq k \leq n$, on obtient $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t) dt = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt$.

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{t - a_j}{a_k - a_j} dt.$$

Correction de l'exercice 2 ▲

Les quatre applications $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ et ψ_2 sont effectivement des formes linéaires sur E .

Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. On note (P_0, P_1, P_2, P_3) cette future base.

• On doit avoir $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$ et $\psi_1(P_2) = 1$. Ainsi, P_2 s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1) = 0$. Donc P_2 admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque P_2 est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante a telle que $P_2 = aX(X - 1)^2 = aX^3 - 2aX^2 + aX$ puis $P_2'(0) = 1$ fournit $a = 1$ puis $P_2 = X(X - 1)^2$.

• De même, il existe une constante a telle que $P_3 = aX^2(X - 1) = aX^3 - aX^2$ et $1 = P_3'(1) = 3a - 2a$ fournit $P_3 = X^2(X - 1)$.

• P_0 admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes a et b telles que $P_0 = (aX + b)(X - 1)^2$ puis les égalités $P_0(0) = 1$ et $P_0'(0) = 0$ fournissent $b = 1$ et $a - 2b = 0$. Par suite, $P_0 = (2X + 1)(X - 1)^2$.

• P_1 admet 0 pour racine double et il existe deux constantes a et b telles que $P_1 = (aX + b)X^2$ puis les égalités $P_1(1) = 1$ et $P_1'(1) = 0$ fournissent $a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$ et donc $P_1 = (-2X + 3)X^2$.

$$P_0 = (2X + 1)(X - 1)^2, P_1 = (-2X + 3)X^2, P_2 = X(X - 1)^2 \text{ et } P_3 = X^2(X - 1).$$

Montrons alors que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* . Cette famille est libre car si $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\psi_1 + d\psi_2 = 0$, on obtient en appliquant successivement à P_0, P_1, P_2 et P_3 , $a = b = c = d = 0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une famille libre de E^* de cardinal 4 et donc une base de E^* . Sa préduale est (P_0, P_1, P_2, P_3) .

Correction de l'exercice 3 ▲

1 ère solution. On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi = 0 \Rightarrow \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \text{Ker}\psi \subset \text{Ker}\varphi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \text{ ou } \text{Ker}\varphi \subset \text{Ker}\psi = \text{Ker}\varphi \cup \text{Ker}\psi = E \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$$

2ème solution. Supposons que $\varphi\psi = 0$ et qu'il existe x et y tels que $\varphi(x) \neq 0$ (et donc $\psi(x) = 0$) et $\psi(y) \neq 0$ (et donc $\varphi(y) = 0$). Alors $0 = \varphi(x+y)\psi(x+y) = (\varphi(x) + \varphi(y))(\psi(x) + \psi(y)) = \varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$\forall(\varphi, \psi) \in (E^*)^2, (\forall x \in E, \varphi(x)\psi(x) = 0) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ ou } \psi = 0.$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\varphi \in E^*$.

• \Rightarrow / Supposons qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \lambda_1\varphi_1 + \dots + \lambda_n\varphi_n$.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x) = \lambda_1\varphi_1(x) + \dots + \lambda_n\varphi_n(x) = 0 + \dots + 0 = 0$ et donc $x \in \text{Ker}\varphi$. On a

montré que $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi$.

• \Leftarrow / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n, \varphi_{n+1}, \dots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$ un élément de E .

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(x) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_i = 0 \Leftrightarrow x \in \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$$

(avec la convention usuelle $\text{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ dans le cas $p = n$). Donc $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p)$.

Soit alors $\varphi \in E^*$. Posons $\varphi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \varphi_i$.

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \text{Ker}\varphi &\Rightarrow \text{Vect}(e_{n+1}, \dots, e_p) \subset \text{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \varphi(e_j) = 0 \\ &\Rightarrow \forall j \in \llbracket n+1, p \rrbracket, \lambda_j = 0 \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i. \end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre.

Si tous les $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i = E$ puis $\text{Ker}\varphi = E$ et donc $\varphi = 0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$.

Si les $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ génératrice de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

On a $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i \subset \bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout $\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, étant combinaison linéaire des $\varphi_{i_k},$

$1 \leq k \leq m$, chaque $\text{Ker}\varphi_i, 1 \leq i \leq n$, contient $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^m \text{Ker}\varphi_{i_k} \subset \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}\varphi_i$. Finalement,

$\bigcap_{k=1}^m \text{Ker} \varphi_{i_k} = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \varphi_i \subset \text{Ker} \varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des φ_{i_k} , $1 \leq k \leq m$ et donc des φ_i , $1 \leq i \leq n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit φ une forme linéaire sur \mathbb{R}^3 telle que $P = \text{Ker} \varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ et φ_2 la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto 2x + 3z$. Alors la famille (φ_1, φ_2) est une famille libre du dual de \mathbb{R}^3 et $D = \text{Ker} \varphi_1 \cap \text{Ker} \varphi_2$. D'après 1)

$$D \subset P \Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} / \varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux),}$$

puis

$$u \in P \Leftrightarrow a\varphi_1(u) + b\varphi_2(u) = 0 \Leftrightarrow 3a + 5b = 0.$$

Une équation de P est donc $5(x + y + z) - 3(2x + 3z) = 0$ ou encore $-x + 5y - 4z = 0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée si et seulement si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

si $\text{Ker}(f) \neq \{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est libre, c'est une base de E^* (car $\dim(E^*) = n$). Notons (u_1, \dots, u_n) sa préduale et notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{K}^n . Pour $1 \leq i \leq n$, on a $f(u_i) = e_i$. Ainsi, l'image par f d'une base de E est une base de \mathbb{K}^n et on sait alors que f est un isomorphisme. En particulier, $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

• Si les φ_i sont tous nuls, tout vecteur non nul x annule chaque φ_i . Supposons alors que la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est liée et que les φ_i ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ (avec $1 \leq m < n$) de $\text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}, \psi_1, \dots, \psi_{n-m})$ de E^* . On note $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en e_n et donc chaque φ_i s'annule en e_n puisque chaque φ_i est combinaison linéaire des φ_{i_k} , $1 \leq i \leq m$. Le vecteur e_n est donc un vecteur non nul x tel que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i(x) = 0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

La matrice de la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) dans la base canonique du dual de \mathbb{R}^4 est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & m & 1 & -3 \\ -2 & 1 & m+4 & -m \end{pmatrix}$.

La matrice A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & m+1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & m+6 & -m \end{pmatrix}$ (pour $2 \leq j \leq 3$, $C_j \leftarrow C_j - C_1$) puis

que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2m & m-2 \\ -2 & 3 & m & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_2$)

• Si $m = 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et donc $\text{rg}(A) = 3$.

• Si $m \neq 0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & m-2 \\ -2 & 3 & 1 & -m+3 \end{pmatrix}$ ($C_3 \leftarrow \frac{1}{m}C_3$) puis que la matrice

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & m+1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -m+4 \end{pmatrix}$ ($C_4 \leftarrow 2C_4 + (m-2)C_3$)

Donc, si $m = 4$, $\text{rg}(A) = 3$ et si m n'est ni 0 ni 4, $\text{rg}(A) = 4$.

Si $m \notin \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 4$ et si $m \in \{0, 4\}$, $\text{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3$.
