

Fonctions de plusieurs variables

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1 **T

Etudier l'existence et la valeur éventuelle d'une limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1. $\frac{xy}{x+y}$
2. $\frac{xy}{x^2+y^2}$
3. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
4. $\frac{1+x^2+y^2}{y} \sin y$
5. $\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
6. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.

[Correction ▼](#)

[005553]

Exercice 2 ***

On pose $f_{x,y} : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ puis $F(x,y) = \sup_{t \in [-1,1]} f_{x,y}(t)$. Etudier la continuité de F sur \mathbb{R}^2 .

$$t \mapsto xt^2 + yt$$

[Correction ▼](#)

[005554]

Exercice 3 ***T

Déterminer la classe de f sur \mathbb{R}^2 où $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$.

[Correction ▼](#)

[005555]

Exercice 4 ***T

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f .
2. Etudier l'existence et la valeur éventuelle de dérivées partielles d'ordre 1 et 2. On montrera en particulier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont définies en $(0,0)$ mais n'ont pas la même valeur.

[Correction ▼](#)

[005556]

Exercice 5 ***

Le laplacien d'une application g de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 est $\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

Déterminer une fonction de classe C^2 sur un intervalle I de \mathbb{R} à préciser à valeurs dans \mathbb{R} telle que la fonction

$$g(x,y) = f\left(\frac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y}\right)$$

soit non constante et ait un laplacien nul sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 le plus grand possible (une fonction de Laplacien nul est dite harmonique).

[Correction ▼](#)

[005557]

Exercice 6 **T

Trouver les extrema locaux de

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$

[Correction ▼](#)

[005558]

Exercice 7 ***

Maximum du produit des distances aux cotés d'un triangle ABC du plan d'un point M intérieur à ce triangle (on admettra que ce maximum existe).

[Correction ▼](#)

[005559]

Exercice 8 **

Soit a un réel strictement positif donné. Trouver le minimum de $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$.

[Correction ▼](#)

[005560]

Exercice 9 **

Trouver toutes les applications φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 telle que l'application f de $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}$ dans \mathbb{R} qui à (x,y) associe $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

[Correction ▼](#)

[005561]

Exercice 10 **

Trouver toutes les applications f de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} vérifiant

1. $2\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x + 2y$)

2. $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$ (en passant en polaires).

[Correction ▼](#)

[005562]

Correction de l'exercice 1 ▲

On note f la fonction considérée.

1. Pour $x \neq 0$, $f(x, -x+x^3) = \frac{x(-x+x^3)}{x-x+x^3} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\frac{1}{x}$. Quand x tend vers 0, $-x+x^3$ tend vers 0 puis $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x > 0, y = -x+x^3}} f(x,y) = -\infty$. f n'a de limite réelle en $(0,0)$.

2. Pour $x \neq 0$, $f(x,0) = \frac{x \times 0}{x^2+0^2} = 0$ puis $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} f(x,y) = 0$. Mais aussi, pour $x \neq 0$, $f(x,x) = \frac{x \times x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$ puis $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=y}} f(x,y) = \frac{1}{2}$. Donc si f a une limite réelle, cette limite doit être égale à 0 et à $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. f n'a pas de limite réelle en $(0,0)$.

3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x^2 - 2|xy| + y^2 = (|x| - |y|)^2 \geq 0$ et donc $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. Par suite, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4(x^2 + y^2)} = \frac{1}{4}(x^2 + y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin y}{y} = 1$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + x^2 + y^2) = 1$. Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 1$.

5. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^3 + y^3| = |x+y|(x^2 + xy + y^2) \leq \frac{3}{2}|x+y|(x^2 + y^2)$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3 + y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}|x+y|.$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{2}|x+y| = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

6. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x^4 + y^4| = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 y^2 \leq (x^2 + y^2)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)^2 = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2$ et donc pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$|f(x,y)| = \frac{|x^4 + y^4|}{x^2 + y^2} \leq \frac{3}{2}(x^2 + y^2).$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) = 0$, on a aussi $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

Correction de l'exercice 2 ▲

Déterminons tout d'abord $F(x,y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. • Pour $y \in \mathbb{R}$, $F(x,y) = \text{Max}\{f_{0,y}(-1), f_{0,y}(1)\} = \text{Max}\{y, -y\} = |y|$. • Si $x \neq 0$, $F(x,y) = \text{Max}\{f_{x,y}(-1), f_{x,y}(-\frac{y}{2x}), f_{x,y}(1)\} = \text{Max}\{x+y, x-y, -\frac{y^2}{4x}\} = \text{Max}\{x+|y|, -\frac{y^2}{4x}\}$. Plus précisément, si $x > 0$, on a $x+|y| > 0$ et $-\frac{y^2}{4x} \leq 0$. Donc $F(x,y) = x+|y|$ ce qui reste vrai quand $x = 0$. Si $x < 0$, $x+|y| - \left(-\frac{y^2}{4x}\right) = \frac{4x^2 + 4x|y| + y^2}{4x} = \frac{(2x+|y|)^2}{4x} < 0$ et donc $F(x,y) = -\frac{y^2}{4x}$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F(x,y) = \begin{cases} x+|y| & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{y^2}{4x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

En vertu de théorèmes généraux, F est continue sur $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ et $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x < 0\}$. Soit $y_0 \neq 0$.

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,y_0) \\ x < 0, y = y_0}} F(x,y) = +\infty \neq |y_0| = F(0,y_0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,y_0)$. Enfin, $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x < 0, y = \sqrt{-x}}} F(x,y) =$

$\frac{1}{4} \neq 0 = F(0,0)$ et donc F n'est pas continue en $(0,0)$.

F est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ et est discontinue en tout $(0, y), y \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 ▲

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ et donc f est définie sur \mathbb{R}^2 . • f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en tant que quotient de fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Pour $(x, y) \neq (0, 0), |f(x, y)| \leq \frac{|xy|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |xy|$. Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| = 0$, on en déduit que $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Ainsi, f est continue en $(0, 0)$ et donc sur \mathbb{R}^2 . • **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \frac{x \times 0 \times (x^2 - 0^2)}{x \times (x^2 + 0^2)} = 0,$$

et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$. Ainsi, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en $(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$. • Pour $(x, y) \neq (0, 0), \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$.
Finalement, f admet sur \mathbb{R}^2 une dérivée partielle par rapport à sa première variable définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

- Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2, f(y, x) = -f(x, y)$. Par suite, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$. En effet, pour (x_0, y_0) donné dans \mathbb{R}^2

$$\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{-f(y, x_0) + f(y_0, x_0)}{y - y_0} = -\frac{f(y, x_0) - f(y_0, x_0)}{y - y_0} \xrightarrow{y \rightarrow y_0} -\frac{\partial f}{\partial x}(y_0, x_0).$$

Donc, f admet sur \mathbb{R}^2 une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}.$$

- **Continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.** Pour $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right| = \frac{|y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)|}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{|y|(x^4 + 4x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \leq \frac{|y|(2x^4 + 4x^2y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} = 2|y|.$$

Comme $2|y|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right|$ tend vers 0 quand (x, y) tend vers $(0, 0)$. On en déduit que l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$ et donc sur \mathbb{R}^2 . Enfin, puisque $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur \mathbb{R}^2 . f est donc au moins de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . • Pour $x \neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = \frac{x^4}{x^4} = 1$ et donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{x - 0} = 1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 1$. Pour $y \neq 0$, $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = \frac{-y^4}{y^4} = -1$ et donc $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(y, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{y - 0} = -1$. Donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existe et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et donc f n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 d'après le théorème de SCHWARZ.

f est de classe C^1 exactement sur \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Posons $\Delta = \{(x,y)/y \neq 0\}$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ en vertu de théorèmes généraux. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$|f(x,y) - f(x_0,0)| = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y^2 \left| \sin\left(\frac{x}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \leq y^2.$$

Comme $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} y^2 = 0$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,0)} |f(x,y) - f(x_0,0)| = 0$ et donc f est continue en $(x_0,0)$. Finalement,

f est continue sur \mathbb{R}^2 .

2. • f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$. En particulier, d'après le théorème de SCHWARZ, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur Δ . pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right),$$

puis

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x}{y} \sin\left(\frac{x}{y}\right),$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) - 2 \frac{x}{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{x^2}{y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right).$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$.** Pour $x \neq x_0$, $\frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} = 0$ et donc $\frac{f(x,0) - f(x_0,0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}.$$

• **Existence de $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$.** Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $y \neq 0$,

$$\left| \frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y - 0} \right| = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ y \left| \sin\left(\frac{x_0}{y}\right) \right| & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \leq |y|.$$

et donc $\frac{f(x_0,y) - f(x_0,0)}{y - 0} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$. On en déduit que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)$ existe et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0) = 0$. En résumé, f admet une dérivée partielle par rapport à sa deuxième variable sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \end{cases}.$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$.** Pour $x \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x - 0} = 0$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ existe et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0.$$

• **Existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.** Pour $y \neq 0$,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \frac{y \cos\left(\frac{0}{y}\right)}{y} = 1$$

et donc $\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0}$ tend vers 1 quand y tend vers 0. On en déduit que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existe et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

Correction de l'exercice 5 ▲

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} \in [-1, 1]$. Plus précisément, quand x décrit \mathbb{R} , $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2 \times 0)}$ décrit $[-1, 1]$ et donc quand (x,y) décrit \mathbb{R}^2 , $\frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)}$ décrit $[-1, 1]$. On suppose déjà que f est de classe C^2 sur $[-1, 1]$. L'application g est alors de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 et pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -\frac{2 \sin(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) \text{ puis } \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{4 \cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \frac{4 \sin^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right).$$

Ensuite,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{2 \cos(2x) \text{sh}(2y)}{\text{ch}^2(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{4 \cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) - 2 \cos(2x) \text{sh}(2y) \frac{-4 \text{sh}(2y)}{\text{ch}^3(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \frac{4 \cos^2(2x) \text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right).$$

Mais alors

$$\begin{aligned} \Delta g(x,y) &= \frac{-8 \cos(2x) \text{ch}^2(2y) + 8 \cos(2x) \text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^3(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \frac{4 \sin^2(2x) \text{ch}^2(2y) + 4 \cos^2(2x) \text{sh}^2(2y)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) \\ &= \frac{-8 \cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \frac{4(1 - \cos^2(2x)) \text{ch}^2(2y) + 4 \cos^2(2x) (\text{ch}^2(2y) - 1)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) \\ &= \frac{-8 \cos(2x)}{\text{ch}^3(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \frac{4 \text{ch}^2(2y) - 4 \cos^2(2x)}{\text{ch}^4(2y)} f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) \\ &= \frac{4}{\text{ch}^2(2y)} \left(-2 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} \right) f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) \right). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \Delta g = 0 &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, -2 \frac{\cos(2x)}{\text{ch}(2y)} f' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) + \left(1 - \frac{\cos^2(2x)}{\text{ch}^2(2y)} \right) f'' \left(\frac{\cos 2x}{\text{ch} 2y} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], -2t f'(t) + (1 - t^2) f''(t) = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1, 1], ((1 - t^2) f'(t))' = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in [-1, 1], (1 - t^2) f'(t) = \lambda. \end{aligned}$$

Le choix $\lambda \neq 0$ ne fournit pas de solution sur $[-1, 1]$. Donc $\lambda = 0$ puis $f' = 0$ puis f constante ce qui est exclu. Donc, on ne peut pas poursuivre sur $[-1, 1]$. On cherche dorénavant f de classe C^2 sur $] -1, 1[$ de sorte que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$.

$$f \text{ solution} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, \forall t \in] -1, 1[, (1-t^2)f'(t) = \lambda \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* / \forall t \in] -1, 1[, f'(t) = \frac{\lambda}{1-t^2}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} / \forall t \in] -1, 1[, f(t) = \lambda \operatorname{arctanh} t + \mu.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) est un point critique de f . Or, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{4}{3} \end{cases}.$$

Donc si f admet un extremum local, c'est nécessairement en $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ avec $f(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}) = -\frac{7}{3}$. D'autre part,

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 - \left(\frac{y}{2} + 1\right)^2 + y^2 + 3y = \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2y - 1$$

$$= \left(x + \frac{y}{2} + 1\right)^2 + \frac{3}{4} \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{7}{3} \geq -\frac{7}{3} = f\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Donc f admet un minimum local en $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ égal à $-\frac{7}{3}$ et ce minimum local est un minimum global. D'autre part, f n'admet pas de maximum local.

2. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 . Donc si f admet un extremum local en un point (x_0, y_0) de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) est un point critique de f . Or, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}.$$

Les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(-1, -1)$. Maintenant, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$. Ceci permet de restreindre l'étude aux deux points $(0, 0)$ et $(1, 1)$. • Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = x^4 > 0$ sur \mathbb{R}^* et $f(x, x) = -4x^2 + 2x^4 = 2x^2(-2 + x^2) < 0$ sur $] -\sqrt{2}, 0[\cup] 0, \sqrt{2}[$. Donc f change de signe dans tous voisinage de $(0, 0)$ et puisque $f(0, 0) = 0$, f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$. • Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(1+h, 1+k) - f(1, 1) = (1+h)^4 + (1+k)^4 - 4(1+h)(1+k) + 2 = 6h^2 + 6k^2 - 4hk + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4$$

$$\geq 6h^2 + 6k^2 - 2(h^2 + k^2) + 4h^3 + 4k^3 + h^4 + k^4 = 4h^2 + 4h^3 + h^4 + 4k^2 + 4k^3 + k^4$$

$$= h^2(2h^2 + 1)^2 + k^2(2k^2 + 1)^2 \geq 0.$$

f admet donc un minimum global en $(1, 1)$ (et en $(-1, -1)$) égal à -2 .

Correction de l'exercice 7 ▲

Soit M un point intérieur au triangle ABC . On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On note x, y, z et \mathcal{A} les aires respectives des triangles MBC , MCA , MAB et ABC . On a

$$d(M, (BC))d(M, (CA))d(M, (AB)) = \frac{2\text{aire}(MBC)}{a} \frac{2\text{aire}(MCA)}{b} \frac{2\text{aire}(MAB)}{c} = \frac{8xyz}{abc} = \frac{8}{abc}xy(\mathcal{A} - x - y).$$

On doit donc déterminer le maximum de la fonction $f(x, y) = xy(\mathcal{A} - x - y)$ quand (x, y) décrit le triangle ouvert $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x + y < \mathcal{A}\}$. On admet que f admet un maximum global sur le triangle fermé $T' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \mathcal{A}\}$ (cela résulte d'un théorème de math Spé : une fonction numérique continue sur un compact admet un minimum et un maximum). Ce maximum est atteint dans l'intérieur T de T' car f est nulle au bord de T' et strictement positive à l'intérieur de T' .

Puisque f est de classe C^1 sur T qui est un ouvert de \mathbb{R}^2 , f atteint son maximum sur T en un point critique de f . Or, pour $(x, y) \in T^2$,

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathcal{A} - x - y) - xy = 0 \\ y(\mathcal{A} - x - y) - xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(\mathcal{A} - 2x - y) = 0 \\ x(\mathcal{A} - x - 2y) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = \mathcal{A} \\ x + 2y = \mathcal{A} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{\mathcal{A}}{3}.$$

Le maximum cherché est donc égal à $\frac{8}{abc} \times \frac{\mathcal{A}}{3} \times \frac{\mathcal{A}}{3} \times (\mathcal{A} - \frac{\mathcal{A}}{3} - \frac{\mathcal{A}}{3}) = \frac{8\mathcal{A}^3}{27abc}$. (On peut montrer que ce maximum est obtenu quand M est le centre de gravité du triangle ABC).

Correction de l'exercice 8 ▲

Soient \mathcal{R} un repère orthonormé de \mathbb{R}^2 muni de sa structure euclidienne canonique puis M, A et B les points de coordonnées respectives (x, y) , $(0, a)$ et $(a, 0)$ dans \mathcal{R} . Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = MA + MB \geq AB = a\sqrt{2}$ avec égalité si et seulement si $M \in [AB]$. Donc

Le minimum de f sur \mathbb{R}^2 existe et vaut $a\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Soit φ une application de classe C^2 sur \mathbb{R} puis f l'application définie sur U par $\forall (x, y) \in U, f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \right) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{y}{x^2} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) \right) = \frac{2y}{x^3} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y^2}{x^4} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{2y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) \right). \end{aligned}$$

Puis, quand (x, y) décrit U , $\frac{y}{x}$ décrit \mathbb{R} (car $\frac{y}{x}$ décrit déjà \mathbb{R})

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in U, \frac{2y}{x} \varphi'\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y^2}{x^2} - 1 \right) \varphi''\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, 2t\varphi'(t) + (t^2 - 1)\varphi''(t) = t \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, (t^2 - 1)\varphi'(t) = \frac{t^2}{2} + \lambda \quad (*) \end{aligned}$$

Maintenant, $\frac{t^2}{2} + \lambda$ ne s'annule pas en ± 1 , l'égalité (*) fournit une fonction φ telle que φ' n'a pas une limite réelle en ± 1 . Une telle solution n'est pas de classe C^2 sur \mathbb{R} . Donc nécessairement $\lambda = -\frac{1}{2}$ puis

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in U, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{y}{x^3} &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, (t^2 - 1)\varphi'(t) = \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \varphi'(t) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \frac{1}{2} \text{ (par continuité de } \varphi' \text{ en } \pm 1) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} / \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{t}{2} + \lambda. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 10 ▲

1. $\begin{cases} u = x + y \\ v = x + 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2u - v \\ y = -u + v \end{cases}$. L'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même. Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, posons alors $g(u,v) = f(2u - v, u + v) = f(x,y)$ de sorte que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x + y, x + 2y) = g(u,v)$. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 si et seulement si g est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 et

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2 \frac{\partial}{\partial x}(g(x + y, x + 2y)) - \frac{\partial}{\partial y}(g(x + y, x + 2y)) \\ &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right) \\ &= 2 \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right) - \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2 \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \right) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v). \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2, g(u,v) = F(v) \\ &\Leftrightarrow \exists F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = F(x + 2y). \end{aligned}$$

2. On pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. On pose $f(x,y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r, \theta)$. On sait que $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta$, $\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = r \cos \theta \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + r \sin \theta \left(\sin \theta \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) = r \frac{\partial g}{\partial r},$$

puis

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in D, x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} &\Leftrightarrow \forall r > 0, r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = r \Leftrightarrow \forall r > 0, \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[/ \forall (r, \theta) \in]0, +\infty[\times \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[, g(r, \theta) = r + \varphi(\theta) \\ &\Leftrightarrow \exists \varphi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[/ \forall (x,y) \in D, f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi\left(\arctan \frac{y}{x}\right) \\ &\Leftrightarrow \exists \psi \text{ de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} / \forall (x,y) \in D, f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \psi\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$