

Etude métrique des courbes

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Longueur L de (Γ) dans chacun des cas suivants :

1. Γ est l'astroïde de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ ($a > 0$ donné).
2. Γ est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.
3. Γ est l'arc de parabole d'équation cartésienne $x^2 = 2py$, $0 \leq x \leq a$ ($p > 0$ et $a > 0$ donnés).
4. Γ est la cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0$ donné).

[Correction ▼](#)

[005535]

Exercice 2

Déterminer et construire la développée

1. $\begin{cases} x = R(\cos t + \ln |\tan \frac{t}{2}|) \\ y = R \sin t \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$.
3. $y = x^3$

[Correction ▼](#)

[005536]

Exercice 3

Trouver le point de la courbe d'équation $y = \ln x$ en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

[Correction ▼](#)

[005537]

Exercice 4

Soit (Γ) la courbe d'équation $y = \ln(\cos x)$, pour $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Calculer l'abscisse curviligne s quand O est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des x croissants. Trouver une relation entre R et s . Tracer (Γ) et sa développée.

[Correction ▼](#)

[005538]

Exercice 5

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note (Γ_λ) la courbe d'équation $y = \lambda x e^{-x}$. Quel est le lieu des centres de courbure C_λ en O à (Γ_λ) quand λ décrit \mathbb{R} .

[Correction ▼](#)

[005539]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. L'astroïde complète est obtenue quand t décrit $[-\pi, \pi]$ et pour des raisons de symétrie, $L = 4 \int_0^\pi 2 \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt$.

Or $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} -3a \sin t \cos^2 t \\ 3a \cos t \sin^2 t \end{pmatrix} = 3a \sin t \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ et donc $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin(2t)|$ puis

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 6a \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

$$\boxed{L = 6a.}$$

2. $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin t \cos t \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$ et donc $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 2R \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$ puis

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4R \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8R.$$

$$\boxed{L = 8R.}$$

3. Une représentation paramétrique de Γ est $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$, $0 \leq t \leq a$ et donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} dt = p \int_0^{a/p} \sqrt{u^2 + 1} du \\ &= p \left(\left[u \sqrt{u^2 + 1} \right]_0^{a/p} - \int_0^{a/p} \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 1}} du \right) = a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} - p \int_0^{a/p} \frac{u^2 + 1 - 1}{\sqrt{u^2 + 1}} du \\ &= a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} - L + p \operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \left(a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} + p \operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right) \right).}$$

4. La cardioïde complète est obtenue quand θ décrit $[-\pi, \pi]$.

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = a \left((-\sin \theta) \vec{u}_\theta + (1 + \cos \theta) \vec{v}_\theta \right) = 2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{v}_\theta \right).$$

Comme le vecteur $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{v}_\theta$ est unitaire, $\left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = |2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|$ puis

$$L = \int_{-\pi}^\pi |2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| dt = 4a \int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) dt = 8a \left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^\pi = 8a.$$

$$\boxed{L = 8a.}$$

Correction de l'exercice 2 ▲

On obtient la courbe complète quand t décrit $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Puisque $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$ et $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$, on se contente d'étudier et de construire la courbe quand $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe (Oy) puis d'axe (Ox) . Pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(-\sin t + \frac{1}{\sin t}) \\ R \cos t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix} = R \frac{\cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = R \cotan t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $R \cotan t > 0$ pour $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = R \cotan t \text{ puis } \vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = t$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = R \cotan t,$$

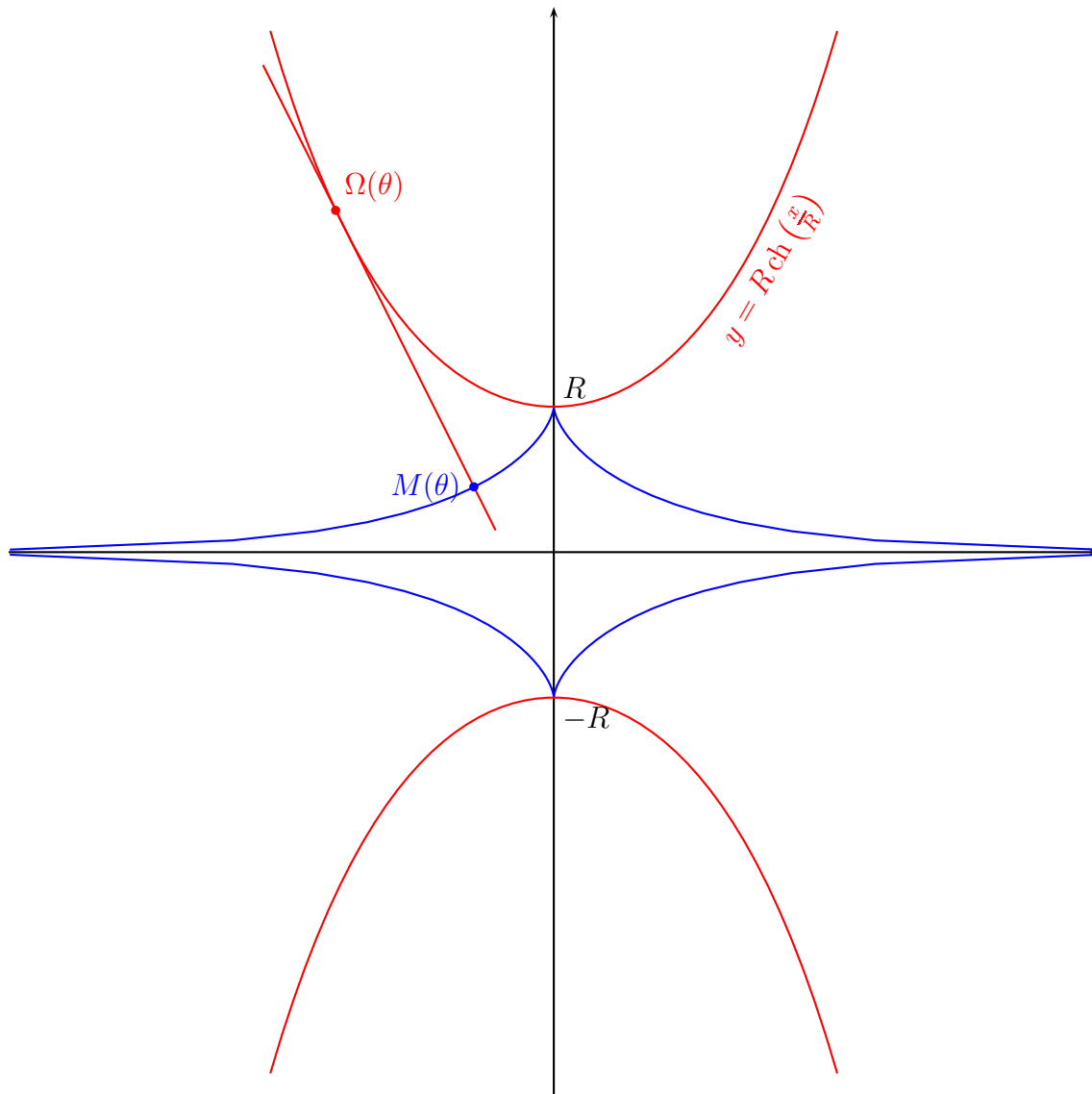
puis

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= M(t) + \rho(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} R(\cos t + \ln |\tan \frac{t}{2}|) \\ R \sin t \end{pmatrix} + R \cotan t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \ln |\tan \frac{t}{2}| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R \ln |\tan \frac{t}{2}| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}$, $t \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ (en complétant par symétrie). Quand t décrit $]0, \pi[$, on effectue alors le changement de paramètres $t \mapsto R \ln |\tan \frac{t}{2}| = u$ qui est un C^1 -difféomorphisme de $]0, \pi[$ sur \mathbb{R} . On obtient $x = u$ puis

$$y = \frac{R}{\frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}} = \frac{R}{2} \left(\tan \frac{t}{2} + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \right) = R \frac{e^{u/R} + e^{-u/R}}{2} = R \operatorname{ch} \left(\frac{u}{R} \right).$$

Le support de la développée sur $]0, \pi[$ est aussi le support de l'arc $u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ R \operatorname{ch} \left(\frac{u}{R} \right) \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ ou encore la chaînette d'équation cartésienne $y = R \operatorname{ch} \left(\frac{x}{R} \right)$.



Quand t décrit $[0, 2\pi]$, on obtient une arche de cycloïde complète. Les autres arches s'en déduisent par translations de vecteurs $2k\pi R \vec{i}$. Pour $t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le point $M(t)$ est régulier pour $t \in]0, 2\pi[$ et pour $t \in]0, 2\pi[$, $2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$. Puisque le vecteur $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$ et d'autre part, on peut prendre $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$. En notant $\rho(t)$ le rayon de courbure au point $M(t)$,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -4R \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

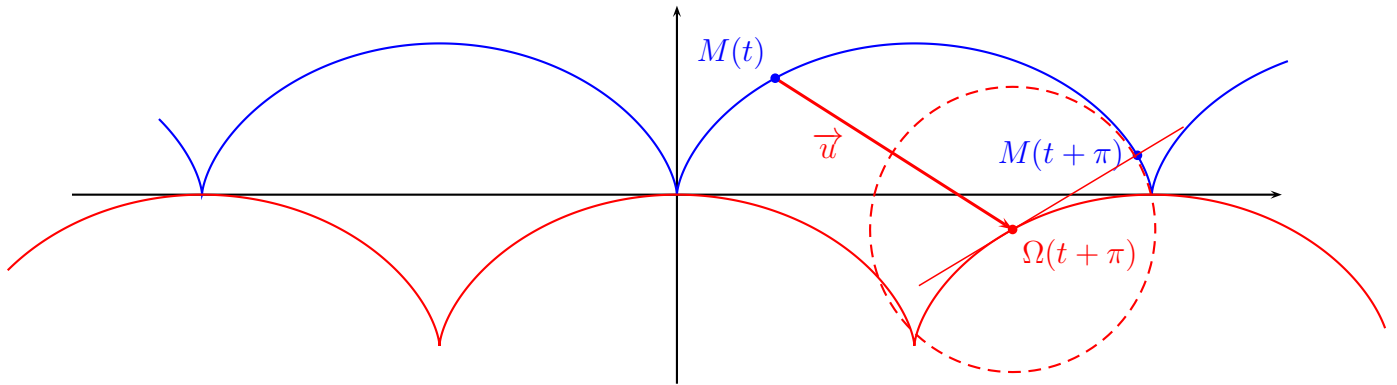
et donc

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= M(t) + \rho(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix} - 4R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) + 2R \sin t \\ R(1 - \cos t) - 2R(1 - \cos t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R(t + \sin t) \\ -R(1 - \cos t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc $t \mapsto \begin{pmatrix} R(t + \sin t) \\ -R(1 - \cos t) \end{pmatrix}$. Poursuivons.

$$\Omega(t + \pi) = \begin{pmatrix} R(t + \pi - \sin t) \\ -R(1 + \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi R \\ -2R \end{pmatrix} = t_{\vec{u}}(M(t)) \text{ où } \vec{u} = (\pi R, -2R).$$

Ainsi, le centre de courbure au point $M(t + \pi)$ est le translaté du point $M(t)$ dans la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$ et donc la développée de la cycloïde est la translatée de la cycloïde par la translation de vecteur $(\pi R, -2R)$. En particulier, c'est encore une cycloïde.



\mathcal{C} est le support de la courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$. $M(t)$ est birégulier si et seulement si $t \neq 0$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, $\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$. Par suite

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 9t^4} \text{ et } \vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'une part $\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part, puisque les coordonnées de $\vec{\tau}(t)$ sont positives, on peut prendre $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$. Par suite, pour $t \neq 0$

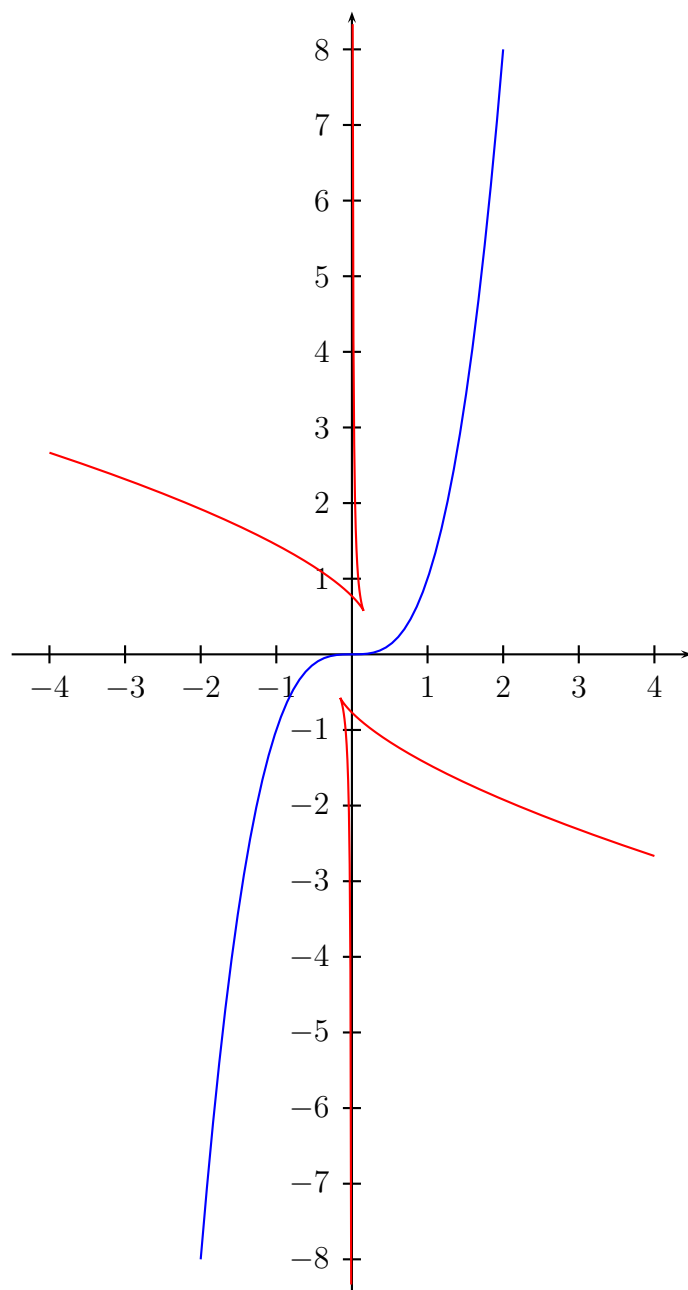
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(-\frac{1}{2}\right) 36t^3 (1+9t^4)^{-3/2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}} = \frac{6t}{1+9t^4}$$

puis

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

et donc

$$\Omega(t) = M(t) + R(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{1+9t^4}{6t} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - \frac{9t^5}{2} \\ \frac{5t^3}{2} + \frac{1}{6t} \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 3 ▲

\mathcal{C} est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}, t > 0$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \\ 1/(t\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc, $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$ puis

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

et finalement

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Pour $t > 0$, posons $f(t) = |R(t)| = \frac{1}{t}(t^2 + 1)^{3/2}$. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour $t > 0$,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}(t^2 + 1)^{3/2} + 3(t^2 + 1)^{1/2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2 + 1) + 3t^2) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2 - 1).$$

f admet un minimum en $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ égal à $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Le rayon de courbure minimum est $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et est le rayon de courbure en $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 4 ▲

\mathcal{C} est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix}$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t / \cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque $\frac{1}{\cos t} > 0$ et que $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ est unitaire, on a successivement $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}$, $\vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$, $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\alpha(t) = -t$ puis

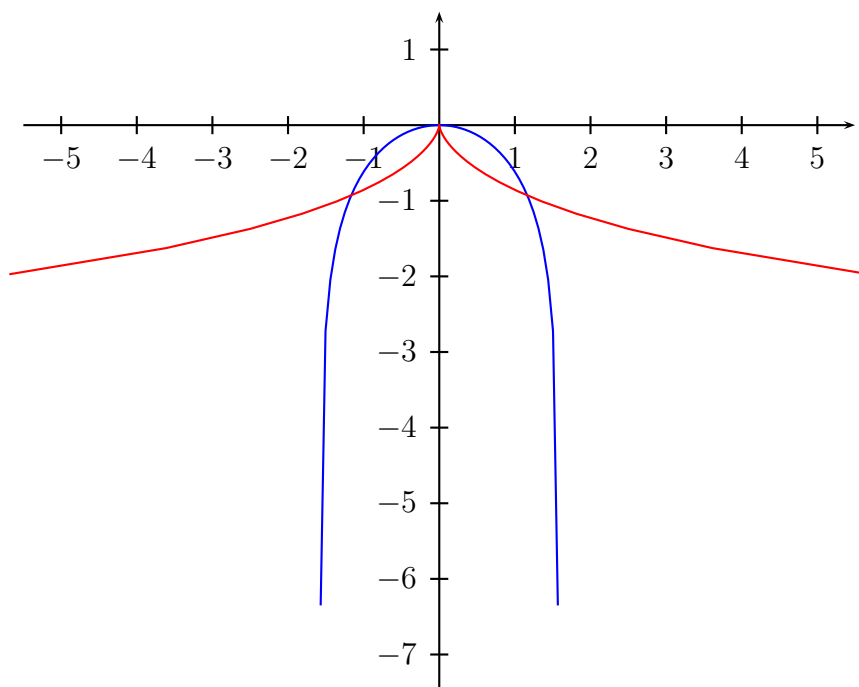
$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, si s est l'abscisse curviligne d'origine 0 orientée dans le sens des t croissants,

$$s(t) = \int_0^t s'(u) du = \int_0^t \frac{1}{\cos u} du = \ln \left| \tan \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Enfin,

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos t) - 1 \end{pmatrix}.$$



Correction de l'exercice 5 ▲

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. \mathcal{C}_λ est le support de l'arc paramétré $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$. \mathcal{C}_0 est l'axe (Ox) et donc C_0 n'est pas défini, puis $\mathcal{C}_{-\lambda}$ est la symétrique de \mathcal{C}_λ par rapport à l'axe (Ox) et donc $C_{-\lambda}$ est le symétrique de C_λ par rapport à l'axe (Ox) . Dans ce qui suit, on suppose $\lambda > 0$.

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Par suite $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}$, $\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$,

$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}} \begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$ et on peut prendre $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}}\right)$ (car $\vec{t}(t)$ a une abscisse strictement positive). Ensuite,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)e^{-2t}}{2(1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t})^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}}}$$

et donc $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{-4\lambda^2}{2(1 + \lambda^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2}}} = \frac{-2\lambda}{1 + \lambda^2}$ puis $R(0) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0) = -\frac{1}{2\lambda}(1 + \lambda^2)^{3/2}$ et donc

$$C_\lambda = \Omega(0) = M(0) + R(0)\vec{n}(0) = O - \frac{1}{2\lambda}(1 + \lambda^2)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \lambda^2)/2 \\ -(1 + \lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des C_λ , $\lambda \in \mathbb{R}^*$, est le support de l'arc $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \lambda^2)/2 \\ -(1 + \lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

