Dualité

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile   ** facile   *** difficulté moyenne   **** difficile   ***** très difficile
I : Incontournable

Dans les corrigés qui suivent, on ne suppose pas connue la notion d'orthogonalité au sens de la dualité.

Exercice 1 **I

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Pour $a \in \mathbb{C}$, on définit l'application φ_a par : $\forall P \in E,\ \varphi_a(P) = P(a)$. Montrer que pour tout $a \in E$, $\varphi_a \in E^*$.
2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $(\varphi_{a_0}, \ldots, \varphi_{a_n})$ est une base de E^* et déterminer sa préduale.
3. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ puis donner la valeur des λ_i sous la forme d'une intégrale.

Correction ▼ [005629]

Exercice 2 **

Sur $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose pour tout $P \in E$, $\varphi_1(P) = P(0)$ et $\varphi_2(P) = P(1)$ puis $\psi_1(P) = P'(0)$ et $\psi_2(P) = P'(1)$. Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une base de E^* et trouver la base dont elle est la duale.

Correction ▼ [005630]

Exercice 3 **

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et φ et ψ deux formes linéaires sur E. On suppose que pour tout x de E, on a $\varphi(x)\psi(x) = 0$. Montrer que $\varphi = 0$ ou $\psi = 0$.

Correction ▼ [005631]

Exercice 4 ***

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis φ_1,..., φ_n et φ $n+1$ formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.
   Montrer que : $\left(\exists (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n /\ \varphi = \lambda_1\varphi_1 + ... + \lambda_n\varphi_n \Leftrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\varphi_i \subset \mathrm{Ker}\varphi\right)$.
2. Signification du résultat précédent : dans $\mathbb{R}^3$, équation d'un plan P contenant D : $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ 2x+3z=0 \end{array}\right.$ et le vecteur $u = (1,1,1)$?

Correction ▼ [005632]

Exercice 5 ***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ puis φ_1,..., φ_n n formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace E de dimension n.
Montrer que la famille $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est liée si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x) = 0$.

Correction ▼ [005633]

Exercice 6 **

Rang du système de formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 \\ f_2 &= x_1 + x_2 + mx_3 + x_4 \\ f_3 &= x_1 + x_3 + (m+4)x_4 \\ f_4 &= x_2 - 3x_3 - mx_4 \end{aligned} \quad ?$$

Correction ▼ [005634]

Correction de **l'exercice 1 ▲**

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $(P, Q) \in E^2$.

$$\varphi_a(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)(a) = \lambda P(a) + \mu Q(a) = \lambda \varphi_a(P) + \mu \varphi_a(Q).$$

Donc, φ_a est une forme linéaire sur E.

2. On a déjà card $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n} = n+1 = \dim(E) = \dim(E^*) < +\infty$. Il suffit donc de vérifier que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre.

Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $P_k = \prod_{j\neq k} \frac{X-a_j}{a_k-a_j}$. Chaque P_k est un élément de E et de plus

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!]^2,\ \varphi_{a_j}(P_k) = \delta_{j,k} = \left\{\begin{array}{l} 1 \text{ si } j \neq k \\ 0 \text{ si } j = k \end{array}\right. \quad (*).$$

Soit alors $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0 \Rightarrow \forall P \in E,\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_j(P_k) = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \delta_{j,k} = 0$$
$$\Rightarrow \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = 0.$$

Ceci montre que la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est libre et donc une base de E^*. Les égalités $(*)$ montrent alors que la préduale de la base $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ de E^* est la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

3. Pour $P \in E$, posons $\varphi(P) = \int_0^1 P(t)\,dt$. φ est une forme linéaire sur E et donc, puisque la famille $\left(\varphi_{a_j}\right)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de E^*, il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\varphi = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \varphi_{a_j}$ ou encore il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que pour tout $P \in E$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \lambda_0 P(a_0) + \ldots + \lambda_n P(a_n)$ (les λ_j étant indépendants de P).

En appliquant cette dernière égalité au polynôme P_k, $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient $\lambda_k = \int_0^1 P_k(t)\,dt = \int_0^1 \prod_{j\neq k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(a_k) \text{ où } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \lambda_k = \int_0^1 \prod_{j\neq k} \frac{t-a_j}{a_k-a_j}\,dt.}$$

Correction de **l'exercice 2 ▲**

Les quatre applications φ_1, φ_2, ψ_1 et ψ_2 sont effectivement des formes linéaires sur E.
Cherchons tout d'abord la future base préduale de la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. On note (P_0, P_1, P_2, P_3) cette future base.

• On doit avoir $\varphi_1(P_2) = \varphi_2(P_2) = \psi_2(P_2) = 0$ et $\psi_1(P_2) = 1$. Ainsi, P_2 s'annule en 0 et en 1 et de plus $P_2'(1) = 0$. Donc P_2 admet 0 pour racine d'ordre 1 au moins et 1 pour racine d'ordre 2 au moins. Puisque P_2 est de degré inférieur ou égal à 3, il existe une constante a telle que $P_2 = aX(X-1)^2 = aX^3 - 2aX^2 + aX$ puis $P_2'(0) = 1$ fournit $a = 1$ puis $P_2 = X(X-1)^2$.

• De même, il existe une constante a telle que $P_3 = aX^2(X-1) = aX^3 - aX^2$ et $1 = P_3'(1) = 3a - 2a$ fournit $P_3 = X^2(X-1)$.

• P_0 admet 1 pour racine double et donc il existe deux constantes a et b telles que $P_0 = (aX+b)(X-1)^2$ puis les égalités $P_0(0) = 1$ et $P_0'(0) = 0$ fournissent $b = 1$ et $a - 2b = 0$. Par suite, $P_0 = (2X+1)(X-1)^2$.

• P_1 admet 0 pour racine double et il existe deux constantes a et b telles que $P_1 = (aX+b)X^2$ puis les égalités $P_1(1) = 1$ et $P_1'(1) = 0$ fournissent $a + b = 1$ et $3a + 2b = 0$ et donc $P_1 = (-2X+3)X^2$.

$$\boxed{P_0 = (2X+1)(X-1)^2,\ P_1 = (-2X+3)X^2,\ P_2 = X(X-1)^2 \text{ et } P_3 = X^2(X-1).}$$

Montrons alors que $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^*. Cette famille est libre car si $a\varphi_1 + b\varphi_2 + c\psi_1 + d\psi_2 = 0$, on obtient en appliquant successivement à P_0, P_1, P_2 et P_3, $a = b = c = d = 0$. Mais alors, la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ est une famille libre de E^* de cardinal 4et donc une base de E^*. Sa préduale est (P_0, P_1, P_2, P_3).

Correction de l'exercice 3 ▲

1 ère solution. On utilise le fait qu'une réunion de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel si et seulement si l'un des deux contient l'autre. Donc

$$\varphi\psi=0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E \Rightarrow \mathrm{Ker}\psi\subset\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E \text{ ou } \mathrm{Ker}\varphi\subset\mathrm{Ker}\psi=\mathrm{Ker}\varphi\cup\mathrm{Ker}\psi=E \Rightarrow \varphi=0 \text{ ou } \psi=0.$$

2ème solution. Supposons que $\varphi\psi=0$ et qu'il existe x et y tels que $\varphi(x)\neq 0$ (et donc $\psi(x)=0$) et $\psi(y)\neq 0$ (et donc $\varphi(y)=0$). Alors $0=\varphi(x+y)\psi(x+y)=(\varphi(x)+\varphi(y))(\psi(x)+\psi(y))=\varphi(x)\psi(y)$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\forall(\varphi,\psi)\in(E^*)^2,\ (\forall x\in E,\ \varphi(x)\psi(x)=0)\Rightarrow\varphi=0 \text{ ou } \psi=0.}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Soit $\varphi\in E^*$.

   • $\Rightarrow$ / Supposons qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $\varphi=\lambda_1\varphi_1+\dots+\lambda_n\varphi_n$.

   Soit $x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i$. Alors $\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x)=0+\ldots+0=0$ et donc $x\in\mathrm{Ker}\varphi$. On a montré que $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi$.

   • $\Leftarrow$ / Supposons tout d'abord la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ libre. On complète éventuellement la famille libre $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de E^* en une base $(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1},\dots,\varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1,\dots,e_n,e_{n+1},\dots,e_p)$ la préduale de la base $(\varphi_1,\dots,\varphi_p)$.

   Soit $x=\sum_{i=1}^{p}x_ie_i$ un élément de E.

   $$x\in\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ \varphi_i(x)=0 \Leftrightarrow \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i=0 \Leftrightarrow x\in\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$$

   (avec la convention usuelle $\mathrm{Vect}(\varnothing)=\{0\}$ dans le cas $p=n$). Donc $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i=\mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)$.

   Soit alors $\varphi\in E^*$. Posons $\varphi=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\varphi_i$.

   $$\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \mathrm{Vect}(e_{n+1},\dots,e_p)\subset\mathrm{Ker}\varphi \Rightarrow \forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \varphi(e_j)=0$$

   $$\Rightarrow \forall j\in[\![n+1,p]\!],\ \lambda_j=0 \Rightarrow \varphi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i.$$

   Le résultat est donc démontré dans le cas où la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est libre.

   Si tous les φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, sont nuls alors $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i=E$ puis $\mathrm{Ker}\varphi=E$ et donc $\varphi=0$. Dans ce cas aussi, φ est combinaison linéaire des φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$.

   Si les φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, ne sont pas tous nuls et si la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est liée, on extrait de la famille $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ génératrice de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\dots,\varphi_{i_m})$ de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$.

   On a $\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\bigcap_{k=1}^{m}\mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ mais d'autre part, tout φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$, étant combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1\leqslant k\leqslant m$, chaque $\mathrm{Ker}\varphi_i$, $1\leqslant i\leqslant n$, contient $\bigcap_{k=1}^{m}\mathrm{Ker}\varphi_{i_k}$ et donc $\bigcap_{k=1}^{m}\mathrm{Ker}\varphi_{i_k}\subset\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i$. Finalement,

$\bigcap_{k=1}^{m}\mathrm{Ker}\varphi_{i_k}=\bigcap_{i=1}^{n}\mathrm{Ker}\varphi_i\subset\mathrm{Ker}\varphi$. D'après l'étude du cas où la famille est libre, φ est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1\leqslant k\leqslant m$ et donc des φ_i, $1\leqslant i\leqslant n$. La réciproque est démontrée dans tous les cas.

2. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ telle que $P=\mathrm{Ker}\varphi$ (en particulier φ n'est pas nulle). Soient φ_1 la forme linéaire $(x,y,z)\mapsto x+y+z$ et φ_2 la forme linéaire $(x,y,z)\mapsto 2x+3z$. Alors la famille (φ_1,φ_2) est une famille libre du dual de $\mathbb{R}^3$ et $D=\mathrm{Ker}\varphi_1\cap\mathrm{Ker}\varphi_2$. D'après 1)

$$D\subset P\Leftrightarrow \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}/\ \varphi=a\varphi_1+b\varphi_2 \text{ (théorie des faisceaux)},$$

puis

$$u\in P\Leftrightarrow a\varphi_1(u)+b\varphi_2(u)=0\Leftrightarrow 3a+5b=0.$$

Une équation de P est donc $5(x+y+z)-3(2x+3z)=0$ ou encore $-x+5y-4z=0$.

Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $f:\begin{array}{rcl}E&\to&\mathbb{K}^n\\ x&\mapsto&(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))\end{array}$. Il s'agit de démontrer que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est liée si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)\neq\{0\}$.

• Si la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est libre, c'est une base de E^* (car $\dim(E^*)=n$). Notons $(u_1,\ldots,u_n)$ sa préduale et notons $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour $1\leqslant i\leqslant n$, on a $f(u_i)=e_i$. Ainsi, l'image par f d'une base de E est une base de $\mathbb{K}^n$ et on sait alors que f est un isomorphisme. En particulier, $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$.

• Si les φ_i sont tous nuls, tout vecteur non nul x annule chaque φ_i. Supposons alors que la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ est liée et que les φ_i ne sont pas tous nuls. On extrait de la famille $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ une base $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m})$ (avec $1\leqslant m<n$) de $\mathrm{Vect}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$. On complète la famille libre $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m})$ en une base $(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m},\psi_1,\ldots,\psi_{n-m})$ de E^*. On note $(e_1,\ldots,e_m,e_{m+1},\ldots,e_n)$ sa préduale. Les formes linéaires $\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_m}$ s'annulent toutes en e_n et donc chaque φ_i s'annule en e_n puisque chaque φ_i est combinaison linéaire des φ_{i_k}, $1\leqslant i\leqslant m$. Le vecteur e_n est donc un vecteur non nul x tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\varphi_i(x)=0$.

Correction de l'exercice 6 ▲

La matrice de la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) dans la base canonique du dual de $\mathbb{R}^4$ est $A=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&1&0&1\\-1&m&1&-3\\-2&1&m+4&-m\end{pmatrix}$.

La matrice A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&-2&1\\-1&m+1&2&-3\\-2&3&m+6&-m\end{pmatrix}$ (pour $2\leqslant j\leqslant 3$, $C_j\leftarrow C_j-C_1$) puis que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2m&m-2\\-2&3&m&-m+3\end{pmatrix}$ ($C_3\leftarrow C_3-2C_2$ et $C_4\leftarrow C_4+C_2$)

• Si $m=0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-1&1&-2\\-2&3&3\end{pmatrix}$ et donc $\mathrm{rg}(A)=3$.

• Si $m\neq0$, A a même rang que la matrice $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2&m-2\\-2&3&1&-m+3\end{pmatrix}$ ($C_3\leftarrow\frac{1}{m}C_3$) puis que la matrice
$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&-1&0&0\\-1&m+1&-2&0\\-2&3&1&-m+4\end{pmatrix}$ ($C_4\leftarrow 2C_4+(m-2)C_3$)

Donc, si $m = 4$, $\mathrm{rg}(A) = 3$ et si m n'est ni 0 ni 4, $\mathrm{rg}(A) = 4$.

$$\boxed{\text{Si } m \notin \{0,4\},\ \mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 4 \text{ et si } m \in \{0,4\},\ \mathrm{rg}(f_1, f_2, f_3, f_4) = 3.}$$
