

## Etude métrique des courbes

---

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur [www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr)

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile \*\*\*\*\* très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice 1

Longueur  $L$  de  $(\Gamma)$  dans chacun des cas suivants :

1.  $\Gamma$  est l'astroïde de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  ( $a > 0$  donné).
2.  $\Gamma$  est l'arche de cycloïde de représentation paramétrique  $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
3.  $\Gamma$  est l'arc de parabole d'équation cartésienne  $x^2 = 2py$ ,  $0 \leq x \leq a$  ( $p > 0$  et  $a > 0$  donnés).
4.  $\Gamma$  est la cardioïde d'équation polaire  $r = a(1 + \cos \theta)$  ( $a > 0$  donné).

[Correction ▼](#)

[005535]

### Exercice 2

Déterminer et construire la développée

1.  $\begin{cases} x = R(\cos t + \ln |\tan \frac{t}{2}|) \\ y = R \sin t \end{cases}$
2.  $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ .
3.  $y = x^3$

[Correction ▼](#)

[005536]

### Exercice 3

Trouver le point de la courbe d'équation  $y = \ln x$  en lequel la valeur absolue du rayon de courbure est minimum.

[Correction ▼](#)

[005537]

### Exercice 4

Soit  $(\Gamma)$  la courbe d'équation  $y = \ln(\cos x)$ , pour  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ . Calculer l'abscisse curviligne  $s$  quand  $O$  est l'origine des abscisses curvilignes et l'orientation est celle des  $x$  croissants. Trouver une relation entre  $R$  et  $s$ . Tracer  $(\Gamma)$  et sa développée.

[Correction ▼](#)

[005538]

### Exercice 5

Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $(\Gamma_\lambda)$  la courbe d'équation  $y = \lambda x e^{-x}$ . Quel est le lieu des centres de courbure  $C_\lambda$  en  $O$  à  $(\Gamma_\lambda)$  quand  $\lambda$  décrit  $\mathbb{R}$ .

[Correction ▼](#)

[005539]

## Correction de l'exercice 1 ▲

1. L'astroïde complète est obtenue quand  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$  et pour des raisons de symétrie,  $L = 4 \int_0^\pi 2 \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt$ .

Or  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} -3a \sin t \cos^2 t \\ 3a \cos t \sin^2 t \end{pmatrix} = 3a \sin t \cos t \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  et donc  $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 3a |\sin t \cos t| = \frac{3a}{2} |\sin(2t)|$  puis

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin(2t) dt = 6a \left[ -\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = 6a.$$

$$\boxed{L = 6a.}$$

2.  $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin t \cos t \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}$  et donc  $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| = 2R \left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|$  puis

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt = 2R \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4R \left[ -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_0^{2\pi} = 8R.$$

$$\boxed{L = 8R.}$$

3. Une représentation paramétrique de  $\Gamma$  est  $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2}{2p} \end{cases}$ ,  $0 \leq t \leq a$  et donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{t^2}{p^2}} dt = p \int_0^{a/p} \sqrt{u^2 + 1} du \\ &= p \left( \left[ u \sqrt{u^2 + 1} \right]_0^{a/p} - \int_0^{a/p} \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 1}} du \right) = a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} - p \int_0^{a/p} \frac{u^2 + 1 - 1}{\sqrt{u^2 + 1}} du \\ &= a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} - L + p \operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right), \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{L = \frac{1}{2} \left( a \sqrt{1 + \frac{a^2}{p^2}} + p \operatorname{argsh}\left(\frac{a}{p}\right) \right).}$$

4. La cardioïde complète est obtenue quand  $\theta$  décrit  $[-\pi, \pi]$ .

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = a \left( (-\sin \theta) \vec{u}_\theta + (1 + \cos \theta) \vec{v}_\theta \right) = 2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{v}_\theta \right).$$

Comme le vecteur  $-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u}_\theta + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{v}_\theta$  est unitaire,  $\left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = |2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|$  puis

$$L = \int_{-\pi}^\pi |2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| d\theta = 4a \int_0^\pi \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 8a \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]_0^\pi = 8a.$$

$$\boxed{L = 8a.}$$

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

On obtient la courbe complète quand  $t$  décrit  $]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ . Puisque  $M(-t) = s_{(Ox)}(M(t))$  et  $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$ , on se contente d'étudier et de construire la courbe quand  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe  $(Oy)$  puis d'axe  $(Ox)$ . Pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ ,

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} R(-\sin t + \frac{1}{\sin t}) \\ R \cos t \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 t}{\sin t} \\ \cos t \end{pmatrix} = R \frac{\cos t}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = R \cotan t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque  $R \cotan t > 0$  pour  $t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et puisque le vecteur  $\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = R \cotan t \text{ puis } \vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

On a donc  $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  et d'autre part, on peut prendre  $\alpha(t) = t$ . En notant  $\rho(t)$  le rayon de courbure au point  $M(t)$ ,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = R \cotan t,$$

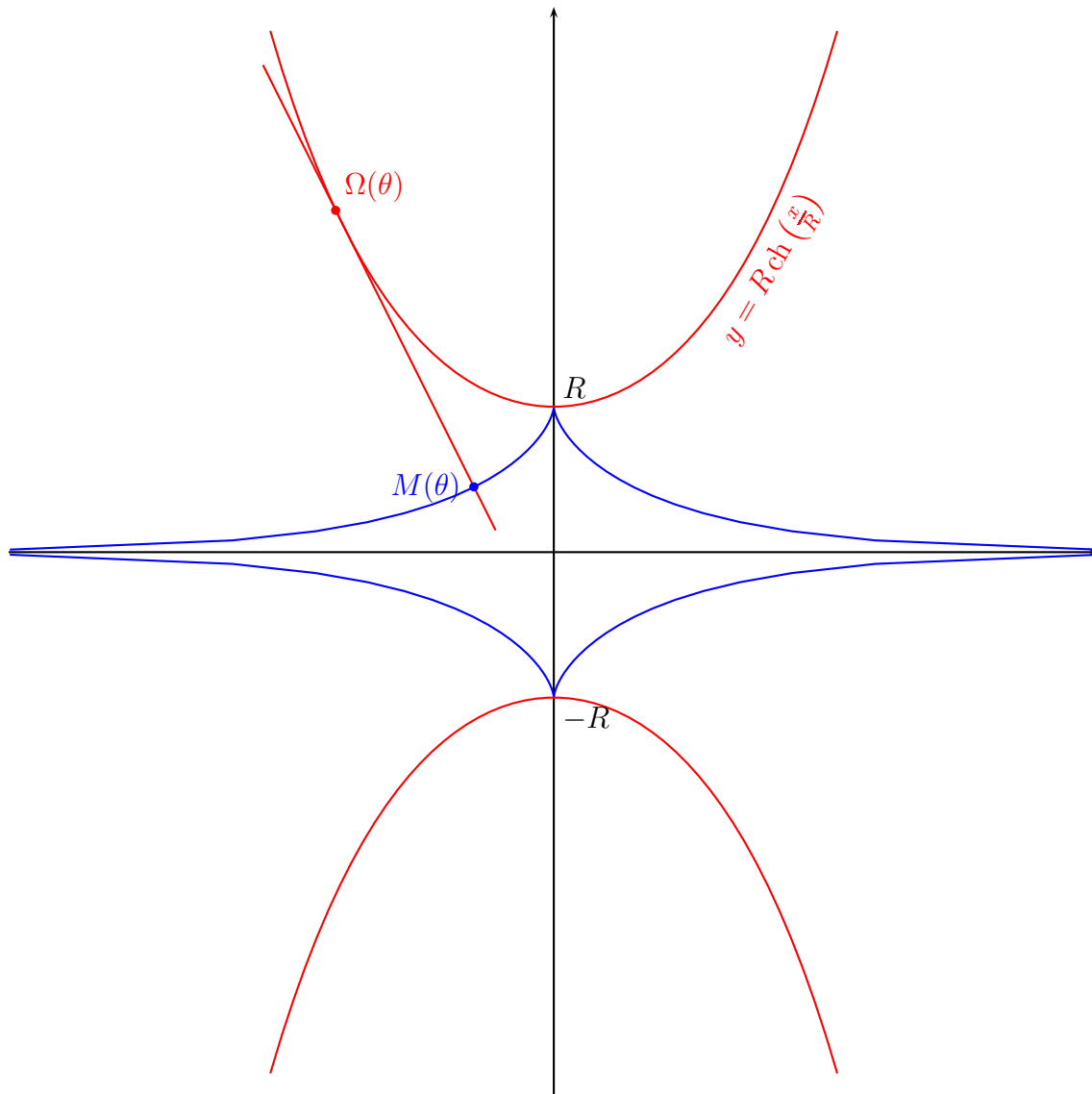
puis

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= M(t) + \rho(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} R(\cos t + \ln |\tan \frac{t}{2}|) \\ R \sin t \end{pmatrix} + R \cotan t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R \ln |\tan \frac{t}{2}| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc  $t \mapsto \begin{pmatrix} R \ln |\tan \frac{t}{2}| \\ \frac{R}{\sin t} \end{pmatrix}$ ,  $t \in ]-\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$  (en complétant par symétrie). Quand  $t$  décrit  $]0, \pi[$ , on effectue alors le changement de paramètres  $t \mapsto R \ln |\tan \frac{t}{2}| = u$  qui est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $]0, \pi[$  sur  $\mathbb{R}$ . On obtient  $x = u$  puis

$$y = \frac{R}{\frac{2 \tan \frac{t}{2}}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}} = \frac{R}{2} \left( \tan \frac{t}{2} + \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \right) = R \frac{e^{u/R} + e^{-u/R}}{2} = R \operatorname{ch} \left( \frac{u}{R} \right).$$

Le support de la développée sur  $]0, \pi[$  est aussi le support de l'arc  $u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ R \operatorname{ch} \left( \frac{u}{R} \right) \end{pmatrix}$ ,  $u \in \mathbb{R}$  ou encore la chaînette d'équation cartésienne  $y = R \operatorname{ch} \left( \frac{x}{R} \right)$ .



Quand  $t$  décrit  $[0, 2\pi]$ , on obtient une arche de cycloïde complète. Les autres arches s'en déduisent par translations de vecteurs  $2k\pi R \vec{i}$ . Pour  $t \in [0, 2\pi]$

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} R(1 - \cos t) \\ R \sin t \end{pmatrix} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Le point  $M(t)$  est régulier pour  $t \in ]0, 2\pi[$  et pour  $t \in ]0, 2\pi[$ ,  $2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ . Puisque le vecteur  $\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$  est unitaire, on a

$$\frac{ds}{dt} = 2R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \text{ et } \vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$  et d'autre part, on peut prendre  $\alpha(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}$ . En notant  $\rho(t)$  le rayon de courbure au point  $M(t)$ ,

$$\rho(t) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{2R \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -4R \sin\left(\frac{t}{2}\right),$$

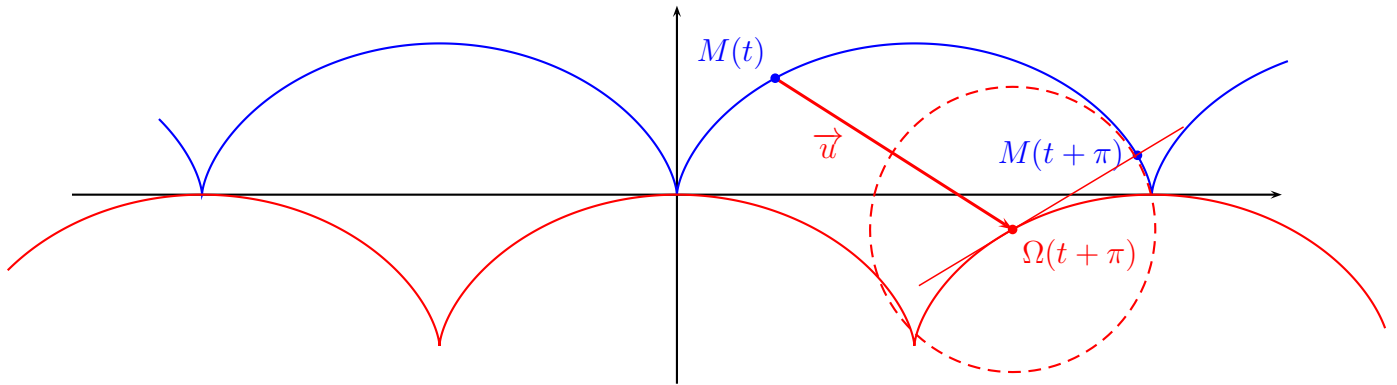
et donc

$$\begin{aligned}\Omega(t) &= M(t) + \rho(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix} - 4R \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{pmatrix} -\cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) + 2R \sin t \\ R(1 - \cos t) - 2R(1 - \cos t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R(t + \sin t) \\ -R(1 - \cos t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La développée cherchée est l'arc  $t \mapsto \begin{pmatrix} R(t + \sin t) \\ -R(1 - \cos t) \end{pmatrix}$ . Poursuivons.

$$\Omega(t + \pi) = \begin{pmatrix} R(t + \pi - \sin t) \\ -R(1 + \cos t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(t - \sin t) \\ R(1 - \cos t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi R \\ -2R \end{pmatrix} = t_{\vec{u}}(M(t)) \text{ où } \vec{u} = (\pi R, -2R).$$

Ainsi, le centre de courbure au point  $M(t + \pi)$  est le translaté du point  $M(t)$  dans la translation de vecteur  $(\pi R, -2R)$  et donc la développée de la cycloïde est la translatée de la cycloïde par la translation de vecteur  $(\pi R, -2R)$ . En particulier, c'est encore une cycloïde.



$\mathcal{C}$  est le support de la courbe paramétrée  $t \mapsto M(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix}$ .  $M(t)$  est birégulier si et seulement si  $t \neq 0$ .

Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ . Par suite

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 9t^4} \text{ et } \vec{\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Donc, d'une part  $\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+9t^4}} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et d'autre part, puisque les coordonnées de  $\vec{\tau}(t)$  sont positives, on peut prendre  $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+9t^4}}\right)$ . Par suite, pour  $t \neq 0$

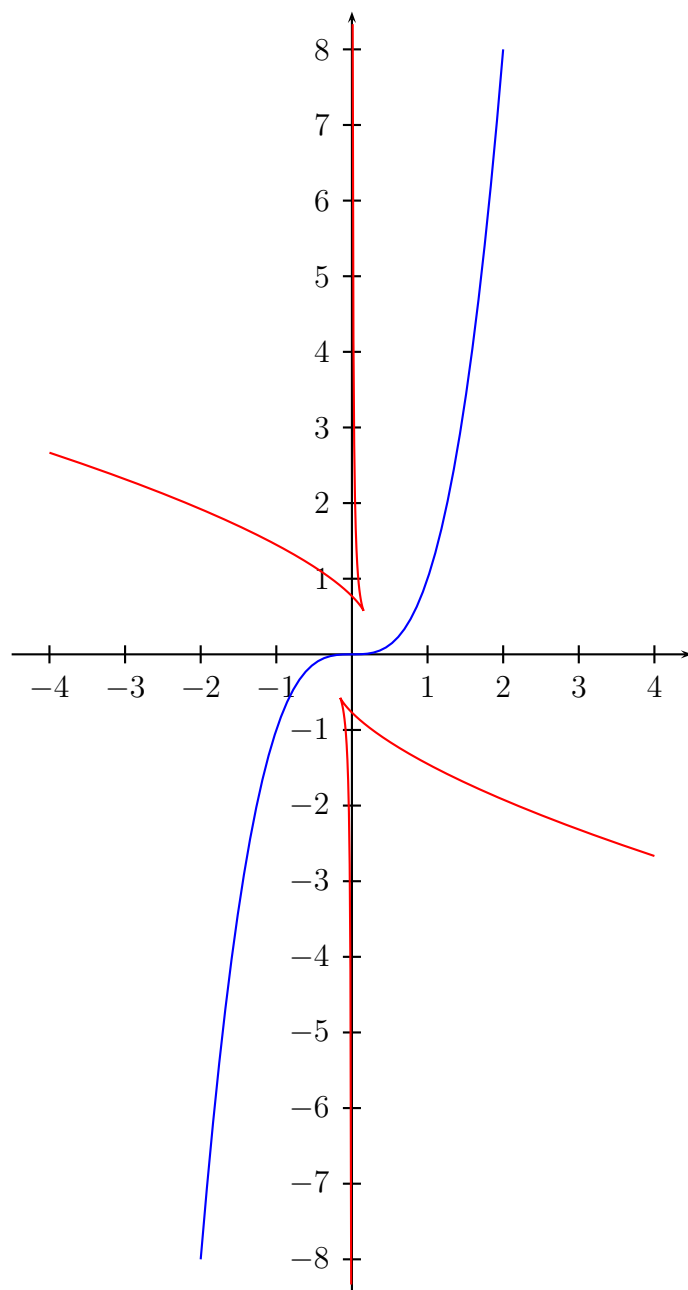
$$\frac{d\alpha}{dt} = -\left(-\frac{1}{2}\right) 36t^3 (1+9t^4)^{-3/2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+9t^4}}} = \frac{6t}{1+9t^4}$$

puis

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = \frac{(1+9t^4)^{3/2}}{6t},$$

et donc

$$\Omega(t) = M(t) + R(t) \vec{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} + \frac{1+9t^4}{6t} \begin{pmatrix} -3t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t}{2} - \frac{9t^5}{2} \\ \frac{5t^3}{2} + \frac{1}{6t} \end{pmatrix}.$$



### Correction de l'exercice 3 ▲

$\mathcal{C}$  est le support de l'arc paramétré  $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln t \end{pmatrix}, t > 0$ .

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix} = \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \\ 1/(t\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}) \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t} \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{pmatrix}.$$

Donc,  $\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$  et on peut prendre  $\alpha(t) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$  puis

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{t}{(t^2+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+t^2}}} = -\frac{1}{t^2+1},$$

et finalement

$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{1}{t}(t^2+1)^{3/2}.$$

Pour  $t > 0$ , posons  $f(t) = |R(t)| = \frac{1}{t}(t^2 + 1)^{3/2}$ .  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour  $t > 0$ ,

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2}(t^2 + 1)^{3/2} + 3(t^2 + 1)^{1/2} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(-(t^2 + 1) + 3t^2) = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}(2t^2 - 1).$$

$f$  admet un minimum en  $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$  égal à  $\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + 1\right)^{3/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

Le rayon de courbure minimum est  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  et est le rayon de courbure en  $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ .

### Correction de l'exercice 4 ▲

$\mathcal{C}$  est le support de l'arc paramétré  $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix}$ .

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin t / \cos t \end{pmatrix} = \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Puisque  $\frac{1}{\cos t} > 0$  et que  $\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$  est unitaire, on a successivement  $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}$ ,  $\vec{\tau}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ ,  $\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ ,  $\alpha(t) = -t$  puis

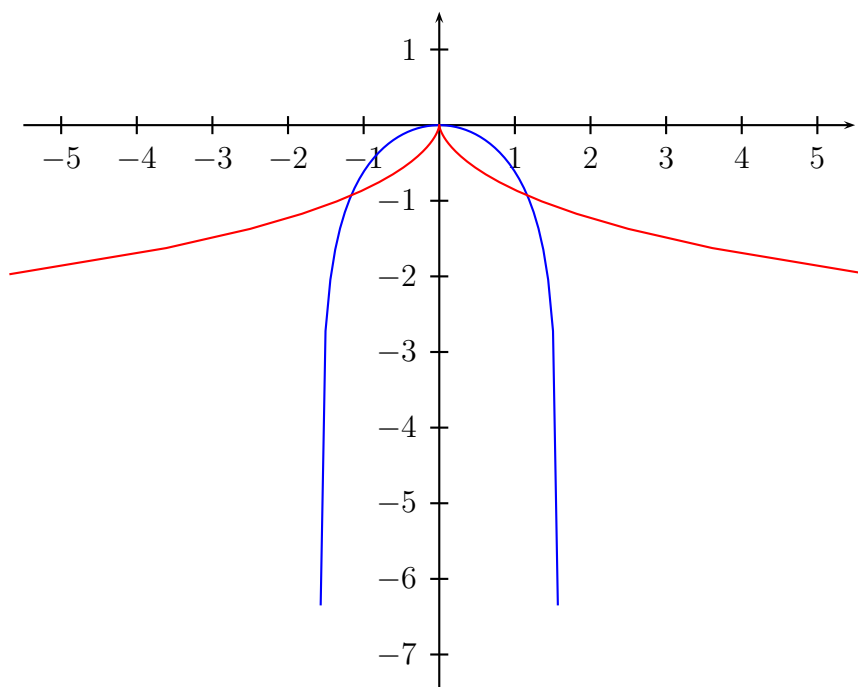
$$R(t) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt} = -\frac{ds}{dt} = -\frac{1}{\cos t}.$$

Ensuite, si  $s$  est l'abscisse curviligne d'origine 0 orientée dans le sens des  $t$  croissants,

$$s(t) = \int_0^t s'(u) du = \int_0^t \frac{1}{\cos u} du = \ln \left| \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

Enfin,

$$\Omega(t) = M(t) + R(t)\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \ln(\cos t) \end{pmatrix} - \frac{1}{\cos t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \tan t \\ \ln(\cos t) - 1 \end{pmatrix}.$$



### Correction de l'exercice 5 ▲

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\mathcal{C}_\lambda$  est le support de l'arc paramétré  $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \lambda t e^{-t} \end{pmatrix}$ .  $\mathcal{C}_0$  est l'axe  $(Ox)$  et donc  $C_0$  n'est pas défini, puis  $\mathcal{C}_{-\lambda}$  est la symétrique de  $\mathcal{C}_\lambda$  par rapport à l'axe  $(Ox)$  et donc  $C_{-\lambda}$  est le symétrique de  $C_\lambda$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ . Dans ce qui suit, on suppose  $\lambda > 0$ .

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Par suite  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}$ ,  $\vec{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda(1-t)e^{-t} \end{pmatrix}$ ,

$\vec{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}} \begin{pmatrix} -\lambda(1-t)e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$  et on peut prendre  $\alpha(t) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}}\right)$  (car  $\vec{t}(t)$  a une abscisse strictement positive). Ensuite,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\lambda^2((2t-2)-2(t-1)^2)e^{-2t}}{2(1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t})^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2(1-t)^2 e^{-2t}}}}$$

et donc  $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \frac{-4\lambda^2}{2(1 + \lambda^2)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \lambda^2}}} = \frac{-2\lambda}{1 + \lambda^2}$  puis  $R(0) = \frac{ds/dt}{d\alpha/dt}(0) = -\frac{1}{2\lambda}(1 + \lambda^2)^{3/2}$  et donc

$$C_\lambda = \Omega(0) = M(0) + R(0)\vec{n}(0) = O - \frac{1}{2\lambda}(1 + \lambda^2)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \lambda^2)/2 \\ -(1 + \lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des  $C_\lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , est le support de l'arc  $\lambda \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \lambda^2)/2 \\ -(1 + \lambda^2)/(2\lambda) \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .



