



Courbes en polaires

Exercices de Jean-Louis Rouget. Retrouver aussi cette fiche sur www.maths-france.fr

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile ***** très difficile

I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice 1

Construire les courbes suivantes :

1. $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$,
2. $r = \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right)$,
3. $r = ae^{b\theta}$, $(a, b) \in]0, +\infty[^2$,
4. $r = 2\cos(2\theta) + 1$,
5. $r = \tan\left(\frac{2\theta}{3}\right)$.

[Correction ▼](#)

[005530]

Exercice 2

Etude complète de la courbe d'équation polaire $r = \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$.

[Correction ▼](#)

[005531]

Exercice 3 La cardioïde

Soit la courbe d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$.

1. Construire la courbe.
2. Longueur et développée.

[Correction ▼](#)

[005532]

Exercice 4

Construire la courbe d'équation cartésienne $x^2(x^2 + y^2) - (y - x)^2 = 0$ après être passé en polaires .

[Correction ▼](#)

[005533]

Exercice 5

Développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^\theta$ ($a > 0$).

[Correction ▼](#)

[005534]

Correction de l'exercice 1 ▲

1. (**Lemniscate de BERNOULLI.**) Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $r = \sqrt{\cos(2\theta)}$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r : \theta \mapsto \sqrt{\cos(2\theta)}$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(\theta + 2\pi) = [r(\theta + 2\pi), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta + 2\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) . • $\theta \in D \Leftrightarrow \pi - \theta \in D$ et pour $\theta \in D$,

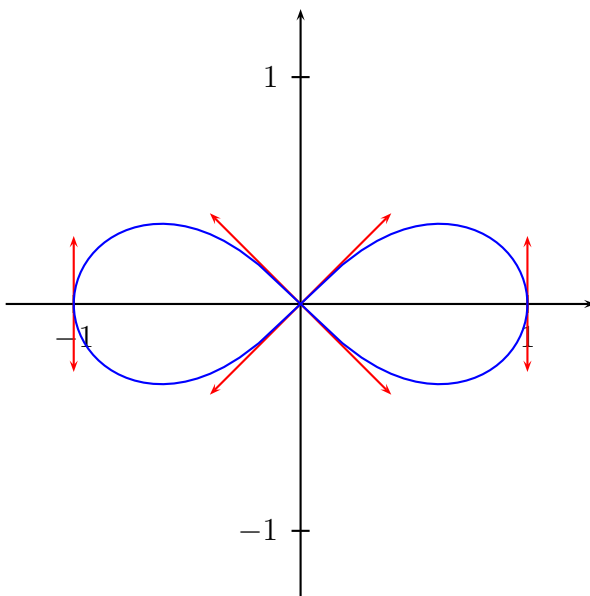
$$M(\pi - \theta) = [r(\pi - \theta), \pi - \theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis d'axe (Ox) . Pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\theta \in D \Leftrightarrow \cos(2\theta) \geq 0 \Leftrightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$. On étudie donc la courbe sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. **Variations et signe de r .** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, strictement positive sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ et s'annule en $\frac{\pi}{4}$. **Etude en $\frac{\pi}{4}$.** $M(\frac{\pi}{4}) = O$ et donc la tangente en $M(\frac{\pi}{4})$ est la droite passant par O et d'angle polaire $\frac{\pi}{4}$ ou encore la droite d'équation $y = x$.

Etude en 0. $M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$. Pour $\theta \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$,

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta}(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}} \vec{u}_\theta + \sqrt{\cos(2\theta)} \vec{v}_\theta \text{ et donc } \frac{d\vec{M}}{d\theta}(0) = \vec{v}_0 = \vec{j}.$$

$M(0)$ est le point de coordonnées cartésiennes $(1, 0)$ et la tangente en $M(0)$ est dirigée par \vec{j}



2. Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $r = \sin(\frac{2\theta}{3})$. **Domaine d'étude.** • Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$M(\theta + 6\pi) = [r(\theta + 6\pi), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta + 6\pi] = [r(\theta), \theta] = M(\theta).$$

On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$.

• Pour $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$,

$$M(-\theta) = [r(-\theta), -\theta] = [-r(\theta), -\theta] = [r(\theta), \pi - \theta] = s_{(Oy)}(M(\theta)).$$

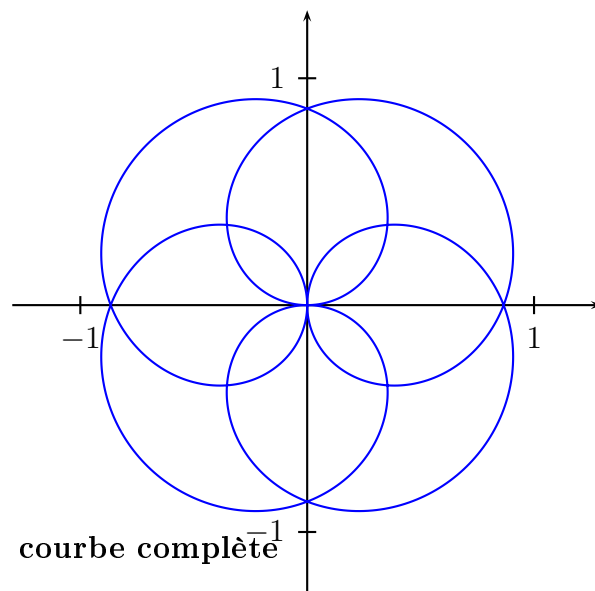
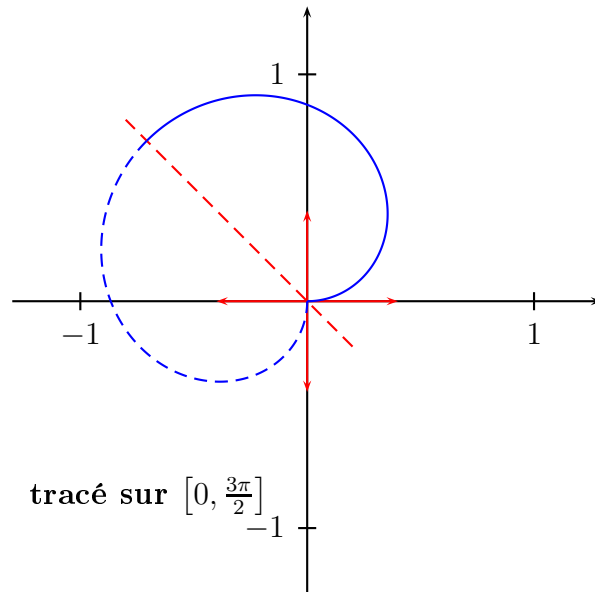
On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) . • Pour $\theta \in [0, 3\pi]$, $M(3\pi - \theta) = [r(3\pi - \theta), 3\pi - \theta] = [-r(\theta), 3\pi - \theta] = [r(\theta), -\theta] = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis d'axe (Oy) .

• Pour $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$, $M(\frac{3\pi}{2} - \theta) = [r(\frac{3\pi}{2} - \theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = s_{y=-x}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axes la droite d'équation $y = -x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy) .

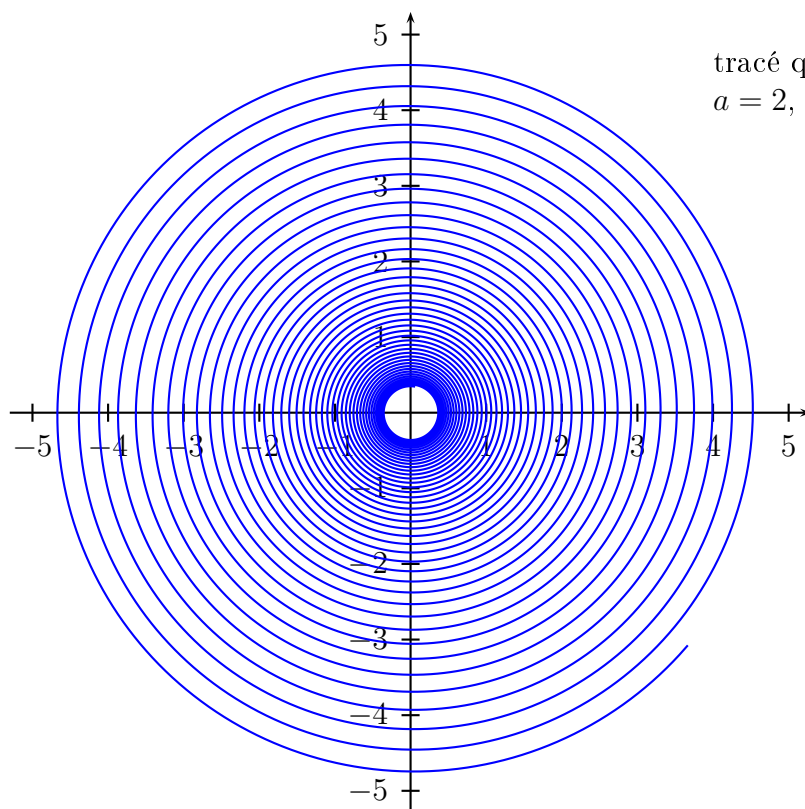
• **Remarque.** La fonction r admet 3π pour plus petite période strictement positive. Pourtant, on n'obtient pas la courbe complète quand θ décrit $[0, 3\pi]$ car 3π ne fournit pas un nombre entier de tours. Plus précisément,

$$M(\theta + 3\pi) = [r(\theta + 3\pi), \theta + 3\pi] = [r(\theta), \theta + \pi] = s_O(M(\theta)).$$

Variations et signe de r . La fonction r est strictement positive sur $]0, \frac{3\pi}{4}]$ et s'annule en 0. La fonction r est strictement croissante sur $[0, \frac{3\pi}{4}]$. • $M(0)$ est le point O . La tangente en $M(0)$ est la droite passant par O d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox) .



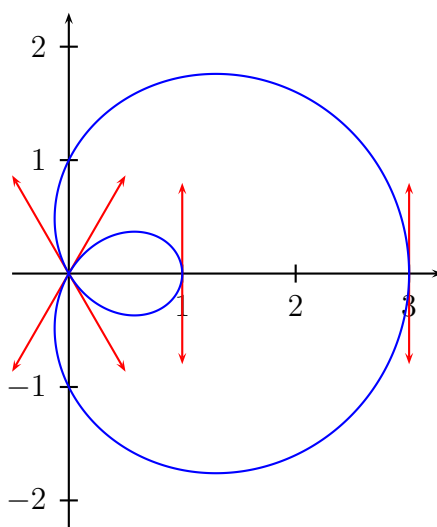
3. Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $r = ae^{b\theta}$. L'étude est très brève. La fonction $r : \theta \mapsto ae^{b\theta}$ est strictement positive et strictement croissante sur \mathbb{R} . Tout en tournant, on ne cesse de s'écarter de l'origine : la courbe est une spirale.



tracé quand
 $a = 2, b = 0,01$

4. Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $r = 2 \cos(\theta) + 1$.

Domaine d'étude. • Pour $\theta \in \mathbb{R}$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. • Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $M(-\theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) . **Variations et signe de r .** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$. La fonction r est strictement positive sur $[0, \frac{2\pi}{3}[$, strictement négative sur $]\frac{2\pi}{3}, \pi]$ et s'annule en $\frac{2\pi}{3}$. Donc la fonction $\theta \mapsto OM(\theta) = |r(\theta)|$ est strictement décroissante sur $[0, \frac{2\pi}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$. • $M(\frac{2\pi}{3})$ est le point O . La tangente en $M(\frac{2\pi}{3})$ est la droite passant par O d'angle polaire $\frac{2\pi}{3}$ c'est-à-dire la droite d'équation $y = -\sqrt{3}x$. • Par symétrie par rapport à (Ox) , les tangentes en $M(0)$ et $M(\pi)$ sont parallèles à (Oy) .



5. Soit \mathcal{C} la courbe d'équation polaire $r = \tan(\frac{2\theta}{3})$. **Domaine d'étude.** Notons D le domaine de définition de la fonction $r : \theta \mapsto \tan(\frac{2\theta}{3})$. • $\theta \in D \Leftrightarrow \theta + 6\pi \in D$ et $M(\theta + 6\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 6π comme $[-3\pi, 3\pi]$. • $\theta \in D \Leftrightarrow -\theta \in D$ et

$M(-\theta) = s_{(Oy)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, 3\pi]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) . • $\theta \in D \Leftrightarrow 3\pi - \theta \in D$ et $M(3\pi - \theta) = s_{(Ox)}(M(\theta))$. On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) puis par réflexion d'axe (Oy) . • $\theta \in D \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} - \theta \in D$ et

$$M\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = [-r(\theta), \frac{3\pi}{2} - \theta] = [r(\theta), \frac{\pi}{2} - \theta] = s_{y=x}(M(\theta)).$$

On étudie et on construit la portion de courbe correspondant à $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$ puis on obtient la courbe complète par réflexions successives d'axe la droite d'équation $y = x$, puis d'axe (Ox) et enfin d'axe (Oy) . • Pour $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}]$, $r(\theta)$ existe si et seulement si $\theta \neq \frac{3\pi}{4}$. On étudie donc sur $\theta \in [0, \frac{3\pi}{4}[$.

Variations et signe de r . La fonction r est strictement croissante sur $[0, \frac{3\pi}{4}[$, strictement positive sur $]0, \frac{3\pi}{4}[$ et s'annule en 0.

- La tangente en $M(0) = O$ est la droite passant par O et d'angle polaire 0 c'est-à-dire l'axe (Ox) .
- **Etude quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$.** Quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$ par valeurs inférieures, $r(\theta)$ tend vers $+\infty$. la courbe admet donc une direction asymptotique d'angle polaire $\frac{3\pi}{4}$ ou encore d'équation $y = -x$.

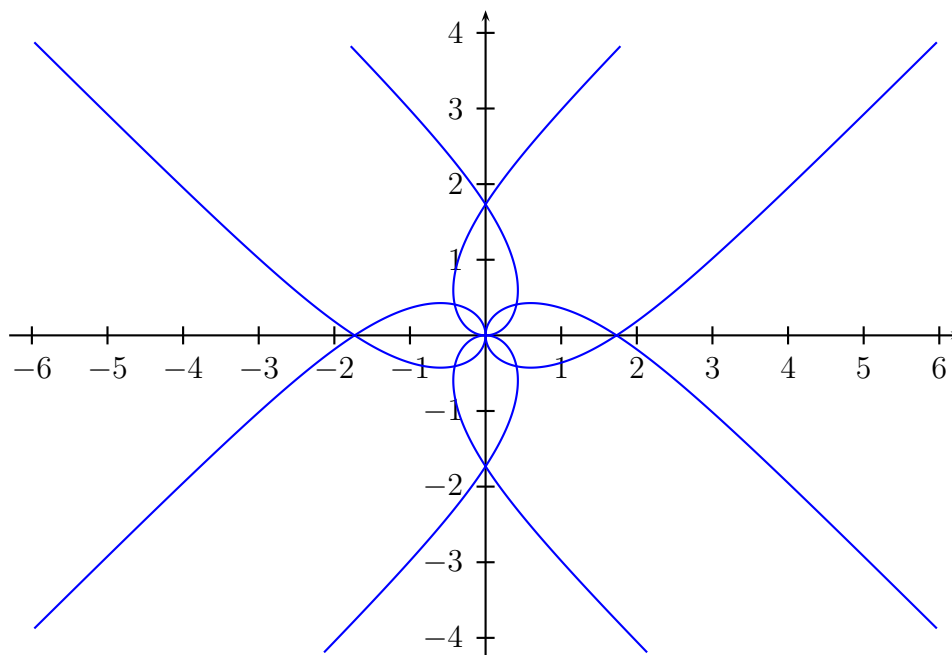
Recherchons une éventuelle droite asymptote. Pour cela, étudions $\lim_{\substack{\theta \rightarrow \frac{3\pi}{4} \\ \theta < \frac{3\pi}{4}}} r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right)$. Posons $h =$

$$\frac{3\pi}{4} - \theta \text{ ou encore } \theta = \frac{3\pi}{4} - h.$$

$$r(\theta) \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2h}{3}\right) \sin(-h) = -\cotan h \sin h = -\cosh \rightarrow -1.$$

Ainsi, \mathcal{C} admet une droite asymptote (D) quand θ tend vers $\frac{3\pi}{4}$. De plus,

$$M(x, y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{\frac{3\pi}{4}} = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = -1 \Leftrightarrow y = -x + \sqrt{2}.$$



Correction de l'exercice 2 ▲

Domaine d'étude. Notons D le domaine de définition de la fonction $r : \theta \mapsto \frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta+1}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \in D \Leftrightarrow \theta + 2\pi \in D$ et $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$. On obtient donc la courbe complète quand θ décrit un intervalle de longueur 2π comme $[-\pi, \pi]$. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, $2\sin\theta + 1 = 0 \Leftrightarrow \theta \in \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$. On étudie donc la courbe sur $[-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$. **Signe de r .**

θ	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$2 \cos \theta + 1$	-	-	0	+	+	0
$2 \sin \theta + 1$	+	0	-	-	0	+
signe de r	-		+	0	-	
					+	0
						-

Variations de r . La fonction r est dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$ et pour $\theta \in [-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\}$

$$r'(\theta) = \frac{-2 \sin \theta (2 \sin \theta + 1) - 2 \cos \theta (2 \cos \theta + 1)}{(2 \sin \theta + 1)^2} = \frac{-4 - 2 \cos \theta - 2 \sin \theta}{(2 \sin \theta + 1)^2} = \frac{-4 - 2\sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})}{(2 \sin \theta + 1)^2} < 0.$$

La fonction r est strictement décroissante sur $[-\pi, -\frac{5\pi}{6}[$, sur $]-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}[$ et sur $]-\frac{\pi}{6}, \pi]$. **Etude quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$.** $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) = -\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) = +\infty$. Donc la courbe \mathcal{C} admet une direction asymptotique d'angle

polaire $-\frac{5\pi}{6}$ ou encore d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$. Etudions maintenant l'existence d'une éventuelle droite asymptote et pour cela étudions $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{5\pi}{6}} r(\theta) \sin(\theta + \frac{5\pi}{6})$. On pose $h = \theta + \frac{5\pi}{6}$ ou encore $\theta = -\frac{5\pi}{6} + h$ de sorte que θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$ si et seulement si h tend vers 0. Quand h tend vers 0

$$r(\theta) \sin\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2 \cos\left(-\frac{5\pi}{6} + h\right) + 1}{2 \sin\left(-\frac{5\pi}{6} + h\right) + 1} \sin h = \frac{(1 - \sqrt{3} \cosh h) + \sin h}{-\sqrt{3} \sinh h + (1 - \cosh h)} \sin h \sim \frac{1 - \sqrt{3}}{-\sqrt{3}h} \times h = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, \mathcal{C} admet une droite asymptote (D_1) quand θ tend vers $-\frac{5\pi}{6}$. De plus

$$M(x, y) \in (D_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{-\frac{5\pi}{6}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Etude quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} r(\theta) = -\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow -\frac{\pi}{6}} r(\theta) = +\infty$. Donc la courbe \mathcal{C} admet une direction

asymptotique d'angle polaire $-\frac{\pi}{6}$ ou encore d'équation $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$. On pose ensuite $h = \theta + \frac{\pi}{6}$. Quand h tend vers 0

$$r(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2 \cos\left(-\frac{\pi}{6} + h\right) + 1}{2 \sin\left(-\frac{\pi}{6} + h\right) + 1} \sin h = \frac{(1 + \sqrt{3} \cosh h) + \sin h}{\sqrt{3} \sinh h + (1 - \cosh h)} \sin h \sim \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}h} \times h = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Par suite, \mathcal{C} admet une droite asymptote (D_2) quand θ tend vers $-\frac{\pi}{6}$. De plus

$$M(x, y) \in (D_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot \vec{v}_{-\frac{\pi}{6}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Tableau de variation de r .

θ	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$r'(\theta)$	-		-		-	
r	-1		$+\infty$		$+\infty$	-1
			\searrow		\searrow	
			$-\infty$		$-\infty$	

Recherche des points multiples. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in ([-\pi, \pi] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\})^2$ tel que $\theta_1 < \theta_2$. On suppose de plus que $\theta_1 \notin \{\pm\frac{2\pi}{3}\}$ et $\theta_1 \notin \{\pm\frac{2\pi}{3}\}$ de sorte que $M(\theta_1) \neq O$ et $M(\theta_2) \neq O$.

$$M(\theta_1) = M(\theta_2) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = r(\theta_1)) \text{ ou } (\exists k \in \mathbb{Z} / \theta_2 = \theta_1 + \pi + 2k\pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1))$$

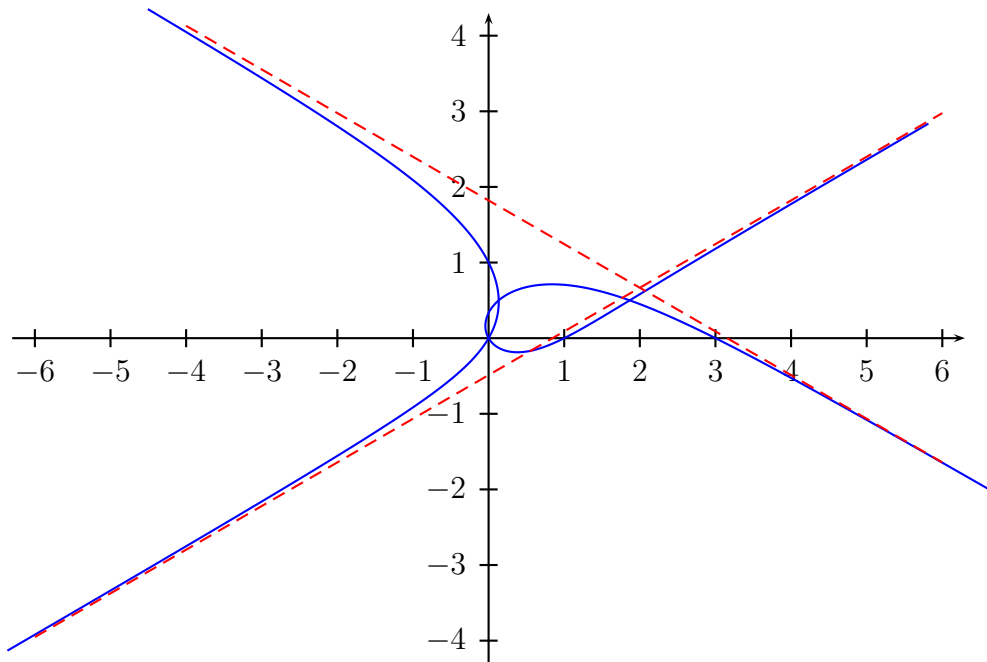
$$\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0], \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } r(\theta_2) = -r(\theta_1)$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 \in [-\pi, 0], \theta_2 = \theta_1 + \pi \text{ et } \frac{-2 \cos(\theta_1) + 1}{-2 \sin(\theta_1) + 1} = -\frac{2 \cos(\theta_1) + 1}{2 \sin(\theta_1) + 1}.$$

Maintenant, pour $\theta \in [-\pi, 0] \setminus \{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\}$

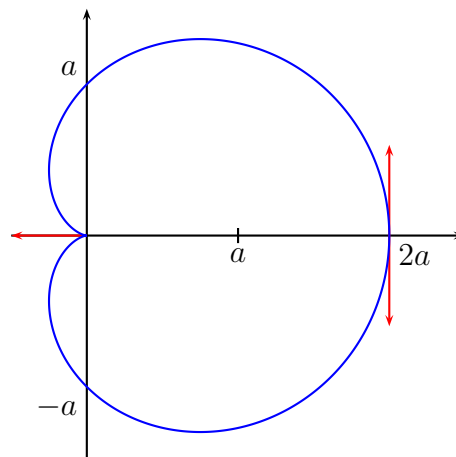
$$\begin{aligned} \frac{-2\cos(\theta)+1}{-2\sin(\theta)+1} = -\frac{2\cos(\theta)+1}{2\sin(\theta)+1} &\Leftrightarrow -4\cos(\theta)\sin(\theta)+1 = 4\cos(\theta)\sin(\theta)-1 \Leftrightarrow \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2\theta \in \frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \text{ ou } 2\theta \in \frac{5\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta \in \frac{\pi}{12} + \pi\mathbb{Z} \text{ ou } \theta \in \frac{5\pi}{12} + \pi\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \theta \in \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12} \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi, les points doubles distincts de l'origine sont $M(-\frac{11\pi}{12}) = M(\frac{\pi}{12})$ et $M(-\frac{7\pi}{12}) = M(\frac{5\pi}{12})$. Sinon, $M(-\frac{2\pi}{3}) = M(\frac{2\pi}{3}) = O$.



Correction de l'exercice 3 ▲

1. **Domaine d'étude.** La fonction r est 2π -périodique et paire. Donc on étudie et on construit la courbe quand θ décrit $[0, \pi]$ et on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Ox) . **Variations et signe de r .** La fonction r est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, strictement positive sur $]0, \pi]$ et s'annule en π . **Étude pour $\theta = \pi$.** La tangente en $M(\pi) = O$ est la droite passant par O d'angle polaire π c'est-à-dire l'axe (Ox) . Par symétrie par rapport à (Ox) , le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce.



2. Soient $\theta \in [-\pi, \pi]$ puis $M = O + a(1 + \cos \theta) \vec{u}_\theta$ le point de \mathcal{C} de paramètre θ .

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= -a \sin \theta \vec{u}_\theta + a(1 + \cos \theta) \vec{v}_\theta = 2a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(-\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_\theta + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{v}_\theta \right) \\ &= 2a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_\theta + \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \vec{v}_\theta \right) = 2a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_{\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Longueur ℓ de la cardioïde. On a $\left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = |2a \cos(\frac{\theta}{2})| = 2a \cos(\frac{\theta}{2})$ (pour $\theta \in [-\pi, \pi]$) et donc

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi} \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| d\theta = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\theta/2) d\theta = 4a [\sin(\theta/2)]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

La cardioïde d'équation polaire $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$, a pour longueur $8a$.

Développée. Le point $M(\theta)$ est régulier si et seulement si $\theta \neq \pm\pi$. Dans ce cas,

$$\frac{ds}{d\theta} = \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| = 2a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \text{ et aussi } \vec{\tau}(\theta) = \vec{u}_{\frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}}$$

En notant $\alpha(\theta)$ une mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{\tau}(\theta))$, on peut prendre $\alpha(\theta) = \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$. En notant $R(\theta)$ le rayon de courbure au point $M(\theta)$,

$$R(\theta) = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{4}{3}a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right).$$

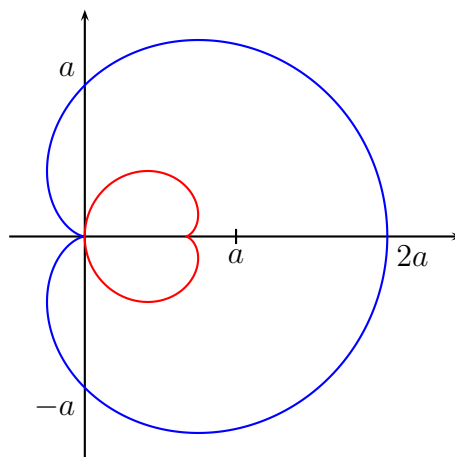
Ensuite, $\vec{n}(\theta) = r_{\pi/2}(\vec{\tau}(\theta)) = -\vec{u}_{3\theta/2}$ et donc, en notant $\Omega(\theta)$ le centre de courbure au point $M(\theta)$,

$$\begin{aligned} \Omega(\theta) &= M(\theta) + R(\theta) \vec{n}(\theta) \\ &= O + a(1 + \cos \theta) \vec{u}_\theta - \frac{4}{3}a \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{u}_{3\theta/2} \\ &= O + a(1 + \cos \theta) \left(\cos(\theta) \vec{i} + \sin(\theta) \vec{j} \right) - \frac{4}{3}a \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{3\theta}{2} \right) \vec{i} + \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \sin \left(\frac{3\theta}{2} \right) \vec{j} \right) \\ &= O + a \left[\left(\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \frac{2}{3}(\cos(\theta) + \cos(2\theta)) \right) \vec{i} + \left(\sin(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) - \frac{2}{3}(\sin(\theta) + \sin(2\theta)) \right) \vec{j} \right] \\ &= O + a \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cos(\theta) - \frac{1}{3} \cos^2(\theta) \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{3} \sin(\theta) - \frac{1}{3} \sin(\theta) \cos(\theta) \right) \vec{j} \right] \\ &= O + \frac{2a}{3} \vec{i} + \frac{a}{3} (1 - \cos \theta) \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Notons Γ la développée cherchée. On a $\Gamma = t \circ h(\mathcal{C}_1)$ où t est la translation de vecteur $\frac{2a}{3} \vec{i}$, h est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$ et \mathcal{C}_1 la courbe d'équation polaire $r = a(1 - \cos \theta)$. Maintenant, en notant r la fonction $\theta \mapsto a(1 + \cos \theta)$ et r_1 la fonction $\theta \mapsto a(1 - \cos \theta)$,

$$[r_1(\theta + \pi), \theta + \pi] = [a(1 + \cos \theta), \theta + \pi] = s_O([r(\theta), \theta]).$$

La courbe \mathcal{C}_1 est donc la symétrique par rapport à O de la courbe \mathcal{C} . En résumé, la développée de \mathcal{C} est l'image de \mathcal{C} par la transformation $t \circ h \circ s_O$: c'est encore une cardioïde.



Correction de l'exercice 4 ▲

Soient $(R, \theta) \in \mathbb{R}^2$ puis M le point du plan dont un couple de coordonnées polaires est $[r, \theta]$.

$$\begin{aligned}
 M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow x^2(x^2 + y^2) - (y - x)^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 \cos^2 \theta \times r^2 - (r \sin \theta - r \cos \theta)^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow r^2[r^2 \cos^2 \theta - (\sin \theta - \cos \theta)^2] = 0 \Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r^2 = \left(\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta} \right)^2 \text{ (} \cos \theta = 0 \text{ ne fournit pas de solution)} \\
 &\Leftrightarrow r = 0 \text{ ou } r = \tan \theta - 1 \text{ ou } r = 1 - \tan \theta.
 \end{aligned}$$

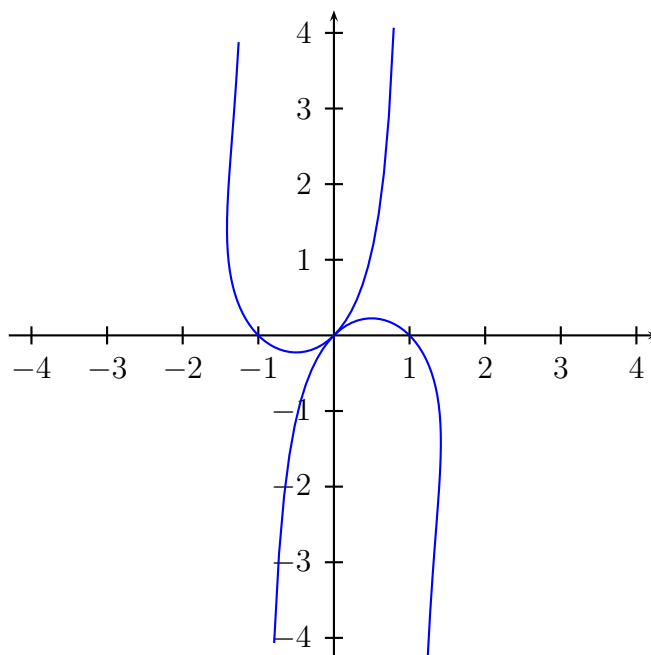
\mathcal{C} est donc la réunion de la courbe (\mathcal{C}_1) d'équation polaire $r = \tan \theta - 1$, (\mathcal{C}_2) d'équation polaire $r = 1 - \tan \theta$ et $\{O\}$. On note que le point O appartient à (\mathcal{C}_1) car $\theta = \frac{\pi}{4}$ fournit $r = 0$. Donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{O\} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$. Ensuite, on notant r_1 et r_2 respectivement la fonction $\theta \mapsto \tan \theta - 1$ et $r_2 = -r_1$,

$$M[\theta + \pi, r_2(\theta + \pi)] = M[\theta + \pi, r_2(\theta)] = M[\theta + \pi, -r_1(\theta)] = M[\theta, r_1(\theta)],$$

et comme $\theta + \pi$ décrit \mathbb{R} si et seulement si θ décrit \mathbb{R} , les courbes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont une seule et même courbe.

\mathcal{C} est la courbe d'équation polaire $r = \tan \theta - 1$.

Construction de \mathcal{C} .



Correction de l'exercice 5 ▲

Développée. $M(\theta) = O + ae^\theta \vec{u}_\theta$ puis

$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = ae^\theta (\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta) = a\sqrt{2}e^\theta (\cos(\frac{\pi}{4}) \vec{u}_\theta + \sin(\frac{\pi}{4}) \vec{v}_\theta) = a\sqrt{2}e^\theta \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit $\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{2}e^\theta$ et $\vec{\tau}(\theta) = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{4}}$. On peut alors prendre $\alpha(\theta) = \theta + \frac{\pi}{4}$ et donc $\frac{d\alpha}{d\theta} = 1$. Par suite

$$R(\theta) = \frac{ds/d\theta}{d\alpha/d\theta} = \frac{a\sqrt{2}e^\theta}{1} = a\sqrt{2}e^\theta.$$

D'autre part, $\vec{n}(\theta) = \vec{\tau}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \vec{u}_{\theta+\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta)$ et donc

$$\Omega(\theta) = M(\theta) + R(\theta)\vec{n}(\theta) = O + ae^\theta \vec{u}_\theta + a\sqrt{2}e^\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{u}_\theta + \vec{v}_\theta) = O + ae^\theta \vec{v}_\theta = r_{O, \frac{\pi}{2}}(M(\theta)).$$

La développée de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = ae^\theta$ est l'image de cette spirale par le quart de tour direct de centre O .

